

論數曆學

高平子著

中央研究院數學研究所

臺灣 台北 南港

中華民國五十八年二月

學曆散論自序

余志學之年，讀書家塾惟事記誦。家藏鄉先哲顧尚之遺書板片，偶一竊觀，六曆九執，不知所謂。繼從馬師相伯於其所創之震旦學院，得聞西方幾何之學而好之。既畢所業，遂入國內惟一之余山天文臺，專修天文，因識現代天文學之範疇。一日，本師蔡臺長（法蘭西人，耶蘇會士）示余一舊冊，謂中國亦有天文，曷勿求其彙通以與現代天文相比？余受而讀之，初頗茫然，繼漸有味，且知清初之學亦本西來。乃漸上推諸史天文曆志，以及各家筆記雜說。乃知中國之所謂天文，實近於西方之「星占」（Astrologie）。「易曰「觀乎天文，以察時變」其要義也。而曆法則近乎西方天文學（Astronomie）中之實用一科，其旨在求合天之節令，以前民用。故傳曰：「閏以正時，時以作事，事以厚生，生民之道，於是乎在。」是以諸史於天文、曆法，二千餘年來各自分別。而專家好學之士尤多究心於曆法。章、蔀、紀、元、早著於先秦古曆；七衡、九道、漸徵象數；超辰、歲差、漸近實驗；日行盈縮、月行遲疾、五星之見伏順逆，漸以觀測為依歸。自漢及清二千餘年，作者繼起，代不絕人。惜中土幾何之學發達極遲，推理之術尤為疏濶。是以一率之興，或借音律、易數；一列數字，或只存立成（即數表）孤行。極少因圖見證，更無設象求真。是以多錄某之諸輪未見於中國，刻白爾之橢圓無從發生。嗣後牛頓之萬有引力，光譜

線之分析等等，更無論矣。余既略通現代天文之門徑，乃思稍涉中國舊聞，以觀古今中外爲學之異同，造誼之深淺。初從清代着手，見其著作已多受西方影響。元代爲中國天文最盛時期，而所謂天文，多在曆學。循此而上，唐釋一行之大衍曆，南朝何承天之元嘉曆等皆爲名曆。上推至於漢之三統，太初，其要略皆在史志。溯自秦之顛項，迄於清之雍正，據朱文鑫氏所查，凡經行用者得四十八曆。而據元史曆志則云：「黃帝以來，諸曆轉相祖述，殆七八十家。」而愈及古遠，則語文愈殊。名詞術語今古不通。運算法式概以古語而無公式。構思之方每多幻想，不從理則。是以因革紛紜，殆難清理。余既不敏，寢饋其間，時垂半紀。爽亂之前，除中國天文學會會刊、科學社科學月刊、及中央研究院天文研究所天文年曆、所見數篇而外，稿多散佚，頗少發表。自避地以來，動筆稍勤，歷年投之報刊以換斗米者約得百餘篇。然以駑鈍之材，撰述散亂，回顧前作，諸多隨手綴述，無益舊文。乃重理諸刊，自選一十三篇稍可當於中國天文學史之資料者，彙爲一編，印而存之，以便同好者之採擇。題曰「學曆」而不曰「曆學」者，自顧所作，苟曰學於曆而已，凡例無存，系統不具，不足以當於曆學之一支云爾。

民國五十六年九月平子自序

本書蒙張其的先生列入〔中華大典〕，繼由中央研究院數學研究所准予出版，並申請臺灣大學數學研究中心給予資助。而數學研究所劉世超所長，謝傳清先生經理印務，郭從古先生負責校對。涇涇之愚得以問世，併此致謝，用誌弗忘。

五十七年十二月高平子附記

目 錄

自序	III
中國人的宇宙圖象	1
漢曆因革及其完成時期的新研究	53
論分時制度	89
漢曆五星步法的整理	113
中國授時制度略論	157
曆法約說上篇：中國諸曆約說	187
曆法約說下篇：西方諸曆約說	228
漢曆五星週期論	259
中西星座對照之一斑	305
四分曆統譜	333
圭表測景論	391
從中國文獻看星球爆發的消息（譯文並考證）	419
地有四遊新解	433

