高等专科学校金融类“九五”规划重点教材

微 积 分

主编：何泳贤

中国经济出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分/何泳贤主编．—北京:中国经济出版社,1998.5
高等专科学校金融类“九五”规划重点教材
ISBN 7-5017-4214-6

Ⅰ.微…　Ⅱ.何…　Ⅲ.微积分-高等学校:专科学校-教材　Ⅳ.0712

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 04063 号

责任编辑:鲁文霞

微积分

何泳贤　主编

*

中国经济出版社出版发行

(北京市百万庄北街 3 号)

邮编:100037

各地新华书店经销

中国人民警官大学印刷厂印刷

*

开本:850×1168 毫米　1/32　10.625 印张　264 千字

1998 年 5 月第 1 版　2001 年 7 月第 4 次印刷

印数:10001—13000

ISBN7—5017—4214—6/G·388

定价:16.50 元

编审说明

根据国务院和国家教委关于各部委要负责对口专业教材建设的规定，全国普通高校（本科、专科）金融类各专业的教材建设由中国人民银行归口管理。

中国人民银行根据国家教委的要求和全国高等专科学校的实际需要，制定了高等专科学校金融类“九五”重点建设教材规划。

其中的经济数学基础由三部分组成，它们是《微积分》、《线性代数与应用》、《概率论与数理统计》。

《微积分》是根据规划制定的教学大纲编写的，可供高校教学和干部培训以及自学之用。

〈经济应用数学基础〉不仅是高校本科经济类各专业的核心基础课，也是高等专科金融类各专业的重要基础课。《微积分》又是经济数学基础的基础。它的主要内容是一元微分法与积分法，对于二元微积分、无穷级数、微分方程、差分方程只作简介。极限是贯穿全书的主要研究工具，用以研究变量之间的各种变化关系与变化状态。微分法是求已知函数的变化率，而积分法是由函数的变化率求函数。本书主要的基本概念是：极限、连续函数、导数、不定积分、定积分；主要的基本运算是：求导数与求积分。

微积分在宏观与微观经济分析、金融经济管理中是一个有力的工具，例如边际分析、弹性分析、最优决策、经济预测、宏观经济控制等等。本教材加强了在经济上的应用，淡化几何上的应用。对于理论方面，根据必需、够用为度的原则，删去一些不必要的理论及某些定理的证明。在阐述概念、方法上，力求深入浅出，举一反

三。同时在内容取舍上也注意到与概率数理统计、金融统计、计算机应用、西方经济学等后继课的联系。

本教材前六章是金融高等专科学校各专业都必学的，而最后两章无穷级数与微分方程、差分方程简介是供计算机应用专业或其它专业以及不同的教学计划的需要编写的。

本书由何泳贤主编，杨惠琴、闫光杰副主编，全书由何泳贤总纂。

本书由华南师范大学数学系高仕安教授审稿。

编写分工：

广州金融高等专科学校何泳贤编写第一、八章；

广州金融高等专科学校夏建业编写第二章；

上海金融高等专科学校洪永成编写第三章；

长春金融高等专科学校闫光杰编写第四、五章；

保定金融高等专科学校杨惠琴编写第六、七章。

现经我们审定，本书可以作为教材出版，各单位在使用中有何意见和建议，请函告中国人民银行教育司教材处。

中国金融教材工作委员会

1997 年 12 月 16 日

目　　录

第一章　函数与极限

本章主要介绍变量之间的函数关系及函数的极限，极限是研究一个变量的变化对另一个变量所产生的影响，它是贯穿整个微积分学的重要工具．最后介绍一类用途广泛的函数——连续函数．

§1.1　函数

一、函数与表示

1．变量与关系

在经济领域中，存在着大量的数量关系，而这些数量很多都是变化的量．例如宏观经济方面的国民收入、投资额、储蓄额、税收额、货币需求量与供给量、利率等等，微观经济方面的商品的总成本、总收益、总利润、商品的需求量与供给量等等．其中储蓄额、投资额、税收额、货币需求量都是随着国民收入、利率变化而变化的，而国民收入又随着时间变化而变化，商品的总成本、收益、利润是随着市场的需求量变化而变化的，而商品的需求量与供给量又随着商品的价格变化而变化．众所周知的股票指数更是时刻在变化．可见，一个经济变量往往是依赖另一个或多个变量的变化而变化．请看下面几个实例：

