数理逻辑

孙明湘 著

中南大学出版社

数 理 逻 辑

孙明湘 著

中南大学出版社

数理逻辑

孙明湘　著

□责任编辑　邓立荣
□出版发行　中南大学出版社
社址:长沙市麓山南路　邮编:410083
发行科电话:0731-8876770
传真:0731-8710482
□经　　销　湖南省新华书店
□印　　装　长沙化勘印刷有限公司

□开　　本　850×1168 1/32 □印张 7.25 □字数 171 千字
□版　　次　2004 年 8 月第 1 版　□2004 年 8 月第 1 次印刷
□书　　号　ISBN 7-81061-968-3/O·051
□定　　价　14.00 元

前 言

数理逻辑是用形式系统的方法来研究推理形式的有效性的学科。任何一门学科都要进行推理与证明，而任何一个推理都有有效或无效的区分。如何保证一个推理是有效的，这不是其他具体科学的任务，而是逻辑学的任务。逻辑学是一门具有基础性、边缘性特点的学科，它与其他学科一同产生、成长并不断成熟。在现代科学中，逻辑学吸收了数学高度形式化和精确化的特点，从而演变为数理逻辑，它使我们所做的每一个推理更严格，更精确，也更有普遍性，从而成为其他学科如计算机科学、哲学、语言学等的学习和研究的精良而有效的工具。同时，数理逻辑也是训练我们从事某一专业的人，在自己专业范围内外，更严格、更敏捷、更准确思维的必要工具。事实上，思维的不严密，不精确，无论是在日常思维中，还是在专业思维中都是常见的。因此，我们有必要在学习和运用自己专业知识的同时，也要学习和运用好逻辑知识，特别是数理逻辑的知识。

本书所讲述的数理逻辑知识是较初步的，经典的，其内容主要是一阶逻辑演算，即第 2 章的命题演算和第 3 章的谓词演算，这是数理逻辑最基本的内容，也是每个试图学习数理逻辑的人必须掌握的。此外，本书还简要地讲述了较有代表性的非经典数理逻辑的两个系统，即第 4 章的模态逻辑演算和第 5 章的构造性逻辑（也即直觉主义逻辑）演算，这部分内容是在一阶逻辑基础上进一步学习非经典逻辑的一个引导。无论是哪个系统的逻辑演算，其本质都是研究该系统内推理形式（语法或语义）的有效性，因此，在本书的第 1 章中对数理逻辑的对象和方法作了概括的讲述，它是

阅读全书的纲领。

本书在讲述中，既给出严密的形式系统，包括自然演算和公理演算，又注意讲清形式化方法的思想，同时特别重视对系统内定理进行证明的训练。我在给我的恩师苏天辅当学生时，他指导我学习数理逻辑的一个重要方法就是大量地做题，至今我还印象深刻，并深深受益。因此在本书中我不但给出了较多的内定理的证明，而且在每章节后还给出了较大量的练习题，希望读者通过做题的训练，熟练掌握相关的理论和技巧，将逻辑知识内化为实际的推理能力。

本书可作为高校文理各专业的基础课或专业基础课教材，也可作为现代逻辑爱好者的自学教材或基础读物。

本书是本人长期从事逻辑学教学的一个总结，在写作中参阅了相关的数理逻辑专著（参考文献见本书最后页），在此向各位专家表示感谢。本书的完成，得到了我校研究生院的资助和我校出版社的鼎力支持，在此深表谢意。本书的不当之处在所难免，敬请各位同仁和读者批评指正。

作 者

2004 年 8 月于中南大学

目　录

第1章　绪　论

1.1　推理的有效性

数理逻辑,也称符号逻辑,从广义上理解,它是一门边缘性的学科,包括五个部分的内容,即:逻辑演算、证明论、公理集合论、递归论和模型论。逻辑演算属于逻辑学,证明论等“四论”属于数学。当然,数理逻辑的逻辑内容和数学内容经常交织在一起。而且逻辑演算(主要指一阶逻辑演算,它包括命题逻辑和一阶谓词逻辑两个演算)还是数理逻辑的基础内容。因此,从狭义上理解,数理逻辑就是逻辑演算。其中一阶逻辑演算也称经典逻辑,对经典逻辑或者扩充或者修改就构成了非经典的逻辑演算。本书的数理逻辑是指一阶逻辑演算以及非经典逻辑的模态逻辑演算和构造性(直觉主义的)逻辑演算。