中國人的宇宙圖象

「宇宙」一辭最早似見於莊子。莊子庚桑楚篇：「有實而無乎處者宇也，有長而無本剝者宙也」。宙的界說相當明顯，但宇的界說則比較費解。郭象的注解是「宇者有四方上下而四方上下未有窮處，宙者有古今之長而古今之長無極。」這對於宇的解釋是否合乎莊子之意頗難確定。近日偶讀惠拓氏(G. J. Whitrow) 宇宙組織論 (The Structure of the Universe) 徵引三百年前法國哲學家巴斯格爾 (Pascal) 之語謂「宇為無窮之大圓，無處非中而莫知其周」，也就是說這個大圓中任何一處都可以算是圓心，却沒有一處可以認為是圓周。此語頗有妙悟，鄙意也許較郭氏註更合乎莊周的本意。

莊子以後有淮南子也說宇宙：「往古來今謂之宙，四方上下謂之宇」。張衡靈憲篇則說：「宇之表無極，宙之端無窮」。這些界說比較凡近，但「宇宙」一名辭總之是時空的合體 (time-space)，是我國二千五百年前的一種四度幾何觀念，不能算是附會。

比較通用的名辭則為「天地」，為「四方上下」，為「六合」，其意義大約相同。梁周興嗣千字文的起句「天地玄黃，宇宙洪荒」，對於兩者就未有什麼分辨。

但中國的宇宙觀念除了這些極混濛的概念以外，很少進一步的見解。古來哲人也多有提出問題的，如莊子逍遙遊篇：「天之蒼蒼其正色邪，其遠而無所致極邪」。又天運篇：「天其運乎？地其處乎？日月其爭於所乎？孰主張是，孰維綱是，孰居無事推而行是？意者其有機緘而不得自已邪，意者其運轉而不能自止邪？」屈原天問篇：「天則九重，孰營度之？」但大都有問而無答，或雖答而存疑。又如「天圓地方」的說法為古代最流行的想像，然大戴禮天員篇就不信「地方」說，宋蘇東坡詩「不信天圓真個樣，故因眼力自先窮」，則更不信「天圓」之說了。蓋中國人對於宇宙或天地的問題，並非漠不關心，也並非沒有聰明的看法，但大多不肯深求解答而取「六合之外，聖人存而不論」的態度，以致數千年來在這一方面的成就是太少了。

不過這也是就一般的思想態度而言，在若干天文專家中却也有比較深切的觀察和想像。茲錄東漢靈帝時（光和元年即西紀 178年）蔡邕被貶朔方上疏表志一段以見源流。

「言天體者有三家，一曰周髀，二曰宣夜，三曰渾天。宣夜之學絕無師法，周髀術數俱存，考驗天狀多所違失，史官不用。唯渾天者近得其情。今史官所用候臺銅儀，則其法也。立八尺圓體之度，而具天地之象，以正黃道，以察發斂，以行日月，以步五緯，精微深妙，萬世不易之道也。官有其器，而無本書，前志亦闕而不論。臣求其舊文，連年不得。在東觀以治律未竟，未及成書，案略求索，竊不自量，卒欲寢伏儀下，思

惟精意，案度成數，扶以文義，潤以道術，著成篇章。罪惡無狀，投畀有北，灰滅雨絕。世路無由。宜博問羣臣，下及巖穴，知渾天之意者，使述其義，以裨天文，撰建武以來星變彗孛占驗著明者續其後。】

此文據後漢書天文志劉昭注。晉書天文志亦錄此文，大略相同，惟「一曰周髀」作「一曰蓋天」。因為「蓋天」是這一個宇宙系統的術名，「周髀」是述此系統的本書，其實所指相同。又晉書第一句是「古言天者有三家」，特標古字。據此文則迄至漢末為止，從古流傳的天文家言，共分三派。宣夜一派，早已失傳；蓋天一派的理論和算法都在周髀一書（即周髀算經）之中，但不為皇家天文師們所應用，因為認為不合天象；只有渾天一派是當時的正統派，但是祇有儀器而失去了說明書；所以蔡邕的大志是要根據儀象，補成這個渾天學說的「本書」。周髀一書一直流傳至今。宣夜一說後世更無人知道。所可怪的是張衡作渾天儀（約在第二世紀初年）與蔡邕時代（第二世紀末年）相去不遠。張衡且有「靈憲」和「渾儀」各一篇闡述渾天說的理論和法數，而蔡邕似未之見，並且說史官也沒有，頗為可異。其實張衡之渾儀與候臺觀測儀器並不相同，所以蔡邕有此說法，當詳後論。