例 1.1　已知银行存款年利率为 r，若把 P 元存入银行，则一年后的本与利息之和（简称本利和）为 $P(1+r)$，则两年后的本利和为

$$P(1+r)+P(1+r)r=P(1+r)^2.$$

如此类推，则经过 t 年后的本利和 A 为

$$A=P(1+r)^t.$$

这公式表达了本利和 A 与时间 t(单位:年)之间的关系．按此公式计算本利和，称为按复利计算的本利和．

例 1.2 根据某地区近七年国民经济统计数据，通过线性回归分析(在后面第六章 § 6.5 介绍)建立了该地区货币日常与临时需求 L 与国民收入 Y 之间的关系：

$$L=0.2545Y-904.2788.$$

例 1.3 某农业银行从 1991 年 1 月到 1996 年 3 月的存款额 S 列于下表：

表 1-1-1 (单位:万元)

月份t / S / 年份T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1991	4645	5028	4884	4826	4814	4942	5124	5357	5508	5997	7002	7078
1992	7401	7926	8775	7727	7694	7745	7775	7863	8245	9400	10722	11086
1993	11486	12170	12075	11972	11584	11509	11658	11730	11916	12477	13784	14180
1994	14575	15308	14848	14733	14672	14868	14935	14768	15293	16670	17034	17318
1995	17620	18602	18341	17883	17456	17382	17375	17375	17987	19393	20963	21961
1996	21598	22603	22563									

上表反映了该县存款额 S 是随着时间 t(年、月)变化而变化的．

例 1.4 下图是一个交易日的深圳股票成份指数(简称深成指数)分时图．以 y 表示深成指数，t 表示时间，由图可见，y 是时刻在变化的．

两个变量 x 与 y 之间的关系，可以用一个有序实数对的集合

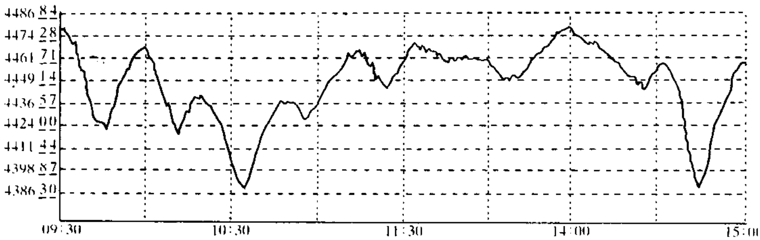

图 1-1-1

表示出来，把独立变化的量 x 排在前面，依赖于 x 变化而变化的量 y 排在后面，记为 (x,y)，则上述例子可分别表示为如下的有序实数对的集合：

$\{(t,A)\mid A=P(1+r)^t, t=0,1,2\cdots\}$,

$\{(Y,L)\mid L=0.2545Y-904.2788, y\geqslant 904.2788\}$,

$\{(t,S)\mid t,S$ 按表 1-1-1 所列数据取值$\}$,

$\{(t,y)\mid t,y$ 按图 1-1-1 取值$\}$.

反之，给出有序实数对 (x,y) 的一个集合，就给出了 x 与 y 的一个关系 .

注意：下面的变量与常量都是实数，R 是实数集，不再一一声明 .

2. 函数概念

我们熟识的 xoy 直角坐标平面上全体点之集合与全体有序实数对之集合

$$\{(x,y)\mid x\in R, y\in R\}$$

是一一对应的，因而，给定一个有序实数对集合必对应于平面上一个点集合．例如集合

(1) $\{(x,y) \mid y=3x, x\in R\}$，

(2) $\{(x,y) \mid y=x^2, x\in R\}$，

(3) $\{(x,y) \mid y\leqslant x, x\in R\}$

分别与下图 1-1-2(*a*)，(*b*)，(*c*)中的图象对应．

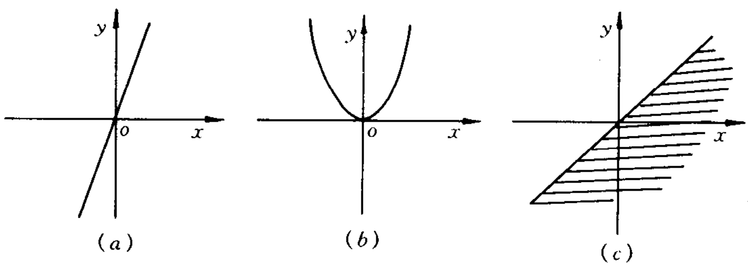

图 1-1-2

(1)、(2)两个集合给出 y 与 x 的关系有这样的特点：对于实数集合 R 中的每一个 x，由 $y=3x$ 或 $y=x^2$ 确定的数 y 有且仅有一个与之对应．而集合(3)就不具有这样的特点，对于 R 中的一个 x，满足 $y\leqslant x$ 的 y 有无穷多个．我们称前两个集合给出 y 与 x 的关系是函数关系．

