全日制普通高级中学教科书（选修）同步辅导

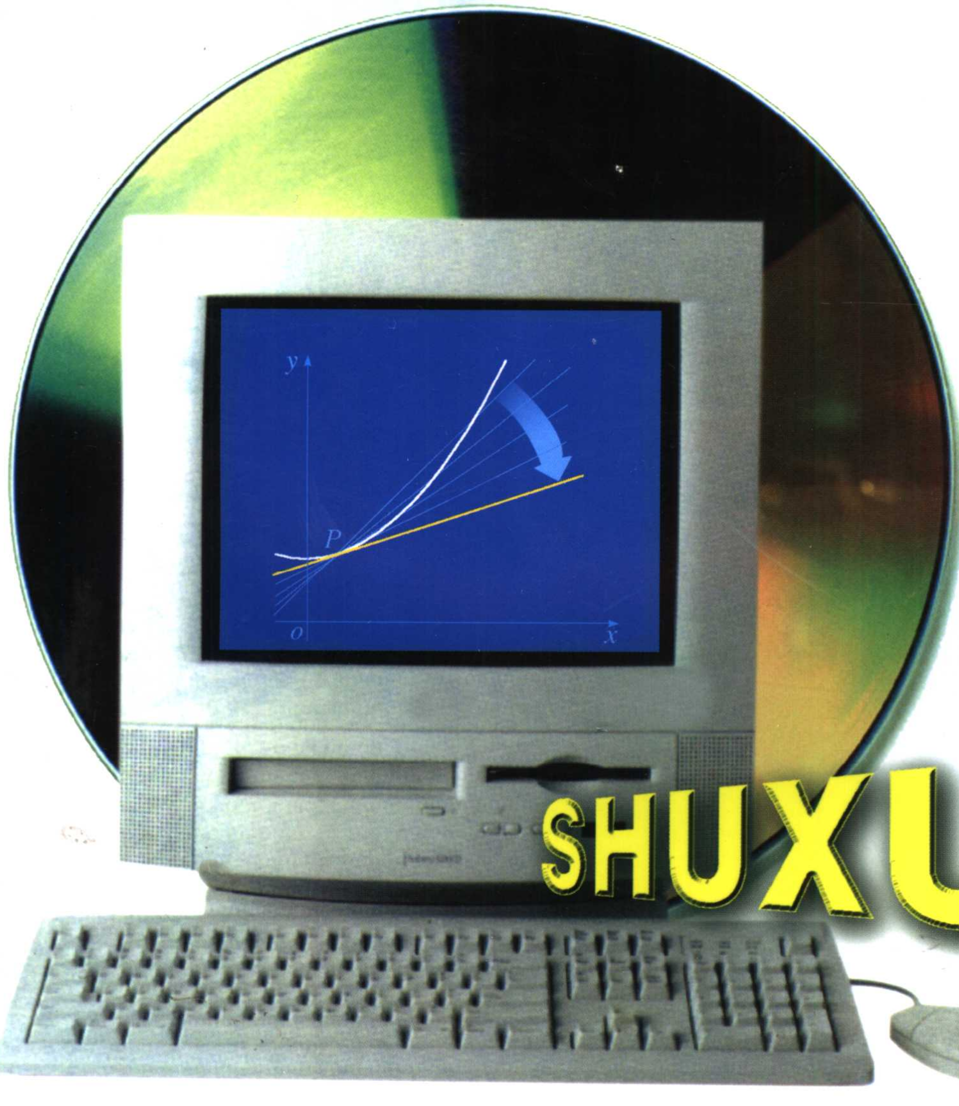
能力培养与测试

修订版

高三数学

全一册

人民教育出版社　组编



SHUXUE

人民教育出版社

能力培养与测试

高一 数学

第一册

全日制普通高级中学教科书（选修）同步辅导

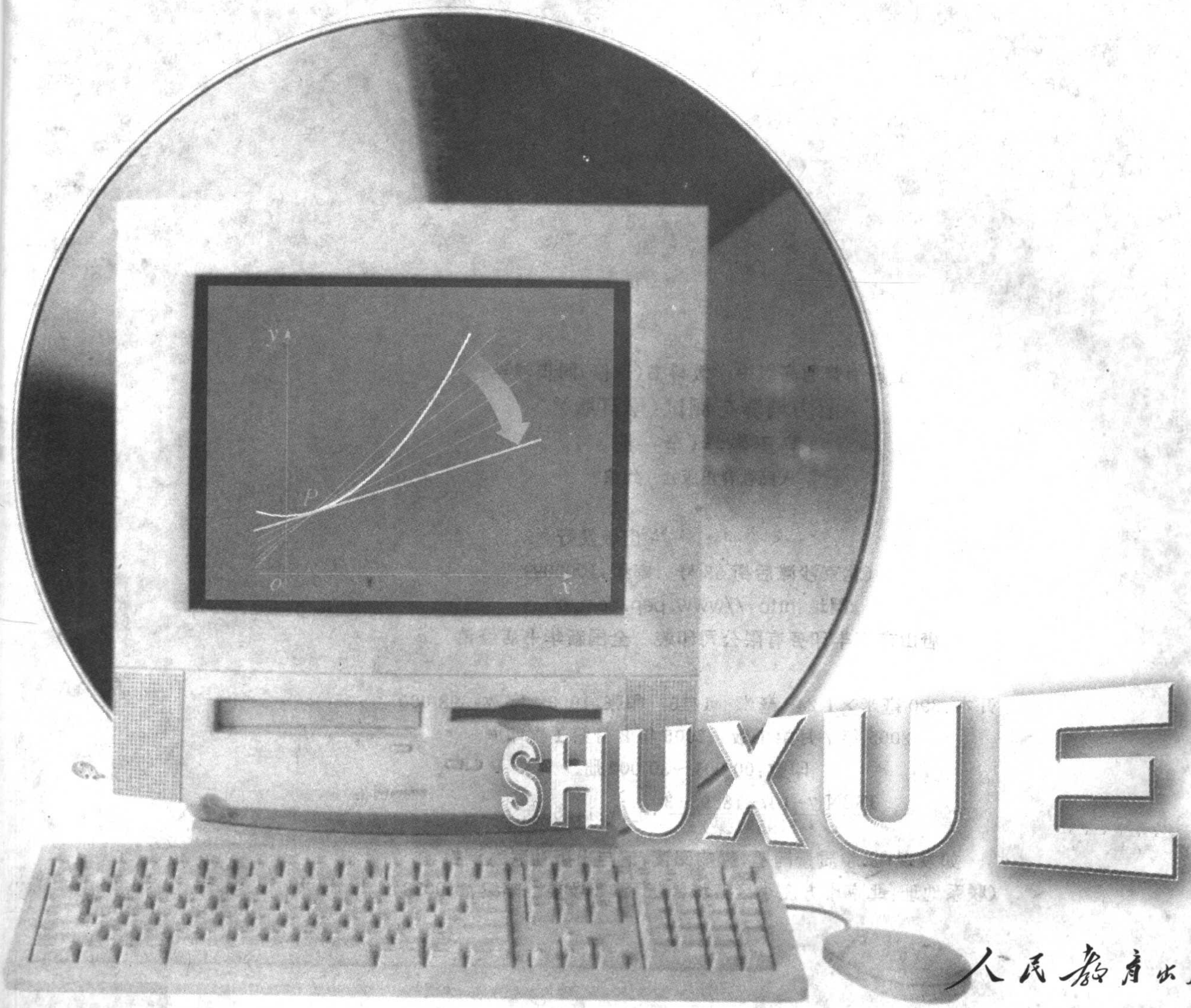
能力培养与测试

修订版

高 三 数 学

全一册

人民教育出版社　组编



人民教育出版社

全日制普通高级中学教科书(选修)同步辅导
能力培养与测试(修订版)
高三数学(全一册)
人民教育出版社 组编
*
人民教育出版社 出版发行
(北京沙滩后街55号 邮编:100009)
网址:http://www.pep.com.cn
唐山市润丰印务有限公司印装 全国新华书店经销
*
开本:890毫米×1 240毫米 1/16 印张:10.5 字数:398 000
2005年7月第1版 2005年8月第1次印刷
印数:00 001～30 000册
ISBN 7-107-18893-3
G·11983(课) 定价:14.60元