自魏晉以後中國言天者大概只賸遺蓋天渾天兩派，其間雖有「安天」「昕天」「穹天」等雜說一時發生，但很少影響，也很少流傳。所以我認為中國人的宇宙觀可以「蓋天」、「渾天」二派來代表，而「周髀算經」就是蓋天說的經典，張衡的

〔靈憲〕、〔渾儀〕二文却是渾天說的集成。所以研究這三種舊文，對於中國人的宇宙觀念就思過半矣。

一 蓋天說（周髀算經）

周髀著作的年代不詳。最早的注解者趙君卿（名爽）年代亦已不詳，大概認為漢末人。書中首篇有〔周公問於商高〕之語，大概是一種託辭，像許多子書同樣的體例。周髀的名義，依原文〔髀者表也，此數望之自周，故曰周髀〕，意思是指立在周王城（洛陽）的測影的竿。這裏我不預備作周髀年代或真偽的考證，只說我的總意見是這書應當是古代蓋天家言的集說，一部份可能自周初（西紀前1100年左右）傳來，其他可能有陸續摻雜的成份，直到漢末為止。

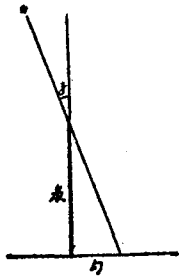
周髀中的〔北極瑤璣〕

周髀書中有一個很重要的觀測，就是所謂〔瑤璣〕的〔四遊〕。我在民國十二年（1923）曾經做過一篇周髀北極瑤璣考（法文本）在震旦學院理科雜誌第五期上發表，在文內曾經用現代天文正確算法證明所謂〔瑤璣〕是周代的北極星，（不是現在的北極星而是現在所謂〔帝星〕，亦即是西名的（ β UMi），假設觀測年代為1100年即西紀前一千一百零一年，則其時的帝星赤經度應為 $271^{\circ}26'50''$ ，其距極應為 $6^{\circ}30'$ ，依周髀觀測則算得赤經度 270° 距極 $5^{\circ}4'$ 。從此可見經度差極為相近，距極差稍嫌大些。但這樣成績已經不是漢代以後所能偽造

的了。清儒戴東原曾以黃極解釋琿璣，以樸學大師而有此誤，出乎意外。清算學家鄒伯奇（見中西算學叢書學計一得）已認琿璣為北極，但其說法未能令人滿意。最近日本能田忠亮亦認琿璣為帝星，他在周髀算經之研究（昭和八年即 1933）內算得西紀前 1123 年時帝星赤經應為 $272^{\circ}21''$ 與我的得數頗為相符，又說「周初」一千（一）百年頃帝星距極 $6^{\circ}53'$ 」亦與我的得數很相近。能田氏研究在民國二十二年，他沒有看見我的一篇，但對於這個觀測的真實，結論是相同的。周髀一書內包含有周初的原始材料，琿璣一事我認為是一個重要證據。

周髀的法物

周髀算經所述的觀測用具只是一根竿子直立在平地之上。周髀原文「古時天子治周，此數望之自周，故曰周髀」，又說「日中立竿側影」，又有「今立表高八尺」。所以所謂「髀」「表」「竿」實際同為一物。地面是用水來取得平準的。依周禮，表下還有一種水平形的土基，稱為「土圭」，在這上邊量取影長。現在河南告成鎮的所謂「周公測影臺」還保存這樣石砌的基地，但實際該臺是元人建築的。周髀文中則只說「表」而不說「圭」，但表或髀的高度始終用八尺的定制，和周禮相同。除了八尺之表以外，還有一個制度不詳的「漏」壺，用以定時，因為據原文說「加此時者，皆以漏揆度之」。



表的用法，在測日時是看表影的長度，稱為「影長」。在

測星時是從表端拉一條直線，看準星的方向而把線的另一端扣至地上，再從這端到地的點量至表脚，稱為「勾長」。同時也會應用這最簡單的表來確定正南北，和測定星的方位角。在周髀所用的自然只有勾長或影長的數目，但從此我們就可以推算當時所測的「天頂距」。如第一圖即可見天頂距角 Z 和表高及勾長的關係式為 $\tan Z = \frac{\text{勾長}}{\text{表高}}$ 而且不需要確定表高