定义 1.1 设一个非空实数集合 D，若对于 D 中每一个 x，由某关系 f 确定唯一一个数 y 与之对应，则称 y 是 x 的函数．记为

$$y=f(x).$$

把独立变化的量 x 称为自变量，把 y 称为因变量或函数值．自变量的取值范围称为函数的定义域，因变量的取值范围称为函数的

值域．

以 $D(f)$ 表示函数关系 f 的定义域，以 $Z(f)$ 表示函数关系 f 的值域，不同的函数关系以不同的英文字母表示，如 $f,g,h,\cdots$.

例如上面集合(1)与(2)给出 y 与 x 的关系是两个函数关系，即

$$y=f(x)=3x,y=g(x)=x^2.$$

这两个函数的定义域都为 R，值域分别为

$$\{y|y\in R\},\{y|y\geqslant 0\}.$$

而对于集合(3)给出的 y 与 x 的关系就不是函数关系．

例 1.5 设关系式 $y=\sqrt{1-x^2}$，对于数集 $\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$ 中的每一个 x，由这关系式可算出唯一的值 y，而对于数集 $\{x||x|>1\}$ 中的每一 x 都无意义，因此这关系式定义了一个 y 关于 x 的函数，其定义域为 $\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$，值域为 $\{y|0\leqslant y\leqslant 1\}$.

例 1.6 设关系式 $y=\sqrt{-1-x^2}$，由于对于任一实数 x，总有 $-1-x^2<0$，而负数开方无意义，因此这关系式不能定义一个函数．

例 1.7 关系式 $y=(x^2-1)/(x-1)$ 与关系式 $y=x+1$ 是否定义同一个函数，肯定不是．由于前者的定义域为 $\{x|x\in R$，且 $x\neq 1\}$，而后者的定义域为 $\{x|x\in R\}$，因此它们分别定义了两个不同的函数．前者只有当 $x\neq 1$ 时才能化为后者，而后者对任一实数 x 都有唯一一个值 y 与之对应．

注意：(1)给定一个 y 与 x 的关系式不一定是函数，如上面关系(3)及例 1.6.

(2)函数决定于对应关系 f 与定义域 $D(f)$ 两要素，两个函数相同当且仅当这两要素都相同．

(3)根据实际问题所建立的函数关系，其定义域由实际条件决定，请看下例．

例 1.8 设某产品日总成本 C(单位:百元)关于日产量 Q(单位:件)的函数关系为

$$C=150+7Q.$$

工厂日产量最大为 100 件,因此该函数的定义域为 $\{Q\mid 0\leqslant Q\leqslant 100\}$,对应的值域为 $\{C\mid 150\leqslant C\leqslant 850\}$.

函数关系如何表示,如上面例 1.5、1.7、1.8 都是由解析式表出,这种表示法称为公式法,还有用表格法、图象法表示的,后两种表示在经济工作中是大量使用的,如前面例 1.3、1.4.

3. 分段函数

例 1.9 我国邮局规定,国际信函重量在 20 克及 20 克以内,邮资为 4.40 元;20 克以上至 100 克,邮资为 10.40 元;100 克以上至 250 克,邮资为 20.80 元. 以 y 表示邮资,以 x 表示不超过 250 克的信函的重量(单位:克),则 y 关于 x 的函数 $f(x)$ 表示为

$$y=f(x)=\begin{cases}4.40 & 0<x\leqslant 20\\ 10.40 & 20<x\leqslant 100\\ 20.80 & 100<x\leqslant 250.\end{cases}$$

例 1.10 设银行活期存款月利率为 r_0,一年期定期存款年利率为 r_1. 某人存入 P 元,定期一年. 若他存满一年就取出,则得利息为 r_1P;若他提前取出,则利息只能按活期利息计算;若超过一年又不到两年时取出,则超过一年的那段时间的利息按活期利息计算. 以 A 表示存款的本利和(单位:元),以 t 表示存款时间(单位:月,以 30 天计算),于是 A 关于 t 的函数关系 $g(t)$ 表示为

$$A=g(t)=\begin{cases}P(1+r_0t) & 0<t<12\\ P(1+r_1) & t=12\\ P(1+r_1)[1+r_0(t-12)] & 12<t<24.\end{cases}$$

在我们的日常生活中,经常会遇到象上面 $f(x)$、$g(t)$ 那样表示的函数,我们称之为分段函数.

