College

高等学校经典教材配套辅导丛书

概率论与数理统计

辅导及习题精解

浙大三版

周华任 滕加俊 编著

- 名师执笔
- 精准解答
- 知识归纳
- 习题全解
- 经典考题

陕西师范大学出版社

责任编辑：史　进
装帧设计：王静婧

高等学校经典教材配套辅导丛书

西方经济学（微观部分）习题集
西方经济学（宏观部分）习题集
货币银行学习题集
高等代数辅导及习题精解
高等数学（同济五版）辅导及习题精解
线性代数（同济四版）辅导及习题精解
电子技术基础（模拟部分）辅导及习题精解
电子技术基础（数字部分）辅导及习题精解
电　　路（第四版）辅导及习题精解
电 工 学（第五版）电子技术辅导及习题精解
电 工 学（第五版）电工技术辅导及习题精解
理论力学（第六版）辅导及习题精解
材料力学（第四版）辅导及习题精解
物理化学（第四版）辅导及习题精解

概率论与数理统计（浙大三版）辅导及习题精解
微积分（同济二版）辅导及习题精解
离散数学辅导及习题精解
复变函数（西安交大版）辅导及习题精解
微积分（人大修订本）辅导及习题精解
线性代数（人大第三版）辅导及习题精解
概率论与数理统计（人大修订本）辅导及习题精解
物理学（第四版）习题全解
大学物理学习指导及典型题详解

ISBN 7-5613-3276-9
9 787561 332764 >

ISBN 7-5613-3276-9/O · 82
定价：18.00元

高等学校经典教材配套辅导丛书

概率论与数理统计

辅导及习题精解

(浙大三版)

周华任　滕加俊　编著

陕西师范大学出版社

图书代号:JF5N0053

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计(浙大三版)辅导及习题精解/周华任,滕加俊 编著.
—西安:陕西师范大学出版社,2005.2
(高等学校经典教材配套辅导丛书)

ISBN 7-5613-3276-9

Ⅰ.概… Ⅱ.①周…②滕… Ⅲ.①概率论—高等学校—教学参考资料 ②数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 007327 号

责任编辑 史 进
装帧设计 王静婧
出版发行 陕西师范大学出版社
社 址 西安市陕西师大 120#(邮政编码:710062)
网 址 http://www.snuph.com
经 销 新华书店
印 刷 南京人民印刷厂
开 本 850×1168 1/32
印 张 14.5
字 数 300 千
版 次 2005 年 3 月第 1 版
印 次 2005 年 3 月第 1 次印刷
定 价 18.00 元

开户行:光大银行西安南郊支行 账号:0303070—00330004695
读者购书、书店添货或发现印装问题,请与本社营销中心联系、调换。
电 话:(029)85307864 85233753 85251046(传真)
E-mail:if-centre@snuph.com

前　言

《概率论与数理统计》是一门重要的基础课程，也是大多数专业研究生入学考试必考课程，它在自然科学、社会科学、金融、经济学等各方面都有着广泛的应用。为了帮助广大学生扎实地掌握概率论与数理统计的精髓和解题技巧，提高解答各种题型的能力，我们根据浙江大学编写的《概率论与数理统计》(第三版)编写了本辅导教材。

本辅导教材由以下几个部分组成：

1. 概念、定理及公式：列出了各章的基本概念、重要定理和重要公式，突出了必须掌握或考试中出现概率较高的核心内容；

2. 重点难点解答：列出相应各章的重点、难点内容，并对重点、难点内容给出了相应的解释说明，以帮助广大同学对相应内容理解得更加透彻；

3. 课后习题全解：教材中课后习题丰富、层次多、许多基础性问题从各个角度帮助理解基本概念和基本理论，因此，我们对课后习题全部给出了详细的解答。

4. 考研试题精解：精选历年全国研究生入学考试试题中具有代表性的题目进行了详细的解答。这些题目涉及内容广、题型多、技巧性强，可以使广大同学举一反三，触类旁通开拓解题思路，更好地掌握微积分的基本内容和解题方法。

本教材由周华任、滕加俊、滕兴虎、吴红、汤光华、罗剑、宋桂安等同志编写，在本教材的策划、编写、审稿等方面得到了陕西师大出版社的大力支持和热情帮助，在此深表感谢。由于编者水平有限，加之时间仓促，书中不妥之处，敬请广大同行和读者批评指正。

编　者

2005 年 2 月 20 日

目　录

第一章　概率论的基本概念

【基本要求、重点与难点】

基本要求：

1. 熟悉了解样本空间、随机试验、随机事件等的概念.

