新理念

21世纪高等学校新理念教材建设工程

工程数学学习指导

辽宁工学院应用数学教研室 编

新理念

21世纪高等学校新理念教材建设工程

工程数学学习指导

辽宁工学院应用数学教研室 编

东北大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

工程数学学习指导 / 辽宁工学院应用数学教研室编 .— 沈阳 ：东北大学出版社，2004.8
（21 世纪高等学校新理念教材建设工程）
ISBN 7-81102-062-9

Ⅰ. 工… Ⅱ. 辽… Ⅲ. 工程数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 069092 号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部） 83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部） 83680265（社务室）
E-mail：neuph @ neupress.com
http：//www.neupress.com
印 刷 者：沈阳市光华印刷厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
幅面尺寸：184mm×260mm
印　　张：17.5
字　　数：448 千字
出版时间：2004 年 8 月第 1 版
印刷时间：2004 年 8 月第 1 次印刷
责任编辑：孟　颖
责任校对：李　莉
封面设计：唐敏智
责任出版：秦　力

定　　价：23.50 元

《工程数学学习指导》编写组成员名单

组　长　佟绍成

副组长　石月岩

组　员　王贺元　徐美进

　　　　徐洪香　刘秀娟

　　　　阚永志

前 言

线性代数、概率论与数理统计（通常合称为工程数学）是理工科高等院校普遍开设的两门重要的基础理论课，也是工学、经济学硕士研究生入学考试的必考科目.

作为初学者，在学习线性代数时，常感到内容抽象，对基本概念及定理结论感到较难理解，缺少解题的思路和方法；在学习概率论与数理统计时，常感到内容难懂，习题难做．为了解决上述问题，我们根据多年的教学实践经验，编写了这本辅导教材，以满足广大读者学习和复习的需要.

本书由两大部分组成：线性代数部分按照同济大学数学教研室编写的《线性代数》（第三版）的自然章编写；概率论与数理统计部分按照浙江大学编写的《概率论与数理统计》（第三版）的自然章编写.

全书共13章，每章由以下四项内容构成：

教学基本要求——使读者明确和掌握本章的教学重点、学习和考试的要求及应掌握的程度．编写中参考了《线性代数课程教学基本要求》、《概率论与数理统计课程教学基本要求》、《全国硕士研究生入学统一考试——数学考试大纲》.

内容提要——对相应章节的基本概念、基本理论和基本方法等主要内容进行叙述、归纳和总结，使读者对本部分的理论有一个整体的了解和掌握.

典型题解析——精选了线性代数、概率论与数理统计中具有代表性的典型例题，通过对典型例题的解析，归纳总结出一些解题方法和技巧，以使读者收到举一反三、触类旁通之效.

本章测验题及参考解答——根据相应章的教学基本要求，精选了适量的测验题，并附参考解答．读者可通过自测，检测自己的学习效果，以进一步巩固和加深对“三基”的理解和运用.

每部分最后都提供了一套模拟试题及参考解答，在书末附录中还提供了一套工程数学模拟试题及其参考解答.

本书的编者按篇章次序分别为：线性代数部分，第一、二章由阚永志编写，第三、四章由王贺元编写，第五章由石月岩编写，线性代数模拟试

题及参考解答由王贺元编写；概率论与数理统计部分，第六章由阚永志编写，第七、八章由徐洪香编写，第九、十章由刘秀娟编写，第十一、十二、十三章由徐美进编写，概率论与数理统计模拟试题及参考解答由徐洪香编写；附录由石月岩编写．本书由石月岩统稿，佟绍成教授主审．

本书在编写过程中得到了辽宁工学院数理科学系的领导及老师的大力支持和帮助，并得到辽宁工学院教材出版基金的资助，在此谨表示衷心的感谢．

限于编者水平，加之编写时间仓促，书中不妥和疏漏之处在所难免，敬请读者批评指正．

编　者

2004 年 6 月

目　录

第一部分　线性代数

第二部分　概率论与数理统计

第一部分　线性代数

第一章　行列式

第二章　矩阵及其运算

第三章　矩阵的初等变换与线性方程组

第四章　向量组的线性相关性

第五章　相似矩阵及二次型

原书空白页

□第一章 行列式

行列式来源于线性方程组，同时又是求解线性方程组的有力工具. 行列式在线性代数中有多方面的重要应用，如求逆矩阵、判断向量组的线性相关性、判断线性方程组解的情况、求矩阵的特征值、判断二次型的正定性等.

本章主要讨论两方面的内容：一是行列式的计算，这是本章的重点；二是行列式的应用——克莱姆(Cramer)法则——的应用. 本章的基础知识和基本理论包括二阶与三阶行列式，全排列及其逆序数，n 阶行列式的定义，对换，行列式的性质，行列式按行(列)展开和克莱姆法则.