的絕對值，因為只須知道勾長和表高的比例，所以在這裡不須先行考定周尺的長短。如果要算得正確一些，那還須加以蒙氣差的校正。倘是日影，則更須加以太陽半徑的校正，因為表影的濃處是對太陽的上邊開始而不是對太陽的中心。

周髀的幾何知識

統觀周髀全書的術數，我們可以概括那時的幾何知識略如下列數點：

(1) 兩個大小不同的「勾股形」或「矩形」即直角三角形，倘有一尖角相合，其相當之邊有一定比例。所謂「矩出於九九八十一」者就是有了三量可以用乘除推算第四量之意。一個斜三角可視為兩個矩形比較的餘分，所以他們也知道其相當邊的比例。書中一切「立矩望高，覆矩測深，臥矩知遠，及立表測影」等法皆從此出。

(2) 勾方股方之和等於弦方。「勾三股四弦五」是周髀中認爲了不起的發現，這就是勾股弦方的原理，後世注家也都以爲是周髀算經的重要定理。但我想周髀原始知識也許只知道「勾

三股四弦五¹的一個特殊三角形，其後漸漸拓展為普通定理。這在原書「求邪至日」一問題必俟其影六尺時為之，可為選就特殊矩形之一證。因為影六尺，表八尺，得邪至日十尺，仍舊不脫勾三股四弦五的相似形，否則為什麼不求夏至時或冬至時的邪至日呢？

(3) 圓周和圓徑的一定比例。這在我們看來似乎是一個很自然而淺顯不過的定理，但在當時一定認為是一個極重要的發明。而且我們知道在一個曲面上（譬如在球面上）這個定理就須修改，而他們却似乎不知道分別而一概應用。

(4) 徑一周三的圓周定率。當時雖知道圓周有定率，但他們只知道最粗疏的一與三之比，而且應用得很長久。可見我們不能用太精細的看法來批評古書。

周髀的其他觀測

周髀書中除了北極星的實測以外，還有夏至冬至日影的觀測，太陽對徑的觀測，二十八宿方位角的觀測，牽牛、東井、婁、角、距極度的觀測。從冬夏至日影的觀測，我們可以算出當時的「黃赤道大距」即黃道對於赤道的傾斜角，以及當時觀測地點的地理緯度，但結果都沒有北極星觀測的優良。周髀下卷也用八尺表及周圍三百六十五寸四分之一寸的地平上圓周來測定二十八宿「距星」（指用為每宿中主要的大星）的距度。但這種測法所得的自然只是地平經度之差（隨觀測地點而不同），如果要得到赤道經度的相距，還須加以改算。周髀時代

當然還無法改算，並且似乎亦沒有兩者差別的觀念。實際在書中亦祇說一些測法而並未列出測得的成績，所以現在亦不能應用。但這種測法很像是反應漢太初改曆及落下闕營渾儀以前的一種經常觀測法。試觀漢書律曆志所載議造漢曆一段：「至武帝元封七年漢與百二歲矣。……其以七年爲元年。遂詔卿、遂、遷、與侍郎尊、大典星射姓等議造『漢曆』。迺定東西，立晷儀，下漏刻，以追二十八宿相距於四方。…」這可見那時的觀測就是在平地上立一個『晷儀』（即髀表），定好東西方位（周髀有其術），用漏刻記時（周髀相同），然後測定二十八宿的東西相距（亦是方位角的差），與周髀的方法和用具可說若合符節。至於牽牛、東井、婁、角、距極度的觀測，則似乎有一些渾天家言的滲入，也許不是純粹的蓋天家言，當於別篇論之。

周髀的「日高」與「天離地」

周髀上卷記榮方問於陳子一段故事，榮方提出了許多大問題如：「日之高大」，「光之所照」，「一日所行」，「遠近之數」，「人所望見」，「四極所窮」，「列星之宿」，「天地之廣袤」等等你能够知道嗎？而陳子却直截爽快地回答一個「然」字，而且以下居然一一的回答出來如數家珍。我細看其中最重要是日的直線高度，又因爲那時人認爲日月星辰麗乎天，所以日的高就是天離地的遠距，周髀所定的這個高度是八萬里。其原文有這樣兩句，上卷：「從髀至日下六萬里而髀無影，從