2. 熟练掌握事件之间的关系和事件之间的运算.

3. 掌握概率的定义，会运用它的性质计算概率.

4. 掌握等可能概型，熟悉它的性质.

5. 弄懂条件概念的含义，掌握乘法定理、全概率公式和贝叶斯公式.

6. 掌握独立性的概念、并记住在这个条件相应的事件的运算法则.

重点：掌握概率的乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式.

难点：掌握计算有关事件概率的方法.

【主要概念及公式】

1. 样本空间：随机试验所有可能结果的集合.

2. 随机事件：样本空间的子集.

3. 频率：事件 A 发生次数与实验次数的比值.

4. 概率：设 E 是随机实验，S 是它的样本空间，对于 E 的每一事件 A 赋于一个实数，记为 $P(A)$，且满足非负性、规范性、可列可加性，称为事件 A 的概率.

5. 等可能概型：(1) 试验的样本空间只包含有限个元素.

(2) 试验中每个基本事件发生的可能性相同.

具有以上两个特点的试验称为等可能概型,也称为古典概型.

$$P(A)=\sum_{j=1}^{k}P\{e_j\}=\frac{k}{n}=\frac{A\text{包含的基本事件数}}{S\text{中基本事件的总数}}.$$

6. 条件概率:设 A、B 是两个事件,且 $P(A)>0$,称

$P(B/A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为在 A 发生条件下 B 发生的条件概率.

7. 独立性:A、B 为两个事件,如果满足等式 $P(AB)=P(A)P(B)$,则称 A、B 相互独立,简称 A、B 独立.

8. 事件关系.

(A、B) 事件相等:$A=B$;(A、B) 积事件:$A\cap B$;

(A、B) 和事件:$A\cup B$;(A、B) 差事件:$A-B$;

(A、B) 互不相容:$A\cap B=\varnothing$;A 与 B 互逆:$A\cup B=S$ 且 $A\cap B=\varnothing$.

9. 概率性质:

(1) $P(\varnothing)=0$

(2) $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$(相互独立)

(3) $P(B-A)=P(B)-P(A)$[条件为 $A\subset B$]

(4) $P(\overline{A})=1-P(A)$

(5) $P(A)\leqslant P(S)=1$

(6) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

10. 乘法定理:$P(AB)=P(B/A)\cdot P(A)$

11. 全概率公式:

$P(A)=P(A/B_1)P(B_1)+P(A/B_2)P(B_2)+\cdots+P(A/B_n)P(B_n)$

12. 贝叶斯公式

$$P(B_i/A)=\frac{P(A/B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A/B_j)P(B_j)}\ (i=1,\ 2\ \cdots\ n)$$

13. 加法公式

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

14. 随机实验

1° 可以在相同条件下重复进行.

2° 每次实验结果可能不止一个.

3° 进行一次实验不能确定哪一个结果会出现.

在概率论中具有以上三个特点的实验称为随机实验.

由一个样本点组成的单点集,称为基本事件,

每次试验中总是发生的,称为必然事件,

每次试验中都不会发生的,称为不可能事件.

15. 概率的三个性质:

1° 非负性:对于每一个事件 A,有 $P(A)\geqslant 0$

2° 规范性:对于必然事件 S,有 $P(S)=1$

3° 可列可加性:设 $A_1,A_2,\cdots$ 是两两互不相容的事件,即对于 $i\neq j,A_iA_j=\varnothing,i,j=1,2,\cdots$

则有 $P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots$

【重点、难点解答】

1. 计算条件概率 $P(B\mid A)$ 的方法有两种:

1) 按条件概率的定义,直接求出 $P(B\mid A)$,注意在求 $P(B\mid A)$ 时,已知 A 也发生,样本空间 S 中所有不属于 A 的样本点被排除,原有的样本空间 S 缩减为 $S'=A$. 在缩减了的样本空间 $S'=A$ 中计算事件 B 的概率就得到 $P(B\mid A)$.