编写说明

1996年，原国家教委基础教育司制订并印发了《全日制普通高级中学课程计划（试验)》和供试验用的全日制普通高级中学语文、数学、外语（英、日、俄)、物理、化学、生物、历史、地理、政治等9个学科的教学大纲。同年，人民教育出版社接受原国家教委的委托，根据各学科教学大纲，编写了全日制普通高级中学试验教材。这套教材于1997年出版并开始在江西、山西、天津进行试验。经过试验，这套课程方案和教材受到了专家的肯定和广泛的好评。2000年，人民教育出版社又根据教育部修订后的各科教学大纲对这套教材进行了修订。同时，为了更好地配合这套教材的推广使用，人民教育出版社约请了国内部分一线教师，组织编写了一套与人教版各科全日制普通高级中学教科书（试验修订本）配套的同步辅导读物。2002年，全日制普通高级中学语文、数学、物理、化学、生物、历史、地理等学科教学大纲经再一次修订后正式印发。人民教育出版社组编的《能力培养与测试》这套丛书也根据各科教学大纲的变化和教材的修订不断地进行着调整和修订。经过几年的使用，根据使用中的反馈意见和课程改革的发展情况，2005年，人民教育出版社再次组织力量对这套丛书进行了修订，希望这套丛书更加贴近学生的实际需要，能够有效提高学生自主学习的能力和运用所学知识分析问题、解决问题的能力。

编者

2005年7月

目录 CONTENTS

第一章 概率与统计

1.1 离散型随机变量的分布列

课前高效准备

学习目标导航

1. 了解随机变量、离散型随机变量的概念和意义.

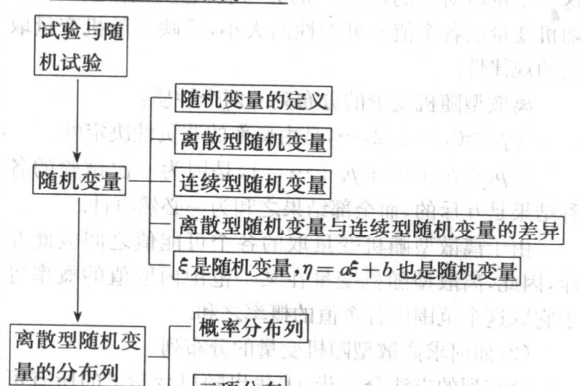
2. 会应用学过的排列、组合与概率知识，求某些简单的离散型随机变量的分布列.

3. 理解离散型随机变量的分布列的性质及应用.

4. 掌握二项分布的简单识别和计算.

高效预习反馈

■1. 本节知识结构



■2. 本节知识达标

①一个试验若是满足以下三个条件：a.________、b.________、c.________，就称这样的试验是随机试验.

②若ξ是随机变量，$\eta=a\xi+b$，其中a,b是常数，则η是________.

③随机变量分布列的性质为：a.________，b.________.

④如果在一次试验中某事件发生的概率是P，那么在n次独立重复试验中这个事件恰好发生k次的概率是________，其中$k=0,1,\cdots,n$，$q=1-p$，于是得到随机变量ξ的概率分布如下：

ξ	0	1	…	k	…	n
P	$C_n^0p^0q^n$	$C_n^1p^1q^{n-1}$	…	$C_n^kp^kq^{n-k}$	…	$C_n^np^nq^0$

上面的随机变量ξ服从________，记作$\xi\sim B(n,p)$.

课堂高效探究

重难点高效突破

■1. 随机变量的有关概念

理解试验与随机试验、随机变量、离散型随机变量及连续型随机变量的概念.

(1)试验与随机试验

凡是对现象的观察或为此而进行的实验，都称之为试验，一个试验如果满足下述条件：

①试验可以在相同的情形下重复进行；

②试验的所有可能结果是明确可知的，并且不止一个；

③每次试验总是恰好出现这些结果中的一个，但在一次试验之前却不能肯定这次试验会出现哪一个结果.

它就被称为一个随机试验.

例1 判断下面问题是否构成随机试验.

①京哈T17次特快车到达哈尔滨站是否正点.

②1976年辽宁海城地震.

解：①是随机试验. 因为它满足随机试验的三个条件：即在相同的情况下可重复进行(每天一次)；所有可能的结果是明确的(正点或误点)；试验之前不能肯定会出现哪种结果.

②不是随机试验. 因为它不可重复进行.

(2)随机变量

①随机变量的定义：

如果随机试验的结果可以用一个变量来表示，那么这样的变量叫做随机变量，随机变量常用希腊字母ξ,η等表示.

例2 检验所取的3件产品中所含的次品数η就是一个随机变量：

$\eta=0$表示含0个次品，$\eta=1$表示含一个次品，$\eta=2$表示含2个次品，$\eta=3$表示含3个次品.

思维突破:①随机变量是将随机试验的结果数量化.

②随机变量的取值对应于随机试验的某一随机事件.如:"掷一枚骰子"这一随机试验中所得点数是一随机变量 ξ,随机变量 $\xi=2$,即对应随机事件:"掷一枚骰子,出现2点";而"$\xi=3$ 或 $\xi=4$",即对应随机事件:"掷一枚骰子出现3点或4点".

③随机变量作为一个变量,当然有它的取值范围,这和以前学过的变量一样,不仅如此,还有它取每个值的可能性的大小.如:从装有无差别的6只黑球、4只白球的袋中,随机抽出3只球,所得的白球个数是一个随机变量 ξ,其取值 $\xi=0,1,2,3$;而取每个值的可能性的大小,可通过其相应的随机事件发生的可能性的大小——即其概率来反映.即:若"$\xi=2$",对应事件 A_2:"取出的3只球中恰有两只白球",其概率:$P(A_2)=\frac{C_6^1C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{3}{10}$.若"$\xi=3$"对应事件 A_3:"取出的3只球中恰有3只白球",其概率 $P(A_3)=\frac{C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{30}$.所以随机变量 $\xi=2$ 的可能性大小为$\frac{3}{10}$,而 $\xi=3$ 的可能性大小为$\frac{1}{30}$.

综上,随机变量 ξ 不仅有它的取值范围$\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$而且还有取每个值的可能性大小——概率.$P(\xi=x_i)i=1,2,\cdots,n,\cdots$.这是与通常的变量所不同的.

④随机变量 ξ 取每一个值 x_i 的概率 $P(\xi=x_i)$等于其相应的随机事件 A_i 发生的概率 $P(A_i)$.

②离散型随机变量

如果对于随机变量可能取的值,可以按一定次序一一列出,这样的随机变量叫做离散型随机变量.

③连续型随机变量

如果随机变量可以取某一区间的一切值,这样的随机变量叫做连续型随机变量.

思维突破:离散型随机变量和连续型随机变量的联系与区别:离散型随机变量和连续型随机变量都是用来刻画随机试验所出现的结果的.但二者之间又有着根本的区别:对于离散型随机变量而言,它所可能取的值为有限个或至多可列个,或者说能将它的可取值按一定次序一一列出.而连续型随机变量可取某一区间的一切值,我们无法对其中的值一一列举.

(3)若 ξ 是一个随机变量,a,b 是常数,则$\eta=a\xi+b$也是一个随机变量.

一般地,若 ξ 是随机变量,$f(x)$是连续函数或单调函数,则 $f(\xi)$也是随机变量.也就是说,随机变量的某些函数也是随机变量.