分段函数的特征是:函数的定义域 D 被分为若干个互不相交

的区间，在不同的区间或区间端点上，函数值由不同的解析表达式计算，我们称之为分段函数，称区间的端点为分界点．例如上面函数 $f(x)$，其定义域为区间

$$(0,250]=(0,20]\cup(20,100]\cup(100,250]$$

当$x\in(0,20]$时，函数值$f(x)=4.40$；当$x\in(20,100]$时，函数值$f(x)=10.40$；当 $x\in(100,250]$时，$f(x)=20.80$.

注意：虽然分段函数在定义域内不同的子区间上由不同的解析式计算，但它们是同一个函数关系 $y=f(x)$，切勿误解为是若干个不同的函数关系．因此，分段函数的表示一定要象上面 $f(x)$、$g(t)$那样，用大括号把几个不同的解析式括起来．另一方面，若给定一个分段函数的表示式，则它的定义域是各子区间之并集．例如，设函数

$$y=f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x^2 & 0\leqslant x<1\\ 1 & x\geqslant 1,\end{cases}$$

则此分段函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup[0,1)\cup[1,+\infty)=(-\infty,+\infty)$.

二、基本初等函数

下面我们把大家在中学学过的函数归纳为六类，称之为基本初等函数：

1. 常量函数 $y=c$，c 为常数，定义域为$(-\infty,+\infty)$.

有时在某个具体问题中，常量函数只定义在某个有限区间上．

2. 幂函数 $y=x^a$（a 为常数），其定义域因指数 a 之值而异．例如 a 为正整数，则定义域为$(-\infty,+\infty)$；$a=1/2$，则定义域为$[0,+\infty)$.

3. 指数函数 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$），其定义域为$(-\infty,+\infty)$，

值域为$(0,+\infty)$．当 $a>1$ 时，函数单调增加；当 $0<a<1$ 时，函数单调减少．

下面我们经常会遇到以无理数 $e=2.71828\cdots$ 为底的指数函数 $y=e^x$，其中数 e 将在§1.3 内介绍．

4．对数函数 $y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$，其定义域为$(0,+\infty)$，值域为$(-\infty,+\infty)$．当 $a>1$ 时，函数单调增加；当 $0<a<1$ 时，函数单调减少．与指数函数 $y=a^x$ 互为反函数．

以数 e 为底的对数函数 $y=\log_e x$，又记为 $y=\ln x$，称为自然对数，它是 $y=e^x$ 的反函数．

5．三角函数

正弦函数 $y=\sin x$ 与余弦函数 $y=\cos x$ 的定义域都为$(-\infty,+\infty)$，值域都为区间$[-1,+1]$.

正切函数 $y=\mathrm{tg}x$ 的定义域为$\{x|x\in R$ 且 $x\neq(k+1/2)\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$，值域为$(-\infty,+\infty)$；余切函数 $y=\mathrm{ctg}x$ 的定义域为$\{x|x\in R$ 且 $x\neq k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$，值域为$(-\infty,+\infty)$.

正割函数 $y=\sec x$ 与余割函数 $y=\csc x$ 的定义域及值域留给读者自己复习．

6．反三角函数

反正弦函数 $y=\arcsin x$ 与反余弦函数 $y=\arccos x$ 的定义域都为$[-1,1]$，值域分别为$[-\pi/2,\pi/2]$与$[0,\pi]$.

反正切函数 $y=\mathrm{arctg}x$ 与反余切函数 $y=\mathrm{arcctg}x$ 的定义域都为$(-\infty,+\infty)$，值域分别为$(-\pi/2,\pi/2)$与$(0,\pi)$.