2) 在 S 中计算 $P(AB)$ 及 $P(A)$,再由公式 $P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$

来求.

2. 事件的独立性是概率论中的一个重要的概念. 概率论与数理统计中的很多内容都是在独立的前提下讨论的. 在实际应用中,对于事件的独立性,往往不是根据定义来判断而是根据实际意义来加以判断. 根据实际背景判断事件的独立性,往往并不困难.

3. 使用全概率公式和贝叶斯公式,寻找完备事件组的两个常用方法:

1) 从第一个试验入手,分解其样本空间,找出完备事件组.

如果所求概率的事件与前后两个试验(两个工序)有关,且这两个试验(或工序)彼此关联,第一个试验(工序)的各种结果直接对第二个试验产生影响,而问第二个试验(工序)出现结果的概率. 这类问题是属于使用全概率公式的问题. 将第一个试验的样本区间分解成若干个互不相容的事件之和. 这些事件就是所求的一个完备事件组.

2) 从事件 B 发生的两两互不相容的诸原因找完备事件组.

如果事件 B 能且只能在"原因"$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 下发生,且 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容,那么这些"原因"$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 就是一个完备事件组.

4. 事件独立性在概率计算和证明中的应用.

应用独立性有助于简化概率计算,常用到以下 2 个命题.

1) 四对事件 A, B; $\overline{A}, B$; $A, \overline{B}$; $\overline{A}, \overline{B}$ 之中有一对相互独立.

则其余三对也相互独立,换言之,上面四对事件要么都相互独立,要么都不相互独立.

2) 设 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立,那么,若把其中任意 $k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 个事件相应地换成它们的对立事件. 则所得的 n 个事件仍然相互独立.

3) 有限个独立事件的积的概率等于这些事件的概率的乘积. 即

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

【课后习题全解】

1. 写出下列随机事件的样本空间

(1) 记录一个小班一次数学考试的平均分数(设以百分制记分).

(2) 生产产品直到有 10 件正品为止,记录生产产品的总件数.

(3) 对某工厂出厂的产品进行检查,合格的记上"正品",不合格的记上"次品",如连续查出 2 个次品就停止检查,或检查 4 个产品,停止检查,记录检查的结果.

(4) 在单位圆内任意取一点,记录它的坐标.

【解】 (1) $S=\left\{\frac{i}{n}\middle| i=0,1,\cdots,100n\right\}$,其中 n 为小班人数.

(2) $S=\{10,11,\cdots\}$.

(3) $S=\{00,100,0100,0110,1100,1010,1011,0111,1101,1110,1111,0101\}$,0 表示次品,1 表示正品.

(4) $S=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$.

2. 设 A,B,C 为三事件,用 A,B,C 的运算关系表示下列各事件.

(1) A 发生,B 与 C 不发生;

(2) A 与 B 都发生,而 C 不发生;

(3) A,B,C 中至少有一个发生;

(4) A,B,C 都发生;

(5) A,B,C 都不发生;

(6) A,B,C 中不多于一个发生;

(7) A,B,C 中不多于两个发生;

(8) A,B,C 中至少有两个发生.

【解】 (1) $A\overline{B}\,\overline{C}$

(2) $AB\,\overline{C}$

(3) $A\cup B\cup C$

(4) ABC

(5) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

(6) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\,\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}\,B\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}\,C$

(7) $\overline{ABC}$

(8) $AB\cup BC\cup AC$

3. 设A, B是两件事件且$P(A)=0.6$, $P(B)=0.7$.问:(1) 在什么条件下 $P(AB)$ 取得最大值,最大值是多少?(2) 在什么条件下 $P(AB)$ 取得最小值,最小值是多少?

【解】 (1) $\because P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$,$P(A)=0.6$,$P(B)=0.7$

$\therefore P(A)<P(B)\leqslant P(A\cup B)$

当 $A\subset B$ 时,$P(A\cup B)=P(B)$, $P(AB)$ 达到最大值,$P(AB)=P(A)=0.6$.

(2) 要使 $P(AB)$ 最小,$P(A\cup B)$ 应最大,则当 $A\cup B=S$ 时,$P(AB)$ 取到最小值,$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.7+0.8-1=0.3$.

