College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

高等学校经济管理学科数学基础

主编 范培华 胡显佑

微积分中的典型例题分析与习题

6

朱来义 主编

高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校经济管理学科数学基础
主编　范培华　胡显佑

微积分中的典型例题分析与习题

朱来义　主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书是与编者所编的《微积分》(第一、二版)(高等教育出版社出版)(以下简称教材)配套的学习辅导教材，由北京大学光华管理学院和中国人民大学信息学院教师编写。主要面向使用教材的学生，也可供使用教材的教师教学时参考。本书按教材的章节顺序编排内容，与教学同步。每章包括内容要点，典型例题解析，习题 A、B、C，书末附有习题参考答案与提示。习题 A 是与各章节内容相配合的基本题与综合题，习题 B 是有一定难度的基本题与综合题，习题 C 是选择题。本书编集的例题与习题都是微分与积分中的典型问题，内容丰富，因此也适合考研学生复习之用。

图书在版编目(CIP)数据

微积分中的典型例题分析与习题/朱来义主编.—北京：高等教育出版社，2004.7
ISBN7－04－014378－X

Ⅰ.微… Ⅱ.朱… Ⅲ.微积分－高等学校－解题
Ⅳ.O 172－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 052260 号

策划编辑 马 丽　**责任编辑** 文小西　**封面设计** 张 楠　**责任绘图** 黄建英
版式设计 胡志萍　**责任校对** 俞声佳　**责任印制** 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京奥鑫印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2004 年 7 月第 1 版
印　　张	34	印　　次	2004 年 12 月第 2 次印刷
字　　数	640 000	定　　价	35.10 元

物料号：14378-00

前　言

由高等教育出版社出版，北京大学光华管理学院范培华教授和中国人民大学信息学院胡显佑教授主编的“高等学校经济管理学科数学基础”系列教材（包括《微积分》、《线性代数》和《概率统计》），自2000年出版以来，赢得了众多的读者．并于2003年入选为高等教育出版社“高等教育百门精品课程教材建设计划”的项目．作为该项目的研究成果之一，我们编写了这本教学辅导教材．期望能对提高微积分的教学质量，对学生掌握微积分的教学基本要求起到一种辅助作用．

本书是与编者所编的《微积分》第一版和第二版（由高等教育出版社出版）（以下简称教材）配套的学习辅导教材．主要面向使用教材的学生，也可供使用教材的教师做教学参考书以及考研学生作复习之用．

本书按教材的章节顺序编排内容以便与教学同步．考虑到读者使用方便，编写时注意到使本书具有相对的独立性．

每章包括以下几部分内容：

一、内容要点

提纲式地归纳了每一章的概念、定理、公式、方法，并给出了一些常用的公式．

二、典型例题解析

按照每一章教学内容的顺序，我们选择了较典型的，能反映教学要求的例题进行解析．每道例题在解析时，先进行必要的分析，再给出解题过程．对于与例题密切相关的知识以“注”的形式介绍给读者．属于同一个知识点的一些例题之后都有一个“总结”以概括这部分内容的基本要求及注意事项．

所选用的例题，一部分是教材中较难的习题，一部分是与各章节内容相配合的典型例题，还有一部分是编者在教学过程中总结出的问题．

三、习题

按照每一章教学内容的顺序，每一章我们都配备了A、B、C三组习题．习题A是与各章节内容相配合的基本题与综合题，习题B是有一定难度的基本题与综合题，习题C是选择题．

另外，书末还附有习题参考答案与较详细的提示．

本书由教材的编者编写（按编写的章节次序排列）：吴岚（第一、七章）、朱来义（第二、三、四章）、范培华（第五、六章）、严守权（第八、九、十章）．

由于我们水平所限，书中难免有不妥之处，殷切期望同行们和广大读者给予批评指正.