此以上至日則八萬里」，下卷：「天離地八萬里」。其餘所有日對徑的大小，夏至、冬至、春分、秋分等日道的遠近，周地（觀測地點假設在洛陽）人目所極，日照所極等等都有詳細里數，而日高八萬里却是其中的基本數目。所以我們必須一問這個「日高」或「天高」的數目是憑空臆造的呢？還是確有觀測根據的呢？我們當然不信這是所謂「日高」或「天高」的意義，但究竟有沒有什麼真意義來解釋這個數目呢？我的回答是：

「這個數目不是臆造，而是有一部觀測根據的，但因一部份不準確的觀測而發生得數的大差。這個數目的意義當然不是天高，但如果觀測正確則可得到了地半徑的數目。」

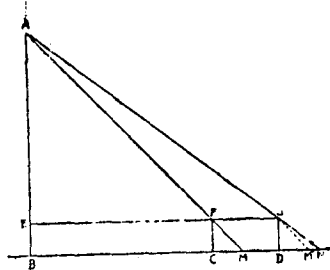
周髀取日高的基本觀測是這樣的：（見上卷）

「周髀長八尺，夏至之日，晷一尺六寸。髀者股也，正晷者勾也。正南千里，勾一尺五寸；正北千里，勾一尺七寸。」

……「從髀至日下六萬里而髀無影，從此以上至日則八萬里。」

這就是應用古算「九章」的「重差」之術。張衡靈憲篇曰：「將覆其數，用重鈎股。懸天之影，薄地之儀，皆移千里而差一寸」。所謂「重鈎股」即是應用兩個重疊的「勾股形」，也就是「重差」術，千里而差一寸與周髀的比率相同，正可作周髀的解釋。我再用幾何法淺釋之：如第二圖設A為「日」或任何高遠物，AB為正垂線，BCD在同一地平上；CF, DG為同高表，EFG與地平線平行。先立表於C處得表影CM，同時立表

於 D 處得表影 DN。如果 A 是並不太遠的一點，而「表間」CD 有相當距離，則兩「表影」可以有一顯見的「影差」(MN = DN - CM) 而 GM' 與 FM 平行。從 AEF, FCM 及 AFG, GM'N 兩組三



第二圖

角形的相似，我們很易得到

$$\frac{AE}{FC} = \frac{EF}{CM} \left(= \frac{AF}{FM} = \frac{AF}{GM} \right) = \frac{FG}{M'N}$$

這裏 AE 當然可以視為「日高」，所以可寫為

$$\frac{(\text{日高})}{(\text{表高})} = \frac{(\text{日下距})}{(\text{影長})} = \frac{(\text{表間})}{(\text{影差})}$$

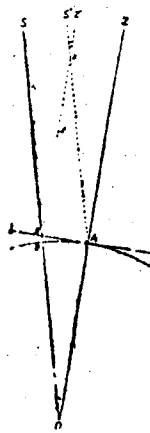
從此即得 $(\text{日下距}) = \frac{(\text{表間}) \times (\text{影長})}{(\text{影差})}$

$$(\text{日高}) = \frac{(\text{表間}) \times (\text{表高})}{(\text{影差})}$$

周髀作者當已知道了這個定理，至少他已應用了這個法則，但這個定理必須基於平面上的觀測，而實際我們祇能在「球面」上（地球表面）測影而並不在「平面」上測影。結果「平面」的假定自然引致得數的大差，所以周髀八萬里的得數比現代所知地日距度差至數千倍之多。

但是這個八萬里的所謂「日高」數目雖然並不是日高，究竟有沒有一些另外的意義呢？這一點前人似多未論及，我想照

鄙意略爲一說。如第三圖：O 爲地心，A 爲地面一點（假定爲洛陽），OS 爲夏至太陽正午方向，B 爲過 A 點子午圈上見太陽在天頂的地點，B' 爲 OS 穿過水平面之點，AB' 直線與 AB 弧線在緯度距離不甚大之處（假如十餘度）差數很少。AS' 爲從 A 望太陽方向，與 OS 平行，Z 爲 A 的天頂方向，Z' 爲 B' 的天頂方向，X 爲 B'Z' 與 AS' 的交點。這樣假設有地面上的一段經線 AB 而在意想中把它放置在水平面上成爲 AB'，再用上述的法則（即周髀所知的重差法）求出「日