4. 设A, B, C是三事件,且 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$, $P(AB)=P(BC)=0$, $P(AC)=\dfrac{1}{8}$,求A, B, C至少有一个发生的概率.

【解】 $\because 0\leqslant P(ABC)\leqslant P(BC)=0$.

$P(A\cup B\cup C)$

$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-0-\frac{1}{8}+0=\frac{5}{8}.$$

5. 在一标准英语字典中有 55 个由两个不同的字母所组成的单词,若从 26 个英文字母中任取两个字母予以排列,问能排列上述单词的概率是多少?

【解】 $P=\frac{55}{P_{26}^{2}}=\frac{11}{130}$

6. 在房间里有 10 个人,分别佩戴从 1 号到 10 号的纪念章,任选 3 人记录其纪念章的号码,(1) 求最小号码为 5 的概率;(2) 求最大的号码为 5 的概率.

【解】 (1) $$P=\frac{C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{12}$$

(2) $$P=\frac{C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{20}$$

7. 某油漆公司发出 17 桶油漆,其中白漆 10 桶,黑漆 4 桶,红漆 3 桶,在搬运中所有标签脱落,交货人随意将这些发给顾客,问一个订货 4 桶白漆,3 桶黑漆和 2 桶红漆的顾客,能按所订颜色如数得到订货的概率是多少?

【解】 $$P=\frac{C_{10}^4\cdot C_4^3\cdot C_3^2}{C_{17}^9}=\frac{252}{2431}$$

8. 在 1500 个产品中有 400 个次品,1100 个正品,任取 200 个,(1) 求恰有 90 个次品的概率;(2) 求至少有 2 个次品的概率.

【解】 (1) $$P=\frac{C_{400}^{90}\cdot C_{1100}^{110}}{C_{1500}^{200}}$$

(2) 设 $B=\{$至少有 2 个次品$\}$,则

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{C_{400}^{1}C_{1100}^{199}+C_{1100}^{200}}{C_{1500}^{200}}$$

9. 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只,这 4 只鞋子中至少有 2 只配成一双的概率是多少?

【解】 设 $A=\{4$ 只鞋中至少有 2 只配成一双$\}$，则 $\overline{A}=\{4$ 只鞋中没有 2 只能配成一双$\}$，$\overline{A}$ 的基本事件数可考虑从 5 双鞋中任取 4 双，再从每双中任取一只，有 $C_5^4 2^4$ 种取法，而总的事件数为从 10 只鞋中任取 4 只，有 C_{10}^4 种取法，则

$$P(\overline{A})=\frac{C_5^4\cdot 2^4}{C_{10}^4}=\frac{8}{21},$$

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{8}{21}=\frac{13}{21}$$

10. 在 11 张卡片上分别写上 Probabitity 这 11 个字母，从中任意连抽 7 张，求其排列结果为 abitity 的概率.

【解】 所有可能的排列构成样本空间，其中包含的样本点数为 P_{11}^7. 设 $A=\{$正确的排列$\}$，则 A 包含的样本点数为 $C_1^1\cdot C_2^1\cdot C_2^1\cdot C_1^1\cdot C_1^1\cdot C_1^1\cdot C_1^1=4$，则

$$P(A)=\frac{4}{P_{11}^7}=0.0000024$$

11. 将 3 个球随机地放入 4 个杯子中去，求杯子中球的最大个数分别为 1，2，3 的概率.

【解】 设 $X=\{$杯中球的最大个数$\}$，则

$$P(X=1)=\frac{4\times 3\times 2}{4\times 4\times 4}=\frac{3}{8}$$

$$P(X=2)=\frac{4\times 3\times 2+4\times 3}{4\times 4\times 4}=\frac{9}{16}$$

$$P(X=3)=\frac{4}{4\times 4\times 4}=\frac{1}{16}$$

12. 将 50 只铆钉随机地取来用在 10 个部件上，其中有 3 个铆钉强度太弱，每个部件用 3 个铆钉，若将 3 个强度太弱的铆钉都装在一个部件上，则这个部件强度就太弱，问发生一个部件强度太弱的概率是多少？

【解】 设 $A=\{$发生一个部件强度太弱$\}$，则 A 所含的样本点数