编者

2004年3月

目　　录

第1章 函　　数

(一) 内容要点

1. 预备知识

实数，数轴，数轴上点的坐标，实数与数轴上点之间的一一对应关系；实数 x 的绝对值：

$$|x|=\begin{cases}x, & 当\ x\geqslant 0\ 时,\\ -x, & 当\ x<0\ 时,\end{cases}$$

绝对值的几何意义，绝对值的性质；

实数全体 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$；

自然数全体 $\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots\}$；

整数全体 $\mathbf{Z}=\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$；

开区间 $(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$；

闭区间 $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$；

半开半闭区间 $(a,b]$，$[a,b)$；区间长度；无限区间；邻域，去心邻域，

x_0 的 δ 邻域 $O_\delta(x_0)=(x_0-\delta,x_0+\delta)$；

x_0 的 δ 去心邻域 $O_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$；

∞ 的 M 邻域 $O_M(\infty)=\{x\mid |x|>M\}$.

2. 函数与函数的几何特征

变量，常量，连续取值变量，离散取值变量；自变量，因变量；函数，函数值，函数的定义域，函数的值域；两个函数相同的充要条件；函数的表示法，表格法、图示法、解析法，函数的解析表示式；分段函数，取整函数 $[x]$

$$[x]=n,\ n\leqslant x<n+1,\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

取整函数 $[x]$ 的性质

$$[x]\leqslant x<[x]+1;$$

解析式表示的函数的定义域，定义域的求法.

单调递增，严格单增，单调递减，严格单减，单调函数；上界，下界，有上界函数，有下界函数，有界函数，无界函数；奇函数 $f(x)$

$$f(-x)=-f(x),$$

偶函数 $f(x)$

$$f(-x)=f(x);$$

基本周期,周期,周期函数 $f(x)$

$$f(x+T)=f(x).$$

3. 反函数、复合函数、隐函数

反函数;严格单调函数必有反函数;$y=f(x)$与其反函数 $y=f^{-1}(x)$之间的关系

$$f[f^{-1}(x)]=x, x \text{ 属于 } f(x) \text{ 的值域},$$

$$f^{-1}[f(x)]=x, x \text{ 属于 } f(x) \text{ 的定义域};$$

$y=f(x)$的图形与其反函数 $y=f^{-1}(x)$的图形关于 $y=x$ 对称;简单函数的反函数求法;

复合函数;两函数 $y=f(u)$与 $u=g(x)$能复合成复合函数 $f[g(x)]$的条件;复合函数的定义域;简单函数的复合函数求法;

函数方程,隐函数,隐函数的显式.

4. 初等函数

基本初等函数;

常数函数 $y=C$;幂函数 $y=x^{\mu}$;指数函数 $y=a^x$;对数函数 $y=\log_a x$;三角函数,正弦函数 $y=\sin x$,余弦函数 $y=\cos x$,正切函数 $y=\tan x$,余切函数 $y=\cot x$,正割函数 $y=\sec x$,余割函数 $y=\csc x$;反三角函数,反正弦函数 $y=\arcsin x$,反余弦函数 $y=\arccos x$,反正切函数 $y=\arctan x$,反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$;

基本初等函数的定义域,基本初等函数的图形,基本初等函数的几何特征;

初等函数.

5. 简单函数关系的建立

数学模型;建立函数关系的方法.

经济学中常见的函数关系;固定成本,可变成本,总成本;产量,销售量;价格;总收入;总利润;需求量,需求函数;供给量,供给函数.

(二) 典型例题解析

1. 预备知识

例 1 设(a,b)是一个有限的开区间.证明对任何 $x\in(a,b)$一定存在 x 的一个邻域 $O_\delta(x)\subset(a,b)$.

分析: 找 x 的邻域 $O_\delta(x)$关键是要找出 δ,注意到 δ 与 x 到端点 a 和 b 之间的距离有关.

证明: 对任何 $x\in(a,b)$,有 $a<x<b$.记 $\delta=\min\{b-x,x-a\}$,则 $\delta>0$.下面我们来证明 $O_\delta(x)\subset(a,b)$.