一、教学基本要求

① 会用对角线法则计算二阶与三阶行列式.

② 理解 n 阶行列式的定义，会利用定义计算 n 阶行列式.

③ 熟练掌握行列式的性质，利用行列式的性质及按行或按列展开公式计算行列式.

④ 掌握克莱姆法则及其应用.

二、内容提要

(一) 二阶与三阶行列式

1. 二阶行列式

定义 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，则称 D 为**二阶行列式**. 其中 $a_{11}a_{22}$表示主对角线上两个元素之积，$a_{12}a_{21}$表示副对角线上两个元素之积.

2. 三阶行列式

定义
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},$$
则称 D 为**三阶行列式**.

注 二阶与三阶行列式定义可用对角线法则来记忆.

(二) 全排列及其逆序数

1. 全排列

定义 把 n 个不同的元素排成一列叫做这 n 个元素的**全排列**，简称**排列**.

2. 逆序数

① **逆序定义** 对于 n 个不同的元素，先规定各元素之间有一个标准次序，那么在这 n 个元素的任一排列中，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就说有一个**逆序**.

② **逆序数定义** 一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的**逆序数**.

③ **逆序数的计算方法** 设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 1，2，…，n 的任一排列，并规定由小到大为标准次序，考察元素 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$，如果比 p_i 大的且排在 p_i 前面的元素有 t_i 个，那么 p_i 的逆序数为 t_i；全体元素的逆序数之和 $t=\sum\limits_{i=1}^{n}t_i$ 即是这个排列的逆序数.

3. 排列的奇偶性

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**；逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

（三）n 阶行列式

1. **定义** $$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$ 则称 D 为 **n 阶行列式.**

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 1，2，…，n 的一个排列，t 为这个排列的逆序数. 由于这样的排列共有 $n!$ 个，故 n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和.

2. 特殊的行列式

(1) 对角行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,\quad \begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

(2) 三角形行列式

① 上三角形行列式 $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

② 下三角形行列式 $$\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

$$\begin{vmatrix} 0 & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \begin{sideset}{}{}\end{sideset}\cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

(3) 特殊分块三角行列式

设 $D_1=\det(a_{ij})$, $D_2=\det(b_{ij})$, 则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & c_{k1} & \cdots & c_{kn} \\ & & & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & 0 & & \vdots & & \vdots \\ & & & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = D_1D_2;$$

$$\begin{vmatrix} & & & a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ & 0 & & \vdots & & \vdots \\ & & & a_{k1} & \cdots & a_{kk} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} & a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & \cdots & c_{kn} & a_{k1} & \cdots & a_{kk} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{kn}D_1D_2.$$

(4) 范德蒙(Vandermonde)行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j).$$

(四) 对 换

定义 在排列中，将任意两个元素对调，其余的元素不动，这种作出新排列的过程叫做**对换**. 特别地，将相邻两个元素对换，叫做**相邻对换**.

定理 1 一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

定理 2 奇排列调成标准排列的对换次数为奇数，偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

定理 3 当 $n>1$ 时，n 级排列中奇排列与偶排列的个数各占一半，都是$\frac{n!}{2}$.

(五) 行列式的性质

① 行列式与它的转置行列式相等.

注 设 $D=\det(a_{ij})$，则 $D^{\mathrm{T}}=\det(a_{ji})$称为 D 的**转置行列式**.

② 互换行列式的两行(列)，行列式变号；特别地，若行列式有两行(列)完全相同，则此行列式等于零.

③ 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一个数 k，等于用数 k 乘此行列式. 因此，行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面. 特别地，若行列式的某一行(列)的元素均等于零，则该行列式等于零.

④ 行列式中如果有两行(列)元素成比例，则此行列式等于零.

⑤ 若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和，则此行列式可拆成两个行列式的和，这两个行列式分别以这两组数作为行(列)，其余各行(列)与原行列式相同.

⑥ 把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一个数，然后加到另一行(列)对应元素上去，行列式的值不变.

(六) 行列式按行(列)展开

① **代数余子式定义** 在 n 阶行列式中，把元素 a_{ij}所在的第 i 行和第 j 列划去后留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij}的**余子式**，记作 M_{ij}；称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$为元素 a_{ij}的**代数余子式**.

② **引理** 一个 n 阶行列式，如果其中第 i 行所有元素除 a_{ij}外都为零，那么此行列式等于 a_{ij}与它的代数余子式的乘积，即 $D=a_{ij}A_{ij}$.