可见,随机变量与函数是有一定联系的.所谓随机变量,实际上是用变量对试验结果的一种刻画,是试验结果(即样本点)和实数之间的一个对应关系,这与函数概念本质上是相同的,只不过在函数概念中,函数 $f(x)$的自变量是实数 x,而在随机变量的概念中,随机变量的自变量是试验结果(样本点).

例3 ①某机场侯机室中一天的游客数量为 ξ;②某网站一天内收到的上网次数为 ξ;③某水文站观察到一天中长江的水位为 ξ;④某立交桥一天经过的车辆数为 ξ,则是离散型随机变量的是(　　),是连续型随机变量的是(　　).

A.①中的 ξ　　B.②中的 ξ

C.③中的 ξ　　D.④中的 ξ

解析:①②④中的随机变量 ξ 可能取的值,我们都可以按一定次序一一列出,因此,它们都是离散型随机变量;③中的 ξ 可以取某一区间内的一切值,无法按一定次序一一列出,故 ξ 不是离散型随机变量,而是连续型随机变量.
∴ 应选ABD,C.

2. 离散型随机变量的分布列

(1)定义

设离散型随机变量 ξ 可能的取值为:$x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots$,$\xi$取每一个值$x_i(i=1,2,\cdots)$的概率$P(\xi=x_i)=p_i$,则

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$

称为随机变量 ξ 的概率分布,简称 ξ 的分布列.

(2)离散型随机变量的分布列具有下述两个性质

①$p_i\geqslant0,i=1,2,\cdots$;

②$p_1+p_2+\cdots+p_i+\cdots=1$.

一般地,离散型随机变量在某一范围内取值的概率等于它取这个范围内各个值的概率之和.

思维突破:(1)理解和认识离散型随机变量的分布列及其性质

离散型随机变量 ξ 的分布列指的就是随机变量 ξ 与这一变量所对应的概率 P 的分布表,它从整体上反映了随机变量取各个值的可能性的大小,反映了随机变量取值的规律性.

离散型随机变量的分布列的两个性质:

①$p_i\geqslant0,i=1,2,\cdots$,是由概率的非负性决定的.

②$p_1+p_2+\cdots+p_i+\cdots=1$,是因为一次试验的各种结果是互斥的,而全部结果之和为一必然事件.

由于离散型随机变量取的各个可能值之间彼此互斥,因此,离散型随机变量在某一范围内取值的概率等于它取这个范围内各个值的概率之和.

(2)如何求离散型随机变量的分布列

分布列的求法分三步:①找出随机变量 ξ 的所有可能值 x_i;②求出各取值的概率 $P(\xi=x_i)=p_i$;③画出表格.

求随机变量的分布列,关键是概率的计算,如等可能事件的概率、互斥事件的概率、相互独立事件同时发生的概率、n 次独立重复试验有 k 次发生的概率等,特别地,二项分布是一种常见的重要的离散型随机变量的分布列,其概率$P(\xi=k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$,$(k=0,1,2,\cdots,n)$就是 n 次独立重复试验中事件发生 k 次的概率.

例4 设随机变量的分布列 $P\left(\xi=\frac{k}{5}\right)=ak(k=1,2,3,4,5)$.

(1)求常数 a 的值;(2)求 $P\left(\frac{1}{10}<\xi<\frac{7}{10}\right)$.

解:随机变量的分布列为:

ξ	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1
P	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$

(1)由 $p_1+p_2+p_3+p_4+p_5=1$,得 $a=\frac{1}{15}$.

(2)因为$\frac{1}{10}<\xi<\frac{7}{10}$,只有 $\xi=\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5}$ 时满足,故 $P\left(\frac{1}{10}<\xi<\frac{7}{10}\right)=P\left(\xi=\frac{1}{5}\right)+P\left(\xi=\frac{2}{5}\right)+P\left(\xi=\frac{3}{5}\right)=\frac{1}{15}+\frac{2}{15}+\frac{3}{15}=\frac{2}{5}$.

解题技巧规律总结:随机变量并不一定取整数值,它的取值一般来源于实际问题,且有其特定含义.此题中的 ξ 在$\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5}$,1 中取值.

3. 几种常用的分布列及其求法

(1)单点分布:随机变量 ξ 只取一个值,它的分布列为 $P(\xi=a)=1$.

(2)两点分布:随机变量 ξ 只取两个值,它的分布列为:

ξ	x_1	x_2
P	p	$1-p$

(3)二项分布:如果在一次试验中某事件发生的概率是 p,那么在 n 次独立重复试验中这个事件恰好发生了 k 次的概率是 $P(\xi=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$(其中 $k=0,1,\cdots,n,q=1-p$),于是得到随机变量 ξ 的概率分布如下:

ξ	0	1	…	k	…	n
P	$C_n^0p^0q^n$	$C_n^1p^1q^{n-1}$	…	$C_n^kp^kq^{n-k}$	…	$C_n^np^nq^0$

我们称这样的随机变量 ξ 服从二项分布,记作 $\xi\sim B(n,p)$,其中 n,p 为参数,并记

$$C_n^kp^kq^{n-k}=b(k;n,p).$$

思维突破:二项分布实际是对 n 次独立重复试验从概率分布的角度作出的阐述,判断二项分布,关键是看某一事件是否是进行 n 次独立重复实验,且每次试验只有两种结果,如果不满足这两条,随机变量就不服从二项分布.当随机变量的总体很大且抽取的样本容量相对于总体来说又比较小,而每次抽取时只有两种试验结果,此时可以把它看作独立重复试验,利用二项分布求其分布列.

例 5 某小组有 10 台各为 7.5 千瓦的机床,如果每台机床的使用情况是互相独立的,且每台机床平均每小时开动 12 分钟,问全部机床用电超过 48 千瓦的可能性有多大?

解:由于每台机床正在工作的概率为$\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$,而且每台机床有"工作"与"不工作"两种情况,故每一时刻正在工作的机床台数 ξ 服从二项分布,即 $\xi\sim B\left(10,\frac{1}{5}\right)$.

$$P(\xi=k)=C_{10}^k\left(\frac{1}{5}\right)^k\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{10-k}(k=0,1,2,\cdots,10).$$

据题意,48 千瓦可供 6 台机床同时工作,用电超过 48 千瓦,即意味着有 7 台或 7 台以上的机床在工作,这一事件的概率为 $P(\xi\geqslant7)=P(\xi=7)+P(\xi=8)+P(\xi=9)+P(\xi=10)=C_{10}^7\left(\frac{1}{5}\right)^7\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^3+C_{10}^8\left(\frac{1}{5}\right)^8\left(\frac{4}{5}\right)^2+C_{10}^9\left(\frac{1}{5}\right)^9\left(\frac{4}{5}\right)+C_{10}^{10}\left(\frac{1}{5}\right)^{10}\left(\frac{4}{5}\right)^0\approx\frac{1}{1\,157}$.

因此,用电量超过 48 千瓦的可能性是很小的,据此,可以选择适当的供电设备,做到既保证供电而又合理节约用电.

解题规律技巧总结:一般地,如果所考虑的试验可以看做是一个只有两种结果 A 和 $\overline{A}$ 的试验的 n 次独立重复,则 n 次试验中 A 发生的次数 ξ 服从二项分布.

(4)几何分布:在独立重复试验中,某事件第一次发生时所作试验次数 ξ 是一个取值为正整数的离散型随机变量."$\xi=k$"表示在第 k 次独立重复试验时,事件第一次发生.如果把第 k 次试验时事件 A 发生记为 A_k、事件 A 不发生记为 $\overline{A}_k$,$P(A_k)=p$,$P(\overline{A}_k)=q$,那么

$$P(\xi=k)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{k-1}A_k),$$

根据相互独立事件的概率乘法公式,

$$P(\xi=k)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_{k-1})P(A_k)=q^{k-1}p(k=1,2,3,\cdots),$$

于是得到随机变量 ξ 的概率分布

ξ	1	2	3	…	k	…
P	p	qp	q^2p	…	$q^{k-1}p$	…

.