由于 $O_\delta(x)=(x-\delta,x+\delta)$，对任何 $t\in O_\delta(x)$，有 $x-\delta<t<x+\delta$；由于 $\delta=\min\{b-x,x-a\}$，则 $\delta\leqslant b-x$，从而 $x+\delta\leqslant b$，由 $t<x+\delta$ 可得 $t<b$；同样 $\delta\leqslant x-a$，从而 $x-\delta\geqslant a$，由 $t>x-\delta$ 可得 $t>a$. 因此 $a<t<b$. 这就证得 $O_\delta(x)\subset(a,b)$.

例 2 用区间表示下列点集：

(1) $\{x\mid x\neq 0\}$； (2) $\{x\mid 1\leqslant|x-1|<2\}$；

(3) $\{x\mid |x+1|>0\}$.

分析：由绝对值的几何意义及数轴上点的位置关系可以将这些点集用区间表示出来.

解：(1) 由于实数全体为 $(-\infty,+\infty)$，因此

$$\{x\mid x\neq 0\}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty).$$

(2) 由 $|x-1|<2$ 可得 $-2<x-1<2$，即 $-1<x<3$；由 $|x-1|\geqslant 1$ 可得 $x-1\geqslant 1$ 或 $x-1\leqslant -1$ 即 $x\geqslant 2$ 或 $x\leqslant 0$. 将这些点在数轴上表示出来如图 1-1 所示

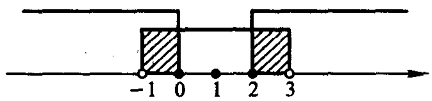

图 1-1

因此

$$\{x\mid 1\leqslant|x-1|<2\}=(-1,0]\cup[2,3).$$

(3) 由绝对值性质可知 $|x+1|\geqslant 0$，且 $|x+1|=0$ 的充要条件是 $x+1=0$，因此

$$\{x\mid |x+1|>0\}=\{x\mid x+1\neq 0\}=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty).$$

总结：区间是一个点集，区间中的点的性质既可以用不等式或等式表示，也可以用数轴来表示. 掌握这两种表示是学习微积分的基础.

例 3 解绝对值不等式 $\big||x+1|-2|x|\big|<3$. 并用区间表示不等式的解.

分析：解此类不等式应先去掉绝对值符号. 易知 -1 和 0 分别为 $x+1$ 和 x 的零值点，在 -1 和 0 的左右两侧，$x+1$ 和 x 分别改变符号. 故我们用 -1 和 0 两点将区间 $(-\infty,+\infty)$ 分为三个区间 $(-\infty,-1)$，$[-1,0]$ 及 $(0,+\infty)$，在此三个区间上分别讨论不等式的解.

解：设 $-\infty<x<-1$，则不等式化为 $|-x-1-2(-x)|<3$. 即 $|x-1|<3$. 而此不等式等价于 $-3<x-1<3$，故得 $-2<x<4$. 所以在 $(-\infty,-1)$ 上的解为 $(-2,-1)$.

设 $-1\leqslant x\leqslant 0$，则原不等式化为 $|x+1-2(-x)|<3$. 即 $|3x+1|<3$. 亦即 $-3<3x+1<3$. 由此得 $-\dfrac{4}{3}<x<\dfrac{2}{3}$. 所以在 $[-1,0]$ 上的解是 $[-1,0]$.

设 $0<x<+\infty$，则所给不等式化为 $|x+1-2x|<3$. 即 $|-x+1|<3$，亦即 $-3<-x+1<3$. 由此得 $-2<x<4$. 所以在 $(0,+\infty)$ 上的解是 $(0,4)$.

综上可得原不等式的解为 $(-2,4)$.

例 4 解不等式 $\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|>\dfrac{x-1}{x+2}$.

分析：由于非负实数的绝对值等于其自身，即当实数 $a\geqslant 0$ 时，$|a|=a$. 因此，上述不等式若有解，必须 $\dfrac{x-1}{x+2}<0$.

解：所给不等式等价于 $\dfrac{x-1}{x+2}<0$. 根据两个非零实数乘积的符号与商的符号相同，因此它又等价于

$$(x-1)(x+2)<0,$$

该不等式的解为 $-2<x<1$，故原不等式的解为 $(-2,1)$.

例 5 解不等式 $|2x+3|>|x-1|$.

分析：此不等式两边各只有一个含绝对值的非负项，故可考虑两边平方以去掉绝对值符号.