③ **定理** 4(行列式按行(列)展开法则) 设 $D=\det(a_{ij})$，则

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

其中 A_{ij}表示元素 a_{ij}的代数余子式.

推论 $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\quad(i\neq j)$,

$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0\quad(i\neq j)$.

(七) 克莱姆法则

对于 n 个未知数 n 个线性方程的方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}\qquad(*)$$

如果系数行列式 $D=\det(a_{ij})\neq0$，则方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n=\frac{D_n}{D}.$$

其中 $D_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$是将系数行列式 D 中第 j 列元素用方程组右端的常数项代替，所得到的 n 阶行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1,j-1}&b_1&a_{1,j+1}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&\cdots&a_{2,j-1}&b_2&a_{2,j+1}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{n,j-1}&b_n&a_{n,j+1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

注 ① 当 $b_1=b_2=\cdots=b_n=0$ 时，称方程组$(*)$为**齐次线性方程组**. 否则，称$(*)$为**非齐次线性方程组**.

② 对于齐次线性方程组，有如下结论：

定理 5　如果齐次线性方程组的系数行列式 $D\neq 0$，则该方程组没有非零解，即只有唯一的零解.

定理 6　齐次线性方程组有非零解的充要条件是它的系数行列式等于零.

(八) 计算行列式的基本方法

① 三角化法　利用行列式的性质化行列式为上(下)三角形，从而直接求其值.

② 降阶法　利用行(列)展开法则，使其降阶，但在大多数情况下，往往利用行列式的性质把某一行(列)的非零元素尽量多地化为零，再按该行(列)展开.

③ 特殊方法　包括递推法，利用范德蒙行列式的结果和数学归纳法.

④ 其他方法　升阶法等.

三、典型题解析

(一) 填空题

【例 1】 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$ ________.

分析　由于该行列式的各行元素之和都为 x，所以将第 2，3，4 列各元素都加到第 1 列对应的元素上去，则可简化计算.

$$\text{原式}=\begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=x\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=x\cdot(-1)^{\frac{4(4-1)}{2}}\cdot x^3=x^4.$$

解　应填 $\underline{\quad x^4 \quad}$.

【例 2】　已知 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & 3 & 8 \\ -9 & 2 & 7 & -2 \end{vmatrix}$，则 $A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43}=$ ________.

分析　如果直接求第三列各元素的代数余子式 $A_{i3}(i=1, 2, 3, 4)$，则需要计算 4 个三阶行列式，计算量太大. 如果把 $A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43}$ 看作 $1\cdot A_{13}+1\cdot A_{23}+1\cdot A_{33}+1\cdot A_{43}$，则根据行列式按列展开公式，可转化为求下列行列式 D_1 的值

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & 1 & 8 \\ -9 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix},$$

即把已知行列式 D 的第三列元素都换成 1，而由行列式的性质即可看出 $D_1=0$.

另外，由于行列式 D 的第二列元素都为 2，其行列式某一列与另一列对应元素的代数余子式乘积之和等于零．因此

$$2A_{13}+2A_{23}+2A_{33}+2A_{43}=0,$$

从而

$$A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43}=0.$$

解 应填 <u>0</u>.

【例 3】 方程 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -3 & 9 & -27 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix}=0$ 的根为________.

分析 观察方程左端行列式中各列元素的特点，易知该行列式的转置行列式为四阶范德蒙行列式，因此该方程可化为

$$(2+1)(-3+1)(x+1)(-3-2)(x-2)(x+3)=0,$$

即

$$(x+3)(x+1)(x-2)=0,$$

由此解得 $x=-3$ 或 $x=-1$ 或 $x=2$.

解 应填 <u>$-3,\ -1,\ 2$</u>.

【例 4】 设 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$，则 $8A_{41}+27A_{42}+64A_{43}+125A_{44}=$________.

分析 显然本题并不是求行列式 D 的值，而若把 D 的第四行各元素分别换成 8，27，64，125，则根据行列式按行展开公式，所求的是下列行列式 D_1 的值

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix},$$

而 D_1 恰好为四阶范德蒙行列式，故 $D_1=(3-2)(4-2)(5-2)(4-3)(5-3)(5-4)=12$.

解 应填 <u>12</u>.

【例 5】 设行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$，则第四行各元素余子式之和为________.

分析 本题与例 2 本质不同在于所求的是 $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}$ 而不是 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$（$M_{ij}$ 为 a_{ij} 的余子式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式）．又根据 M_{ij} 与 A_{ij} 之间的关系，知

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}.$$

这样，再根据例 2 的分析思路，即可知所求的是下列行列式 D_1 的值

$$D_1=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=7\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=7\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-28.$$