我们称 ξ 服从几何分布.

例 6 已知妇女色盲占妇女总人数的0.25%,试求:为使发现一例患色盲的概率不小于 0.90,至少需要对多少妇女的辨色力进行检查?

解:以 ξ 表示恰好发现一例患色盲者所需检查的妇女人数,那么这一随机变量服从几何分布,其参数 $p=0.25\%$.依题意,即求满足条件 $P(\xi\leqslant n)\geqslant0.90$ 的 n.

而 $P(\xi\leqslant n)=\sum\limits_{m=1}^{n}p(1-p)^{m-1}=1-(1-p)^n$,

即 $1-(1-p)^n\geqslant0.90$.

有 $n\geqslant\frac{\lg 0.10}{\lg 0.997\,5}=919.882\,3$,于是可以判定,至少要检查 920 个妇女才能发现一个色盲患者的概率不小于 0.90.

(5)超几何分布:一批产品共有 N 件,其中有 $M(M<N)$件次品,今抽取 $n(1\leqslant n\leqslant N)$件,则其中的次品数 ξ 是一离散型随机变量,分布列为$P(\xi=k)=\frac{C_M^k\cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$,$0\leqslant k\leqslant M,0\leqslant n-k\leqslant N-M$.

这个分布叫超几何分布,在产品抽取问题中经常遇到.如果规定 $m<n$ 时 $C_m^n=0$,则 k 的范围可以写为 $k=0,1,\cdots,n$.

超几何分布的另一种形式.

一批产品由 a 件次品、b 件正品组成,今抽取 n 件($1\leqslant n\leqslant a+b$),则次品数 ξ 的分布列为:

$$P(\xi=k)=\frac{C_a^k\cdot C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n},k=0,1,\cdots,n.$$

易错点高效突破

随机变量 ξ 的取值

思维突破:随机变量从本质上讲就是以随机试验的每一个可能结果为自变量的一个函数,即随机变量的取值实质上是试验结果对应的数.随机变量取哪些值,来源于实际问题,如射击一次命中的环数 ξ,因为所研究的是射手一次射击所得几环的问题,故环数 ξ 只能是按实际中计算环数的方法进行.若是投掷飞标一次所得分数 ξ 为随机变量,显然就由飞标盘的得分方法来计算了.因此,关注生活中的事情,也有利于自己理解和解决问题.

例 一批零件中有 9 个合格品与 3 个废品,安装机器时,从这批零件中随机抽取,取出废品则不放回,求在第一次取到合格品之前已取出的废品数的分布列.

分析:一般分布列的求法分三步:(1)首先要确定随机变量 ξ 的取值有哪些.此题因为一旦取到合格品即停止 ξ 的试验过程,故而 ξ 的可能取值只能是 0,1,2,3;(2)求出每种取值下的随机事件概率值;(3)列表对应,即为分列布.

解:设在第一次取到合格品之前已取出的废品数为 ξ,则 ξ 的可能取值为 0,1,2,3.

$P(\xi=0)=\frac{C_9^1}{C_{12}^1}=\frac{3}{4}$;

$P(\xi=1)=\frac{C_3^1}{C_{12}^1}\cdot\frac{C_9^1}{C_{11}^1}=\frac{9}{44}$;

$P(\xi=2)=\frac{C_3^1}{C_{12}^1}\cdot\frac{C_2^1}{C_{11}^1}\cdot\frac{C_9^1}{C_{10}^1}=\frac{9}{220}$;

$P(\xi=3)=\frac{C_3^1}{C_{12}^1}\cdot\frac{C_2^1}{C_{11}^1}\cdot\frac{C_1^1}{C_{10}^1}=\frac{1}{220}$.

所以,分布列为:

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{44}$	$\frac{9}{220}$	$\frac{1}{220}$

解题技巧规律总结:不能出现 $\xi\geqslant 4$ 的值.为什么?关键还要理解 ξ 取值的具体含义.显然,无放回式试验,决定了取完全部废品后,下一次抽取必取到合格品.此题一般性原则是上一次实验若取到一个废品后,则下一次抽取时,总量和废品数量都应减少一个,故宜使用分步方法完成.

多维高效解题

思维迁移

1. 一题多变

例 1 (2002 年天津市统考题)设有产品 100 件,其中有次品 5 件,正品 95 件,现从中随机抽取 20 件,求抽得次品件数 ξ 的分布列.

分析:从 100 件产品中随机抽取 20 件,抽得次品件数 ξ 是一个离散型的随机变量,其次品件数可能是 0、1、2、3、4、5 件.

解:依题意,随机变量 ξ(次品件数)的可能取值为 0、1、2、3、4、5.

设抽得次品 k 件.这 k 件次品是从 5 件次品中抽得的,其抽取方法数为 C_5^k,同时还抽取出$(20-k)$件正品,其抽取方法数为 C_{95}^{20-k},所以,从 100 件产品中抽取 20 件,其中有 k 件次品的抽取方法数为 $C_5^k\cdot C_{95}^{20-k}$,而从 100 件产品中任意抽取 20 件的方法总数为 C_{100}^{20},从 100 件产品中抽取 20 件,其中有 k 件次品的概率为

$P(\xi=k)=\frac{C_5^k\cdot C_{95}^{20-k}}{C_{100}^{20}}(k=0,1,2,3,4,5)$.

$\therefore P(\xi=0)=\frac{C_5^0\cdot C_{95}^{20}}{C_{100}^{20}}=0.319\ 3$,

$P(\xi=1)=\frac{C_5^1\cdot C_{95}^{19}}{C_{100}^{20}}=0.420\ 1$,

$P(\xi=2)=\frac{C_5^2\cdot C_{95}^{18}}{C_{100}^{20}}=0.207\ 3$,

$P(\xi=3)=\frac{C_5^3\cdot C_{95}^{17}}{C_{100}^{20}}=0.047\ 9$,

$P(\xi=4)=\frac{C_5^4\cdot C_{95}^{16}}{C_{100}^{20}}=0.005\ 2$,

$P(\xi=5)=\frac{C_5^5\cdot C_{95}^{15}}{C_{100}^{20}}=0.000\ 2$.

$\therefore$ ξ 的概率分布为:

ξ	0	1	2	3	4	5
P	0.319 3	0.420 1	0.207 3	0.047 9	0.005 2	0.000 2

变式:一批产品,分为一、二、三级,其中一级品是二级品的两倍,三级品是二级品的一半,从这批产品中随机抽取一个检验质量,其级别为随机变量 ξ,求 ξ 的分布列及 $P(\xi>1)$.

解:依题意,得 $P(\xi=1)=2P(\xi=2)$,

$P(\xi=3)=\frac{1}{2}P(\xi=2)$.

由概率分布的总和为 1,得

$1=P(\xi=1)+P(\xi=2)+P(\xi=3)=\frac{7}{2}P(\xi=2)$.

$\therefore P(\xi=2)=\frac{2}{7}$.

$\therefore$

ξ	1	2	3
P	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$

$\therefore P(\xi>1)=P(\xi=2)+P(\xi=3)=\frac{3}{7}$.

2. 难题巧解

例 2 数字 1,2,3,4 任意排成一列,如果数字 k 恰好出现在第 k 个位置上,则称有一个巧合,求巧合数 ξ 的分布列.