解：不等式两边平方得

$$4x^2+12x+9>x^2-2x+1,$$

即

$$(3x+2)(x+4)>0.$$

由此得不等式的解为 $x>-\dfrac{2}{3}$ 或 $x<-4$. 即 $(-\infty,-4)\cup\left(-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$.

注：解绝对值不等式的基本思想是去掉绝对值符号，而去掉绝对值符号的方法是灵活多样的，主要是利用绝对值的定义和性质（比如 $|a|\leqslant K$ 等价于 $-K\leqslant a\leqslant K$），以及不等式两边同时平方.

例 6 证明：若 $|x-1|\leqslant 1$，则 $|x^4-1|<15|x-1|$.

分析：
$$x^4-1=(x^2+1)(x^2-1)=(x^2+1)(x+1)(x-1),$$
$$|x^4-1|=|x^2+1|\cdot|x+1|\cdot|x-1|,$$

因此只需估计 $|x^2+1|\cdot|x+1|$ 的范围即可.

由不等式 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$ 得

$$|x|=|(x-1)+1|\leqslant|x-1|+1.$$

证明：由于 $|x|\leqslant|x-1|+1\leqslant 2$，$(x^2+1)(|x|+1)\leqslant 15$，故

$$\begin{aligned}|x^4-1|&=|x^2+1|\cdot|x+1|\cdot|x-1|\\&\leqslant(x^2+1)(|x|+1)|x-1|\leqslant 15|x-1|.\end{aligned}$$

例 7 证明：对一切实数 a,b，有

$$\max\{|a+b|,|a-b|,|b-1|\}\geqslant\frac{1}{2}.$$

分析：$\max\{x_1,x_2,x_3\}$表示 x_1,x_2,x_3 中的最大者，利用

$$\max\{x_1,x_2,x_3,x_3\}\geqslant\frac{x_1+x_2+x_3+x_3}{4}$$

及绝对值三角不等式$|x\pm y|\leqslant|x|+|y|$.

证明：$\max\{|a+b|,|a-b|,|b-1|\}\geqslant\dfrac{|a+b|+|b-1|+|a-b|+|b-1|}{4}$，

由于

$$|a+b|+|b-1|\geqslant|(a+b)-(b-1)|=|a+1|,$$
$$|a-b|+|b-1|\geqslant|(a-b)+(b-1)|=|a-1|,$$
$$|a+1|+|a-1|\geqslant|(a+1)-(a-1)|=2,$$

因此

$$\max\{|a+b|,|a-b|,|b-1|\}\geqslant\frac{1}{2}.$$

例 8 证明：对一切实数 a,b 有

$$\max\{a,b\}=\frac{a+b}{2}+\frac{|a-b|}{2},$$

$$\min\{a,b\}=\frac{a+b}{2}-\frac{|a-b|}{2}.$$

分析：$\max\{a,b\}$表示 a、b 中最大者，$\min\{a,b\}$表示 a、b 中的最小者. 本题可以分 $a\leqslant b$ 和 $a>b$ 两种情形证明.

证明：当 $a\leqslant b$ 时，$|a-b|=b-a$，$\max\{a,b\}=b$，$\min\{a,b\}=a$，因此

$$\max\{a,b\}=b=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}=\frac{a+b}{2}+\frac{|a-b|}{2},$$

$$\min\{a,b\}=a=\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}=\frac{a+b}{2}-\frac{|a-b|}{2};$$

当 $a>b$ 时，$|a-b|=a-b$，$\max\{a,b\}=a$，$\min\{a,b\}=b$，因此

$$\max\{a,b\}=a=\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2}+\frac{|a-b|}{2},$$

$$\min\{a,b\}=b=\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2}-\frac{|a-b|}{2}.$$

总之对一切 a、b，所证等式成立.

总结：绝对值是微积分中一个很重要的工具，它的几何意义和性质能反映出实数之间的许多规律，例如例 8 中$\dfrac{a+b}{2}$表示 a 与 b 的中点，$|a-b|$表示 a 与 b 之间的距离，则 a 与 b 之间的最大者就是中点向右平移$\dfrac{|a-b|}{2}$，a 与 b 之间的最小者是中点向左平移$\dfrac{|a-b|}{2}$.