上述各类函数的图象及基本性质请参阅附录 4 的图表．

三、复合函数与初等函数

1．复合函数

例 1.11 设函数 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=4-x^2$，若以后式代以前式中的 u，得 $y=\sqrt{4-x^2}$，此关系式对于区间$[-2,2]$的每一个 x 能确

定唯一 y 值与之对应，因此它定义了一个函数，我们称它为函数 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=4-x^2$ 的复合函数．

例 1.12 设函数 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=-4-x^2$，若以后式代以前式中的 u，得 $y=\sqrt{-4-x^2}$，此关系式对于每一实数 x 都无意义，因此它不能定义一个函数．

为什么会有两种截然不同的结果呢？分析如下：对于例 1.11，函数 $y=\sqrt{u}$ 的定义域为 $\{u|u\geqslant 0\}$，函数 $u=4-x^2$ 的值域为 $\{u|-\infty<u\leqslant 4\}$，这两个 u 的集合的交集为 $\{u|0\leqslant u\leqslant 4\}$，是非空集合；而对于例 1.12，函数 $u=-4-x^2$ 的值域为 $\{u|-\infty<u\leqslant -4\}$，此集合与 $y=\sqrt{u}$ 的定义域 $\{u|u\geqslant 0\}$ 的交集是空集．

定义 1.2 设函数 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$，若函数 $g(x)$ 的值域 $Z(g)$ 与函数 $f(u)$ 的定义域 $D(f)$ 的交集是非空集，则称函数 $y=f[g(x)]$ 是 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 的复合函数，其中 x 为自变量，u 为中间变量，y 为函数值．

例 1.13 设函数 $y=\lg u$，$u=1-x^2$，它们能否复合？

解 由于 $u=1-x^2$ 的值域为 $\{u|-\infty<u\leqslant 1\}$，而 $y=\lg u$ 的定义域为 $\{u|0<u<+\infty\}$，则这两集合的交集为区间 $(0,1]$，因此 $y=\lg(1-x^2)$ 是 $y=\lg x$ 与 $u=1-x^2$ 的复合函数，其定义域为 $\{x|-1<x<1\}$.

函数的复合关系还可以推广到多于两个以上的有限个函数的复合，例如函数

$$y=f(u)\qquad u=g(v)\qquad v=h(x).$$

若 $y=f\{g[h(x)]\}$ 是函数关系，则在它定义域内是上面三个函数的复合函数．

理解复合函数的概念后，更重要是掌握复合函数的分解．我们通常遇到的函数关系很多是由若干个基本初等函数复合而成的，而下一章微分法须要把一个较复杂的函数关系分解为若干个

基本初等函数．

例 1.14 分解复合函数 $y=e^{\sin x}$.

解 令 $u=\sin x$，于是 $y=e^u$，则函数 $y=e^{\sin x}$ 是函数 $y=e^u$ 与 $u=\sin x$ 的复合．

例 1.15 分解复合函数 $y=\lg^2(1-x)$.

解 令 $v=1-x$，$u=\lg v$，于是 $y=u^2$，则所给函数是 $y=u^2$，$u=\lg v$，$v=1-x$ 这三个基本初等函数的复合．

注意：

(1)上面对复合函数的分解是在其定义域内进行．

(2)分解的关键是适当引进中间变量，如何分析一个函数是由哪几个基本初等函数复合而成的，可以从最先一层函数运算开始引进中间变量，上面两例就是如此；也可以从最后一层函数运算开始引进，如例 1.15 的函数，最后一层运算是平方运算，中间一层运算是对数运算，先令 $y=u^2$，再令 $u=\lg v$，于是 $v=1-x$.

(3)如果分解到某一层函数运算是多项式，例如 $1\pm x$；$1+x^2$；x^2-3x+1，可以不再分解．

2. 初等函数

所谓初等函数，是由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合而构成的，且用一个解析表达式表示的函数．

例如函数 $y=\sqrt{4-x^2}$，$y=\lg(1-x^2)$ 及 $y=\dfrac{x+e^x}{\ln(1+x)}$ 都是初等函数，后面遇到的函数大多数是初等函数．而分段函数很多是不能用一个解析表达式表出，因此不是初等函数，但也有例外：

例 1.16 设函数

$$y=|x|=\begin{cases}-x & x<0\\ x & x\geqslant 0,\end{cases}$$

由于它又可以改写为 $y=|x|=\sqrt{x^2}$，因此它是初等函数．