解:$\xi=0$,没有巧合,若 1—2—3—4 为四个数都巧合,则没有一个巧合的情况有以下几种:

```
  1—4—3        1—4—2        1—2—3
 /            /            /
2—3—4—1      3—4—1—2      4—3—1—2
 \            \            \
  4—1—3        4—2—1        3—2—1
```

所以，$P(\xi=0)=\frac{9}{A_4^4}=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$；$\xi=1$，只有一个巧合，$P(\xi=1)=\frac{C_4^1\times 2}{A_4^4}=\frac{1}{3}$；$\xi=2$，只有两个巧合，$P(\xi=2)=\frac{C_4^2\times 1}{A_4^4}=\frac{1}{4}$；$\xi=3$，只有三个巧合，不存在，$P(\xi=3)=0$；$\xi=4$，四个数位置都巧合，$P(\xi=4)=\frac{1}{A_4^4}=\frac{1}{24}$. 所以

ξ	0	1	2	3	4
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{24}$

解题技巧规律总结：准确判断随机变量的不同取值及取不同值时的各种情况及概率是解本题的关键.

创新探究

1. 数学与日常生活

例 1 一袋中装有 1 个白球和 4 个黑球，每次从其中任取 1 个球，直到取到白球为止，若(1)每次取黑球不再放回去；(2)每次取黑球仍放回，试分别求取球次数的概率分布.

解：①若每次取出黑球不再放回去，取球次数 ξ 的分布列为：

ξ	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

②若每次取出黑球再放回去，取球次数 ξ 的分布列为：

ξ	1	2	3	…	k	…
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{16}{125}$	…	$\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{5}$	…

解题技巧规律总结：确定离散型随机变量 ξ 的分布列的关键是要搞清 ξ 取某一个值对应的随机事件，进一步利用排列组合知识求出 ξ 取某个值的概率.

2. 学科综合题

例 2 证明：$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n(n\in N^*)$.

分析：构造二项分布模型，利用分布列的第二条性质得到等式.

证明：若记事件 A："掷一均匀硬币，出现正面向上"，对掷 n 次硬币即进行 n 次独立重复试验中，事件 A 发生的次数服从二项分布 $\xi\sim B\left(n,\frac{1}{2}\right)$.

故 $P(\xi=k)=C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^n$，$k=0,1,2,\cdots,n$.

由分布列的性质知：

$P(\xi=0)+P(\xi=1)+P(\xi=2)+\cdots+P(\xi=n)=1$.

得 $C_n^0\left(\frac{1}{2}\right)^n+C_n^1\left(\frac{1}{2}\right)^n+C_n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n+\cdots+C_n^n\left(\frac{1}{2}\right)^n=1$.

即 $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$.

3. 高考链接

高考中对本部分考查往往与期望和方差相联系，进行综合考查，应用排列组合概率知识，因此要注意知识的前后联系.

例 3 （2004 年全国卷Ⅱ理工类）从装有 3 个红球、2 个白球的袋中随机取出 2 个球，设其中有 ξ 个红球，则随机变量 ξ 的概率分布为.

ξ	0	1	2
P			

解：$P(\xi=0)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=0.1$，

$P(\xi=1)=\frac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}=0.6$，

$P(\xi=2)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=0.3$.

限时高效训练

（时间 45 分钟，满分 100 分）

一、选择题（每小题 6 分，共 36 分）

1. 投掷均匀硬币 1 次，随机变量为( ).
A. 出现正面向上的次数
B. 出现正面向上或反面向上的次数
C. 掷硬币的次数
D. 出现正反面的次数之和

2. ①某寻呼台一小时收到寻呼的次数为 ξ；②长江上某水文观测站观测到一天中的水位为 ξ；③某超级市场一天的顾客量为 ξ，则为连续型随机变量的是( ).
A. 仅①中的 ξ　B. 仅②中的 ξ
C. 仅③中的 ξ　D. ①②③中的 ξ

3. 如果 ξ 是一个离散型随机变量，那么下列命题中不正确的是( ).
A. ξ 取每一个可能值的概率都是非负实数
B. ξ 取所有可能值的概率之和为 1
C. ξ 取某两个可能值的概率等于分别取其中每个值的概率之和
D. ξ 在某一范围内取值的概率大于它取这个范围内各个值的概率之和

4. 设随机变量 ξ 分布列为 $P(\xi=i)=a\left(\frac{1}{3}\right)^i$，$i=1,2,3$，则 a 的值为( ).
A. 1　B. $\frac{9}{13}$　C. $\frac{11}{13}$　D. $\frac{27}{13}$

5. 若 $P(\xi\leqslant x_2)=1-\beta$，$P(\xi\geqslant x_1)=1-\alpha$，其中 $x_1<x_2$，则 $P(x_1\leqslant\xi\leqslant x_2)$ 等于( ).
A. $(1-\alpha)(1-\beta)$　B. $1-(\alpha+\beta)$
C. $1-\alpha(1-\beta)$　D. $1-\beta(1-\alpha)$

6. 已知随机变量 ξ 服从二项分布 $\xi\sim B\left(6,\frac{1}{3}\right)$，则 $P(\xi=2)=$( ).
A. $\frac{3}{16}$　B. $\frac{4}{243}$　C. $\frac{13}{243}$　D. $\frac{80}{243}$

二、填空题（每小题 6 分，共 24 分）

7. 设随机变量 ξ 的分布列如表所示，则 $x=$______.

ξ	1	2	3	4
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	x

8. 把3枚骰子全部投出,设出现6点的骰子个数是 ξ,则 $P(\xi<2)=$______.

9. 设随机变量 ξ 只能取5,6,7,…,16这12个值,且取每一个值的概率均相等,则 $P(\xi>8)=$______. $P(6<\xi\leqslant 14)=$______.

10. 盒中装有8个乒乓球,其中6个新的,2个旧的,从盒中任取2个来用,用完后放回盒中,此时盒中旧球个数 ξ 是一个随机变量,请填写以下 ξ 的分布列:

ξ	2	3	4
P			

三、解答题(共40分)

11. 设随机变量的分布列为 $P(\xi=i)=\frac{i}{10}$,$i=1,2,3,4$,求出:(1)$P(\xi=1$ 或 $\xi=2)$;

(2)$P\left(\frac{1}{2}<\xi<\frac{7}{2}\right)$.

12. 一名学生每天骑自行车上学,从他家到学校的途中有6个路口设有红绿灯,设这名学生在路口遇到红绿灯的事件是相互独立的,且概率都是 $\frac{1}{3}$.

(1)设 ξ 为这名学生在途中遇到红灯的次数,写出 ξ 的分布列;

(2)设 η 为这名学生首先遇到红灯前经过的路口数,写出 η 的分布列;

(3)求这名学生在途中至少遇到一次红灯的概率.

13. 在一袋中装有1只红球和9只白球,每次从袋中任取1球,取后放回,直到取到红球为止,求取球次数 ξ 的分布列.

1.2 离散型随机变量的期望与方差

课前高效准备

学习目标导航

1. 了解离散型随机变量的期望的意义;会根据分布列求出期望.

2. 理解公式 $E(a\xi+b)=aE\xi+b$ 及若 $\xi\sim B(n,p)$ 则 $E\xi=np$,并会应用.

3. 了解离散型随机变量的方差,以及标准差的意义;会根据分布列求其方差或标准差.

4. 了解公式"$D(a\xi+b)=a^2D\xi$",以及"若 $\xi\sim B(n,p)$,则 $D\xi=npq(q=1-p)$,并会应用上述公式计算有关随机变量的方差.

高效预习反馈

1. 本节知识结构

离散型随机变量的期望与方差
- 期望
  - 期望的含义
  - 期望与分布列的关系
  - 随机变量函数 $\eta=a\xi+b$ 的期望
  - 二项分布的期望
- 方差
  - 方差、标准差的含义
  - 期望与方差的关系
  - 随机变量函数 $\eta=a\xi+b$ 的方差
  - 二项分布的方差

2. 本节知识达标

(1)若离散型随机变量 ξ 的概率分布为:

ξ	x_1	x_2	x_3	…	x_n	…
P	p_1	p_2	p_3	…	p_n	…

则称______为 ξ 的数学期望或平均数、均值,它又简称为______.

(2)若 $\eta=a\xi+b$,则 $E\eta=$______.

(3)若 $\xi\sim B(n,p)$,则 $E\xi=$______.