2. 函数与函数的几何特征

例 9 以下各组函数是否为相同的函数，说明理由：

(1) $f(x)=|x|, g(x)=x\operatorname{sgn} x, \varphi(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$ $\psi(x)=\sqrt{x^2}$;

(2) $f(x)=\sin(\arcsin x), g(x)=x$;

(3) $f(x)=\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2, g(x)=2\ln(1-x)-2\ln(1+x)$;

(4) $y=f(x)$与$x=f(y)$.

分析：确定函数有两个要素：定义域和对应规则. 要判断两个函数是否相同，首先判断它们的定义域是否相同；再判断它们的对应规则是否也相同，也就是判断相同的x处所对应的函数值是否相同. 只有这两个函数的定义域和对应规则都相同，这两个函数才相同.

解：对于(1)，$f(x), g(x), \varphi(x), \psi(x)$是相同的函数. 因为它们的定义域均为$(-\infty,+\infty)$，它们在同一$x$处所对应的函数值相同. 即它们的对应规则也相同.

对于(2)，$f(x)$和$g(x)$是不相同的. 因为$f(x)$的定义域$D_f=\{x\,|\,|x|\leqslant 1\}$，$g(x)$的定义域$D_g=\{x\,|-\infty<x<+\infty\}$.

对于(3)，$f(x)$和$g(x)$是不同的. 因为$f(x)$的定义域$D_f=\{x\,|\,x\neq\pm 1, x\in\mathbf{R}\}$，而$g(x)$的定义域$D_g=\{x\,|-1<x<1\}$.

对于(4)，抽象的函数表达式$y=f(x)$表示的是定义域为某实数集D_f而对应规则为f的函数. $x=f(y)$表示相同的含义. 这里只是表示自变量和因变量的字母不同而已，所以它们表示相同的函数.

例 10 求下面函数的定义域：

(1) $y=\ln\arcsin(1-x)+\sqrt{\dfrac{1}{4}-x^2}+\dfrac{1}{(x^2+x-2)x}$;

(2) $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{1-\ln|x|}}\cdot\operatorname{arccot}(\tan x)$.

分析：函数的定义域即是使函数的解析表达式中的运算有意义的自变量的取值全体. 而一般初等函数是由基本初等函数经过有限次四则运算或复合得到的，所以求函数的定义域，首先得弄清楚基本初等函数的定义域.

解：(1) 要使函数有意义，必须有

$$\arcsin(1-x)>0, |1-x|\leqslant 1, \frac{1}{4}-x^2\geqslant 0, x^2+x-2\neq 0, x\neq 0.$$

即
$$0<1-x\leqslant 1, -\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}, x\neq 1, x\neq -2, x\neq 0.$$

综合即得所求的定义域为$\left\{x\,\middle|\,0<x\leqslant\dfrac{1}{2}\right\}=\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$.

(2) 要使函数有意义，必须

$$1-\ln|x|\neq 0,\ |x|\neq 0,\ x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots,$$

即

$$x\neq \pm \mathrm{e},\ x\neq 0,\ x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots.$$

故所求的定义域为$\{x\mid x\in \mathbf{R}, x\neq \pm \mathrm{e}, x\neq 0, x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi, k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}$.

例 11 求函数 $y=\frac{2}{\pi}\arcsin \frac{2}{x-2}$的定义域与值域.

分析： 反正弦函数 $\arcsin t$ 的定义域是$|t|\leqslant 1$. 值域是$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

解： 要使函数有意义，必须使$\left|\frac{2}{x-2}\right|\leqslant 1$，即$|x-2|\geqslant 2$，由此得所求定义域是$(-\infty,0]\cup[4,+\infty)$.