第三圖

下距」和「日高」，則其所得正是 AB' 和 B'X。但 AB'X 和 B'AO 二勾股形顯然相等，即知 $B'X = AO$ ，這就是說用周髀法所得的「日高」在理論上正是「地球的半徑」。

再看結果是不是這樣。

凡欲研究測影所生的角度成果如太陽的天頂距角，觀測地點的地理緯度，黃赤道傾斜角等，都不必考究所用表尺的絕對值，因爲需要的只是影長和表高的比數，而不用表高的本數。但倘要追問「日高」的真數，那就須要追究周髀所用「里」「步」「尺」等長度對於現用長度的價值了。這裏不能作周代度量詳細考證，但擬從周髀本文得到一個大致不錯的梗概。

里和步的關係 周髀本文和註都以三百步爲一里，前後屢見，可無疑義。

步和尺的關係 周髀步以下多用命分（如言幾分步之幾），

故不易知其與尺寸的比數。惟下卷有一節說「即平地徑二十一步周六十三步，令其平矩以水正，則位徑一百二十一尺七寸五分，因而三之爲三百六十五尺四分尺之一」。這裏其他解釋姑且不提，惟從此可以得知二十一步合得一百二十一尺七寸五分，又六十三步合得三百六十五尺四分尺之一。相比得知周髀一步應合五尺八寸稍差。後世或以五尺爲一步，或以六尺爲一步，周髀似以五尺八寸爲步，因試以五尺或六尺爲率，則上文之比例差得太大。我們姑且承認這個步大致不誤，則得

$$1 \text{ 里} = 300 \times 5.8 \text{ 尺} = 1740 \text{ 尺}$$

周尺的長度 普通估計周尺的長度大約等於二十公分或稍長。照周秦書本的說法大概人長八尺，周髀用八尺表，其最顯理由之一亦大約是用等身的長度。現在假定最普通的身長爲1.68公尺，則周尺合得二十一公分。這不過是一個假定，正確之數留待考古家來決定，但在本文的目的我認爲這是一個可用而所差不多的假定。

周里的長度 以此周尺率與周里尺數相乘便可得周里合公里的長度：

$$1 \text{ 周里} = 1740 \text{ 周尺} = 365.4 \text{ 公尺} = 0.3654 \text{ 公里}$$

$$1 \text{ 公里} = 2.737 \text{ 周里}$$

以此折算所謂「日高八萬里」則得 29232 公里。這就是我上文所說周髀應得的地球半徑。

但我們現在科學上確知地球平均半徑爲 6367.654 公里，那末按周髀所算的地球半徑又大過四倍半以上，這是什麼道理

呢？我想可以這樣研究。

設觀測地點在洛陽，其緯度約為三十五度，又設 Z_0 為洛陽夏至太陽天頂距，依周髀此時八尺表影一尺六寸； Z_1 為洛陽南若干里地，其表影為一尺五寸之處； Z_2 為洛陽北若干里地，其表影為一尺七寸之處；則得

$$\frac{1.7}{8} = 0.2125 = \tan Z_2, \quad Z_2 = 12^\circ 00'$$

$$\frac{1.6}{8} = 0.2000 = \tan Z_0, \quad Z_0 = 11^\circ 19' 41'$$

$$\frac{1.5}{8} = 0.1875 = \tan Z_1, \quad Z_1 = 10^\circ 37' 42'$$

從此可見在北緯三十五度附近，夏至日晷差一寸（用八尺表）則南北緯度差平均為四十一分半。但現在我們知道子午線上每差一度約合111公里，即四十一分半約合76.8公里，又合210.2周里。因此影差一寸，南北僅差二百十周里，較之所云「千里而差一寸」之率，錯誤亦有四倍半以上。若用冬至之影則錯誤更大。

再設 Z_3 為洛南千里天頂距， Z_4 為洛北千里天頂距，即洛陽南北各365.4公里之處，以111公里約之，即知為南北各差三度十七分。因此得

$$Z_4 = 11^\circ 19' + 3^\circ 17' = 14^\circ 36', \quad \tan Z_4 = 0.2605$$

$$Z_0 = 11^\circ 19', \quad \tan Z_0 = 0.2000$$

$$Z_3 = 11^\circ 19' - 3^\circ 17' = 8^\circ 02', \quad \tan Z_3 = 0.1411$$