(4)如果离散型随机变量 ξ 所有可能取的值是 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$,且取这些值的概率分别是 $p_1,p_2,p_3,\cdots,p_n,\cdots$,那么,把 $D\xi=$______叫做随机变量 ξ 的均方差,简称为方差,$D\xi$ 的算术平方根 $\sqrt{D\xi}$ 叫做随机变量 ξ 的______,记作______.

(5)$D(\xi a+b)=$______.

如果 $\xi\sim B(n,p)$ 那么 $D\xi=$______.

课堂高效探究

重难点高效突破

1. 离散型随机变量的期望

当已知随机变量 ξ 的分布列为 $P(\xi=x_k)=p_k(k=1,2,\cdots)$ 时,则称 $E\xi=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n+\cdots$ 为 ξ 的数学期望.

期望 $E\xi$ 刻画了随机变量 ξ 所取的平均值,即反映了随机变量的平均水平.期望与随机变量本身有相同单位.

思维突破:假若随机试验进行了 n 次,根据 ξ 的分布列,在 n 次试验中,

有 p_1n 次出现了 x_1,

p_2n 次出现了 x_2,

…

p_nn 次出现了 x_n,

在 n 次试验中,ξ 出现的总次数为

$p_1nx_1+p_2nx_2+\cdots+p_nnx_n$.

因此 n 次试验中,ξ 出现的平均数等于

$\dfrac{p_1nx_1+p_2nx_2+\cdots+p_nnx_n}{n}=E\xi$,

即 $E\xi=p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n$.

例 1 某射手射击所得环数 ξ 的分布如下:

ξ	4	5	6	7	8	9	10
P	0.02	0.04	0.06	0.09	0.28	0.29	0.22

根据这个射手射击环数的分布列,在 n 次射击中,预计有大约

$P(\xi=4)\times n=0.02n$ 次得 4 环,

$P(\xi=5)\times n=0.04n$ 次得 5 环,

…

$P(\xi=10)\times n=0.22n$ 次得 10 环,

n 次射击的总环数约等于

$4\times0.02n+5\times0.04n+\cdots+10\times0.22n=[(4\times0.02)+5\times0.04+\cdots+(10\times0.22)]n$.

从而 n 次射击的平均环数约等于

$E\xi=4\times0.02+5\times0.04+\cdots+10\times0.22=8.32$(环).

2. 期望与分布列的关系

期望这一概念是建立在分布列的基础之上的,分布列中随机变量 ξ 的一切可能值 x,与对应的概率 $P(\xi=x_1)$ 的乘积的和就叫做随机变量 ξ 的数学期望.

思维突破:离散型随机变量的分布列和期望虽然都是从整体和全局上刻画随机变量的,但二者大有不同.分布列只给出了随机变量取所有可能值的概率,而期望却反映了随机变量取值的平均水平.

例 2 已知 100 个产品中有 10 个次品,求任意取出的 5 个产品中的次品数的数学期望.

分析:要求次品数的数学期望,应首先列出次品数 ξ 的分布列.

解:设任意取出的 5 个产品中的次品数为 ξ,由 $P(\xi)=\dfrac{C_{10}^{\xi}\cdot C_{90}^{5-\xi}}{C_{100}^{5}}$ 可列出 ξ 的分布列:

ξ	0	1	2	3	4	5
$P(\xi=x_i)$	0.584	0.34	0.07	0.006	≈0	≈0

$$\begin{aligned}\therefore E\xi&=\sum_{i=0}^{5}x_iP(x_i)\\&=0.584\times0+0.34\times1+0.07\times2\\&\quad+0.006\times3+4\times0+5\times0\\&=0.498.\end{aligned}$$

3. 期望的性质

随机变量 ξ 的线性函数的数学期望等于这个随机变量期望 $E\xi$ 的同一线性函数,即当 a、b 均为常数时,随机变量 $\eta=a\xi+b$ 的数学期望

$E\eta=E(a\xi+b)=aE\xi+b$.

思维突破:如果 $\eta=a\xi+b$,其中 a,b 为常数,那么 η 也是随机变量.

因为 $P(\eta=ax_i+b)=P(\xi=x_i)$,$i=1,2,3,\cdots$,所以 η 的分布列为

η	ax_1+b	ax_2+b	…	ax_n+b	…
P	p_1	p_2	…	p_n	…

有 $E\xi=(ax_1+b)p_1+(ax_2+b)p_2+\cdots+(ax_n+b)_n+\cdots$

$=a(x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n+\cdots)+b(p_1+p_2+\cdots+p_n+\cdots)$

$=aE\xi+b$,

即 $E(a\xi+b)=aE\xi+b$.

特别地,

①当 $a=0$ 时,$E(b)=b$,即常数的数学期望就是这个常数本身.

②当 $a=1$ 时,$E(\xi+b)=E\xi+b$,即随机变量 ξ 与常数之和的期望等于 ξ 的期望与这个常数的和.

③当 $b=0$ 时,$E(a\xi)=aE\xi$,即常数与随机变量乘积的期望等于这个常数与随机变量期望的乘积.

4. 常见离散型随机变量的期望

(1)单点分布:$E\xi=c\times1=c$.

(2)两点分布:$E\xi=0\times q+1\times p=p$.

(3)二项分布:$E\xi=np$.

事实上,假设在一次试验中某事件发生的概率为 p,η 是一次试验中此事件发生的次数,令 $q=1-p$,则有 $p(\eta=0)=q$,$p(\eta=1)=p$,可得 $E\eta=0\times q+1\times p=p$.

思维突破:在一次试验中该事件平均发生 p 次,我们可以猜想,在 n 次独立重复试验中,该事件平均发生 np 次,也就是若 $\xi\sim B(n,p)$,则 $E\xi=np$.这就是 ξ 的二项分布的期望的特点.

这一结论,可以作出证明,证明如下:

$\because P(\xi=k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}=C_n^kp^kq^{n-k}$,

$\therefore E\xi=0\times C_n^0p^0q^n+1\times C_n^1p^1q^{n-1}+2\times C_n^2p^2q^{n-2}+\cdots+kC_n^kp^kq^{n-k}+\cdots+nC_n^np^nq^0=np(C_{n-1}^0p^0q^{n-1}+C_{n-1}^1p^1q^{n-2}+\cdots+C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}\cdot q^{(n-1)-(k-1)}+\cdots+C_{n-1}^{n-1}p^{n-1}q^0)$(运用公式 $kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$)$=np(p+q)^{n-1}=np$.

运用这一特点,可简化二项分布中数学期望的计算.

例 3 一份数学模拟试卷由 25 个选择题构成,每个选择题有 4 个选项,其中有且仅有一个选项是正确的,每题选得正确答案得 4 分,不作选择或选错不得分,满分 100 分.张强选对任一题的概率为 0.8,求他在这次数学测验中的成绩的期望.

分析:张强在数学测验中选择了正确答案的选择题的个数服从二项分布 $\xi\sim B(25,0.8)$,其数学期望可有简便算法.

解:设张强做对选择题的个数为 ξ,则 $\xi\sim B(25,0.8)$,所以 $E\xi=np=25\times0.8=20$.

因为答对每题得 4 分,所以张强在这次数学测验中的成绩为 4ξ,其成绩的期望值为

$E(4\xi)=4E\xi=4\times20=80$.

解题技巧规律总结:随机变量 ξ 的概率分布,是求其数学期望的关键.因此,决定 ξ 取哪些值及其相应的概率,是重要的突破点.此题中应觉察到 $\xi\sim B(25,0.8)$ 即随机变量服从二项分布.

■5. 方差

当已知随机变量ξ的分布列为$P(\xi=x_k)=p_k(k=1,2,\cdots)$时，则称$D\xi=(x_1-E\xi)^2p_1+(x_2-E\xi)^2p_2+\cdots+(x_n-E\xi)^2p_n+\cdots$为$\xi$的方差，$\sigma\xi$为$\xi$的根方差或标准差.