由于$-\frac{\pi}{2}\leqslant \arcsin \frac{2}{x-2}\leqslant \frac{\pi}{2}$，所以$-1\leqslant \frac{2}{\pi}\arcsin \frac{2}{x-2}\leqslant 1$，注意到$\frac{2}{x-2}\neq 0$，因此$\frac{2}{\pi}\arcsin \frac{2}{x-2}\neq 0$，故所给函数的值域为$[-1,0)\cup(0,1]$.

总结： 函数的两个基本要素是定义域和对应规则，两个函数相同当且仅当它们的两个基本要素相同. 一般来说，给定一个函数，其定义域要预先给定，但是，对由解析表示式给出的初等函数，其定义域规定为使表示式中运算有意义的自变量取值全体，因此这种函数的定义域必须由表示式求出来. 求这些函数的定义域时要考虑到分数的分母不为零，负数不能开偶次方，负数和零没有对数，$[-1,1]$上的点才有反正弦和反余弦.

例 12 求函数 $y=\frac{2x+2}{x^2+2x+2}-\frac{1}{2}$的值域，并说明它是否为有界函数.

分析： 由 $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$，利用 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 可得

$$x^2+2x+2\geqslant 2(x+1).$$

解： 因为$\left|\frac{2x+2}{x^2+2x+2}\right|=\frac{2|(x+1)|}{(x+1)^2+1}\leqslant 1$，所以

$$-\frac{3}{2}\leqslant \frac{2x+2}{x^2+2x+2}-\frac{1}{2}\leqslant \frac{1}{2},$$

故 $\left[-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right]$为所给函数的值域. 由此知 $y=\frac{2x+2}{x^2+2x+2}-\frac{1}{2}$为有界函数.

例 13 下列函数中哪些为有界函数，哪些为无界函数，并加以证明：

(1) $f(x)=\frac{x^2+\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}$，$x\in(-\infty,+\infty)$；

(2) $f(x)=(\operatorname{sgn} x)\cdot \sin \frac{1}{x}$，$x\neq 0$；

(3) $f(x)=\frac{[x]}{x}, x>0$;

(4) $f(x)=x\cos x, x\in(-\infty,+\infty)$.

分析：利用有界函数的定义：存在两个常数 A,B 使得 $A\leqslant f(x)\leqslant B$ 对任何 $x\in D$ 均成立，则称 $f(x)$ 在 D 上有界. 此定义的等价定义是：若存在正数 M，使得 $|f(x)|\leqslant M$ 对任何 $x\in D$ 成立，则 $f(x)$ 在 D 上有界；否则，若对任何 $M>0$，有 $x_M\in D$ 使得 $|f(x_M)|>M$ 成立，则 $f(x)$ 在 D 上无界.

解：(1) 因为 $\frac{x^2+\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}=\frac{x^2}{2+x^2}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{1+(1+x^2)}$，又显然

$$0\leqslant\frac{x^2}{2+x^2}<1, 0<\frac{\sqrt{1+x^2}}{1+(1+x^2)}\leqslant\frac{\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2},$$

故对一切实数 x，有 $0<\frac{x^2+\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}<\frac{3}{2}$. 因而 $f(x)=\frac{x^2+\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界函数.

(2) 由于 $|\operatorname{sgn} x|\leqslant 1$，$\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$，因此

$$\left|(\operatorname{sgn} x)\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1.$$

故 $f(x)=(\operatorname{sgn} x)\sin\frac{1}{x}, x\neq 0$，是有界函数.

(3) 因为当 $x>0$ 时，$0\leqslant[x]\leqslant x$，所以

$$x>0 \text{ 时 } 0\leqslant\frac{[x]}{x}\leqslant 1.$$

故 $f(x)=\frac{[x]}{x}, x>0$，是有界函数.

(4) 因为若取 $x_k=2k\pi$（k 为任意正整数），则 $f(x_k)=2k\pi\cos 2k\pi=2k\pi$. 这样，对于任意大的正实数 M，只要 $k>\left[\frac{M}{2\pi}\right]$，总有 $f(x_k)=2k\pi>M$. 也就是说，不存在正数 M，使得 $|f(x)|=|x\cos x|\leqslant M$ 对一切实数 x 成立. 故 $f(x)=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是无界函数.