思维突破：随机变量ξ的方差与标准差都反映了随机变量ξ取值的稳定与波动、集中与离散的程度. $D\xi$越小，稳定性越高，波动越小. 显然$D\xi\geqslant0$，标准差与随机变量本身有相同单位.

例4 已知随机变量ξ的分布列为

ξ	0	1	2	3	4	5
P	0.1	0.15	0.25	0.25	0.15	0.1

求$D\xi$.

分析：欲求$D\xi$，必须先求$E\xi$.

解：$E\xi=0.1\times0+0.15\times1+0.25\times2+0.25\times3+0.15\times4+0.1\times5=2.5$，

所以

$$D\xi=(0-2.5)^2\times0.1+(1-2.5)^2\times0.15+(2-2.5)^2\times0.25+(3-2.5)^2\times0.25+(4-2.5)^2\times0.15+(5-2.5)^2\times0.1$$
$$=0.625+0.3375+0.0625+0.0625+0.3375+0.625=2.05.$$

由定义和本题看到期望与方差的关系.

方差是随机变量另一个重要的数字特征，它表现了随机变量所取的值相对于它的期望的集中与离散的程度，因此二者的关系是十分密切的.

且有关系式$D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2$.

■6. 方差的性质

对随机变量函数$\eta=a\xi+b$(a,b为常数)而言，$E\eta=E(a\xi+b)=aE\xi+b$. 那么，η的方差又如何呢？

$$D(a\xi+b)=(ax_1+b-aE\xi-b)^2p_1+(ax_2+b-aE\xi-b)^2p_2+\cdots+(ax_n+b-aE\xi-b)^2\cdot p_n+\cdots$$
$$=a^2[(x_1-E\xi)^2p_1+(x_2-E\xi)^2p_2+\cdots+(x_n-E\xi)^2p_n+\cdots]$$
$$=a^2D\xi.$$

因此，当a、b均为常数时，随机变量函数$\eta=a\xi+b$的方差$D(\eta)=D(a\xi+b)=a^2D\xi$. 特别是：

①当$a=0$时，$D(b)=0$，即常数的方差等于0.

②当$a=1$时，$D(\xi+b)=D\xi$，即随机变量与常数之和的方差就等于这个随机变量的方差本身.

③当$b=0$时，$D(a\xi)=a^2D\xi$，即随机变量与常数之积的方差，等于这常数的平方与这个随机变量方差的乘积.

例5 已知随机变量ξ的分布列为

ξ	1	2	3	4	5
P	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

另一随机变量$\eta=2\xi-3$，求E_η、D_η.

解：$E_\eta=2E\xi-3$

$=2\times(1\times0.1+2\times0.2+3\times0.4+4\times0.2+5\times0.1)-3=2\times3-3=3$；

$D_\eta=2^2\cdot D\xi$

$=2^2\times[(1-3)^2\times0.1+(2-3)^2\times0.2+(3-3)^2\times0.4+(4-3)^2\times0.2+(5-3)^2\times0.1]$

$=4\times(0.4+0.2+0.2+0.4)=4.8.$

解题技巧规律总结：理解和熟记以上方差的性质，可以大大方便解题.

■7. 常见离散型随机变量的方差

(1)单点分布：$D\xi=0$.

(2)两点分布：$D\xi=pq$.

(3)二项分布：$D\xi=npq$.

例6 抛掷5枚硬币，求正面向上的次数ξ的方差.

解：可知$\xi\sim B\left(5,\frac{1}{2}\right)$，$\therefore p=\frac{1}{2},q=1-p=\frac{1}{2}$.

于是$D\xi=npq=5\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$.

解题技巧规律总结：(1)计算顺序：求分布列→期望→方差.

(2)已知随机变量的分布列，可直接按定义(公式)求它的期望、方差和标准差.

(3)已知随机变量ξ的期望、方差，求ξ的线性函数($\eta=a\xi+b$)的期望、方差和标准差，可直接用ξ的期望、方差的性质求解.

(4)如能分析所给随机变量，是服从常见的分布(两点分布、二项分布等)，可直接用它们的期望、方差公式计算.

(5)对于应用题，必须对实际问题进行具体分析，先求出随机变量的概率分布，然后按定义计算出随机变量的期望、方差和标准差.

(6)离散型随机变量ξ的取值和所有概率值有规律时，求$E\xi$还应注意利用数列求和方法进行化简.

易错点高效突破

■对数学期望及方差的概念模糊

思维突破：正确认识离散型随机变量的数学期望值：

例如：在一次商业活动中，某人获利300元的概率为0.6，亏损100元的概率为0.4，求此人在这样的一次商业活动中获利的数学期望，可得$E\xi=300\times0.6+(-100)\times0.4=140$(元). 这表明此人有希望获利140元，但注意：对于这样一次商业活动，此人不是赚300元，就是亏100元，但如果他重复从事这类商业活动，那么，从平均意义上说，每次可获利的加权平均值为这个期望值，正如概率作为随机事件发生的频率一样，要在大量现象中才能显现出来.

正确认识方差：

方差$D\xi$是ξ取值时，以它的数学期望$E\xi$为中心的分散程度($E\xi$在这里是常量)，而标准差$\sigma\xi=\sqrt{D\xi}$与随机变量有相同的单位，故它也反映了ξ取值时与$E\xi$为中心的分散程度，也有着较为广泛的应用.

注意随机变量的方差 $D\xi=(x_1-E\xi)^2p_1+(x_2-E\xi)^2p_2+\cdots+(x_n-E\xi)^2p_n$ 公式与初中所学的样本方差公式 $S^2=\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]$ 的区别，即不要忘记各项都乘上相应的 $P(\xi=x_1)$.

例 一批产品共 100 件，其中有 10 件是次品，为了检验其质量，从中以随机的方式选取 5 件，求在抽取的这 5 件产品中次品数的分布列与期望值，并说明 5 件中有 3 件以上为次品的概率(精确到 0.001).

分析：解答本题首先应求出各随机变量相应的概率，然后再按题中要求，计算期望值与 3 件以上为次品的概率.

解：设次品数为随机变量 ξ，显见 ξ 的取值为 0，1，2，3，4，5 这 6 个值. 不难得出

$P(\xi=k)=\frac{C_{10}^{k}\cdot C_{90}^{5-k}}{C_{100}^{5}}(k=0,1,2,3,4,5)$.

可以得出

$P(\xi=0)\doteq 0.584$，$P(\xi=1)\doteq 0.340$，

$P(\xi=2)\doteq 0.070$，$P(\xi=3)\doteq 0.006$，

$P(\xi=4)\doteq 0$，$P(\xi=5)\doteq 0$.

故可知 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3	4	5
P	0.584	0.340	0.070	0.006	0	0

$E\xi=0\times0.584+1\times0.340+2\times0.070+3\times0.006+4\times0+5\times0=0.498$.

再由分布列可知

$P(\xi\geqslant3)=0.006+0+0=0.006$.

这表明，所抽取的 5 件产品中 3 件以上为次品的可能性很小，仅约有 0.6%.

解题技巧规律总结：解答本题时，应正确理解题意，不能认为随机变量的概率服从二项分布，实际上，本题就是在高二所学过的概率中类似问题的延伸而已. 解答本题时，应注意避免计算过程中所产生的失误.

多维高效解题

思维迁移

1. 课本例题的变式题

例 1 某同学参加科普知识竞赛，需回答三个问题，竞赛规则规定：每题回答正确得分 100 分，回答不正确得 -100 分. 假设这名同学每题回答正确的概率均为 0.8，且各题回答正确与否相互之间没有影响. (1)求这名同学回答这三个问题的总得分 ξ 的概率分布和数学期望；(2)求这名同学总得分不为负分(即 $\xi\geqslant0$)的概率.

分析：该同学答题的结果为：全答错，答对一个错两个，答对两个错一个，全答对. 则总得分的可能取值为：-300，-100，100，300. 于是可解.

解：(1)ξ 的可能取值为 -300，-100，100，300

$P(\xi=-300)=0.2^3=0.008$，

$P(\xi=-100)=3\times0.2^2\times0.8=0.096$，

$P(\xi=100)=3\times0.2\times0.8^2=0.384$，

$P(\xi=300)=0.8^3=0.512$.

∴ ξ 的概率分布为：

ξ	-300	-100	100	300
P	0.008	0.096	0.384	0.512

$E\xi=(-300)\times0.008+(-100)\times0.096+100\times0.384+300\times0.512=180$.

这名同学不得负分的概率 $P(\xi\geqslant0)=0.384+0.512=0.896$.

解题技巧规律总结：分析出答题结果的所有可能情况，对应找出 ξ 的所有可能取值是本题的突破口.

2. 课本习题的变式题

例 2 交 5 元钱，可以参加一次摸奖，一袋中有同样大小的球 10 个，其中有 8 个标有 1 元钱，2 个标有 5 元钱，摸奖者只能从中任取 2 个球，他所得奖励是所抽 2 球的钱数之和. 求抽奖人获利的数学期望.

分析：抽到的 2 个球上的钱数之和 ξ 是个随机变量，其每一个 ξ 取值时所代表的随机事件的概率值是容易获得的，但此题所求为另一个随机变量，即参加摸奖的人获利 η 的数学期望. ξ 与 η 关系为 $\eta=\xi-5$，利用公式 $\eta=a\xi+b$，则 $E_\eta=aE\xi+b$. 可获解答.

解：设 ξ 为抽到的 2 球钱数之和，则 ξ 的可能取值如下：

$\xi=2$，抽到 2 个 1 元；

$\xi=6$，抽到 1 个 1 元，1 个 5 元；

$\xi=10$，抽到 2 个 5 元.

所以，由题：

$P(\xi=2)=\frac{C_8^2}{C_{10}^2}=\frac{28}{45}$，$P(\xi=6)=\frac{C_8^1C_2^1}{C_{10}^2}=\frac{16}{45}$，

$P(\xi=10)=\frac{C_2^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{45}$，$E\xi=2\times\frac{28}{45}+6\times\frac{16}{45}+10\times\frac{1}{45}=\frac{162}{45}$，又设 η 为抽奖者获利可能值，则 $\eta=\xi-5$，所以获利的期望为：$E\eta=E\xi-5=\frac{162}{45}-5=-\frac{7}{5}=-1.4$.

解题技巧规律总结：要分清楚是谁获利？不能忽视了先交 5 元才能参加这一抽奖，故不能只计算 $E\xi$，最终 $E\eta$ 的结果为负值，你能用参加这种抽奖的平均获利 $E\eta$ 的含义解释其实际意义吗？

3. 一题多变

例 3 英语考试有 100 道选择题，每题 4 个选项，选对得 1 分，否则得 0 分. 学生甲会其中的 20 道，学生乙会其中的 80 道，不会的均随机选择. 求甲、乙在这次测验中得分的期望.

分析：数学期望反映了随机变量取值的平均水平，要求数学期望首先要得到分布列. 由题意知，本题为二项分布.

解:设甲和乙不会题得分分别为随机变量ξ和η,由题意知$\xi\sim B(80,0.25)$,$\eta\sim B(20,0.25)$,故$E\xi=80\times0.25=20$,$E\eta=20\times0.25=5$,故甲、乙期望成绩分别为40分和85分.

解题技巧规律总结:通常情况下,在n次独立重复试验中事件发生的次数ξ符合二项分布,直接代入公式即可求得期望.

变式:1.某射手击中目标的概率为p,求他射击n次,击中目标的次数ξ的期望.

解:它符合二项分布$\xi\sim B(n,p)$,

$\therefore E\xi=np$.

2.$\xi\sim B(2,p)$,$\eta\sim B(4,p)$,且$P(\xi\geqslant1)=\frac{5}{9}$,求$P(\eta\geqslant1)$.

解:$\xi\sim B(2,p)$,

$P(\xi=k)=C_2^k p^k(1-p)^{2-k}(k=0,1,2)$,

$P(\xi\geqslant1)=P(\xi=1)+P(\xi=2)=C_2^1p(1-p)+p^2=\frac{5}{9}$.$(1-p)^2=\frac{4}{9}$,$p=\frac{1}{3}$.

$\eta\sim B(4,p)$,即$\eta\sim B\left(4,\frac{1}{3}\right)$.

$P(\eta=k)=C_4^k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(1-\frac{1}{3}\right)^{4-k}$

$P(\eta\geqslant1)=1-p(\eta=0)=\frac{65}{81}$.

4.难题巧解

例4 有n把看上去样子相同的钥匙,其中只有一把能把大门上的锁打开.用它们去试开门上的锁.设抽取钥匙是相互独立且等可能的.每把钥匙试开后不能放回,求试开次数ξ的数学期望和方差.

分析:求$P(\xi=k)$时,由题知前$k-1$次没打开,恰第k次打开,不过,一般我们应从简单的地方入手,如$\xi=1,2,3$,发现规律后,推广到一般.

解:ξ的可能取值为$1,2,3,\cdots,n$.

$P(\xi=1)=\frac{1}{n}$;

$P(\xi=2)=\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n-1}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}$;

$P(\xi=3)=\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n-1}\right)\cdot\frac{1}{n-2}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{1}{n-2}=\frac{1}{n}\cdots$;

$P(\xi=k)=\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n-1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n-2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n-k+2}\right)\cdot\frac{1}{n-k+1}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{n-k+1}{n-k+2}\cdot\frac{1}{n-k+1}=\frac{1}{n}$;所以$\xi$的分布列为:

ξ	1	2	…	k	…	n
P	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	…	$\frac{1}{n}$	…	$\frac{1}{n}$

$E\xi=1\cdot\frac{1}{n}+2\cdot\frac{1}{n}+3\cdot\frac{1}{n}+\cdots+n\cdot\frac{1}{n}=\frac{n+1}{2}$;

$D\xi=\left(1-\frac{n+1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\left(2-\frac{n+1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\left(3-\frac{n+1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\left(k-\frac{n+1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\left(n-\frac{n+1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\left[(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)-(n+1)(1+2+3+\cdots+n)+\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\cdot n\right]$

$=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{n(n+1)^2}{2}+\frac{n(n+1)^2}{4}\right]$

$=\frac{n^2-1}{12}$.

解题规律技巧总结:复杂问题的简化处理,即从个数较小的看起,找出规律所在,进而推广到一般,方差的公式正确使用后,涉及一个数列求和问题,合理拆项,转化成熟悉的公式,是解决的关键.

创新探究

1.数学与日常生活

例1 (2003年全国高考)A、B两个代表队进行乒乓球对抗赛,每队三名队员,A队队员是A_1、A_2、A_3,B队队员是B_1,B_2,B_3,按以往多次比赛的统计,对阵队员之间胜负概率如下:

对阵队员	A队队员胜的概率	A队队员负的概率
A_1对B_1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
A_2对B_2	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$
A_3对B_3	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

现按表中对阵方式出场,每场胜队得1分,负队得0分,设A队、B队最后的得总分分别为ξ,η.

(1)ξ、η的概率分布;

(2)求$E\xi$、$E\eta$.

解:(1)ξ,η的可能取值分别为3,2,1,0.

$P(\xi=3)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{8}{75}$,

$P(\xi=2)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{28}{75}$,

$P(\xi=1)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{5}$,

$P(\xi=0)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{25}$.

根据题意,$\xi+\eta=3$,所以

$P(\eta=0)=P(\xi=3)=\frac{8}{75}$,

$P(\eta=1)=P(\xi=2)=\frac{28}{75}$,

$P(\eta=2)=P(\xi=1)=\frac{2}{5}$,