例 14 用单调函数的定义证明函数 $f(x)=\sqrt{4x-x^2}$ 在区间 $[2,4]$ 上为严格单减函数.

分析：只需证明对任意的 $x_1,x_2\in[2,4]$，若 $x_1<x_2$，则 $f(x_1)>f(x_2)$ 即可.

证明：任取 $x_1,x_2\in[2,4]$，且设 $x_1<x_2$，

$$f(x_1)-f(x_2)=\sqrt{4x_1-x_1^2}-\sqrt{4x_2-x_2^2}=\frac{(4x_1-x_1^2)-(4x_2-x_2^2)}{\sqrt{4x_1-x_1^2}+\sqrt{4x_2-x_2^2}}$$

$$=\frac{4(x_1-x_2)-(x_1^2-x_2^2)}{\sqrt{4x_1-x_1^2}+\sqrt{4x_2-x_2^2}}=\frac{(x_1-x_2)[4-(x_1+x_2)]}{\sqrt{4x_1-x_1^2}+\sqrt{4x_2-x_2^2}}.$$

因为 $2\leqslant x_1\leqslant 4, 2\leqslant x_2\leqslant 4, x_1<x_2$，所以

$$4<x_1+x_2<8, x_1-x_2<0, (x_1-x_2)(4-(x_1+x_2)]>0,$$

故 $f(x_1)-f(x_2)>0$ 亦即 $f(x_1)>f(x_2)$. 由定义知：$f(x)$在$[2,4]$上为严格单减函数.

例 15 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 (a,b) 内均为单增函数，用定义证明：$h_1(x)=\max\{f(x),g(x)\}$，$h_2(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ 在 (a,b) 内也均为单增函数. 其中 $\max\{f(x),g(x)\}$ 表示对任意给定的 $x\in(a,b)$，$f(x)$ 与 $g(x)$ 中的较大者；而 $\min\{f(x),g(x)\}$ 表示 $f(x)$ 与 $g(x)$ 中的较小者.

证明： 任取 $x_1,x_2\in(a,b)$，且设 $x_1<x_2$. 那么有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，$g(x_1)\leqslant g(x_2)$. 而

$$h_1(x_2)=\max\{f(x_2),g(x_2)\}\geqslant f(x_2)\geqslant f(x_1),$$
$$h_1(x_2)=\max\{f(x_2),g(x_2)\}\geqslant g(x_2)\geqslant g(x_1),$$

由此得到 $h_1(x_2)\geqslant\max\{f(x_1),g(x_1)\}=h_1(x_1)$.
故 $h_1(x)$ 为 (a,b) 上的单增函数.

对于 $h_2(x)$，由于 $h_2(x_1)\leqslant f(x_1)\leqslant f(x_2)$，$h_2(x_1)\leqslant g(x_1)\leqslant g(x_2)$，所以

$$h_2(x_1)\leqslant\min\{f(x_2),g(x_2)\}=h_2(x_2).$$

故 $h_2(x)$ 也为 (a,b) 上的单增函数.

例 16 证明：(1) $f(x)=\frac{x}{1+x}$ 在 $x\in(-1,+\infty)$ 是严格单增函数；

(2) 对任何实数 a,b，下面不等式成立：

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

分析： 注意到

$$\frac{x_1}{1+x_1}-\frac{x_2}{1+x_2}=\frac{x_1-x_2}{(1+x_1)(1+x_2)},$$

由此可证得 $f(x)=\frac{x}{1+x}$ 是 $(-1,+\infty)$ 内的严格单增函数. 利用 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$ 及(1)可以证明(2).

证明： (1) 设 $x_1,x_2\in(-1,+\infty)$，$x_1<x_2$，则

$$\frac{x_1}{1+x_1}-\frac{x_2}{1+x_2}=\frac{x_1-x_2}{(1+x_1)(1+x_2)}.$$

由于 $1+x_1>0$，$1+x_2>0$，$x_1-x_2<0$，因此 $\frac{x_1}{1+x_1}<\frac{x_2}{1+x_2}$. 由此可得 $f(x)=\frac{x}{1+x}$ 在 $x\in(-1,+\infty)$ 为严格单增.