逻辑是研究推理形式有效性的科学。数理逻辑是运用形式系统的方法来研究推理形式有效性的科学。关于形式系统方法,我们将在下一节介绍。这里主要讲述逻辑的研究对象——推理形式的有效性。推理形式有效性,也称推理有效性,它是指推理中前提和结论之间的形式关系。这种形式关系是由作为前提和结论的命题的逻辑形式(简称命题形式)决定的。当我们得到一推理中表示前提和结论的命题形式时,再加上表示推理的联结词“因为,所以”,我们便得到一推理形式。例如:

(1)因为①如果你喜欢逻辑,则你喜欢数学。

②你不喜欢数学。

所以③你不喜欢逻辑。

(2)因为④如果你喜欢逻辑，则你喜欢数学。

⑤你不喜欢逻辑。

所以⑥你不喜欢数学。

以上(1),(2)是从具体思维中经过整理并简化所得到的两个推理。跟随“因为”的命题是推理的前提，跟随“所以”的命题是推理的结论，其中①④有相同的命题形式

如果 p 则 q,

②⑥有相同的命题形式

非 q,

③⑤有相同的命题形式

非 p。

命题形式通常由常项和变项两部分组成。常项是表示或规定命题结构的词项，如上列中的“如果，则”，“非”等，变项是指在命题结构中可填入具有任意内容的词项或具有任意内容的命题的空位，如上列中的 p,q 等，每一符号表示具有任意内容的简单命题。

在命题形式的基础上，上述推理的逻辑形式(简称推理形式)如下：

(1′)因为如果 p，则 q

非 q

所以非 p

(2′)因为如果 p，则 q

非 p

所以非 q

这种前提与结论的形式关系，就是推理形式的有效性问题，它是指前提与结论之间是否具有必然的“推出”(“推演”或“推论”或“蕴涵”)的关系。这种关系，与前提和结论的内容无关，只与前提和结论的真假(也称命题的逻辑性质)相关，因此称形式关系或

逻辑关系。这种形式关系或者说推理的有效性包括两方面：一是推理的前提和结论有必然的"推出"关系的，也即该推理形式有效（或正确）；二是推理的前提和结论没有必然的"推出"关系的，也即该推理无效（或不正确）。我们对推理有效性的定义如下：

定义1　一推理形式是有效的（也称推理有效式），当且仅当具有此推理形式的任一推理（即该推理形式的任一推理实例）都不出现前提真而结论假。或者说，一推理形式是有效的，即：如果该推理的前提是真的，则其结论不可能是假的；或者说，一推理形式是有效的，即：如果该推理的前提是真的，而结论是假的，就会导致逻辑矛盾。

定义2　一推理形式是非有效的（也称推理无效式），当且仅当具有该推理形式的任一推理，其前提真时，其结论可能假。即在相同形式下的任何推理实例中，如果前提都是真的，则有的结论是真的，有的结论是假的。

上述推理形式（1′）是推理有效式，即在（1′）中，无论用 p，q 替换任何素材的命题，只要前提命题"如果 p，则 q"和"非 q"是真的，则结论命题"非 p"不可能是假的。或者说，运用（1′）推理，我们不可能找到一个前提真而结论假的推理实例，例如上述推理（1），如果结论"你不喜欢逻辑"是假的，即"你喜欢逻辑"，根据已确定为真的前提，可得到"你喜欢数学并且不喜欢数学"的矛盾命题，因此，结论"你不喜欢逻辑"不可能是假的。

（2′）是推理无效式，按照该形式，我们给出一个前提真而结论假的推理无效式的实例：

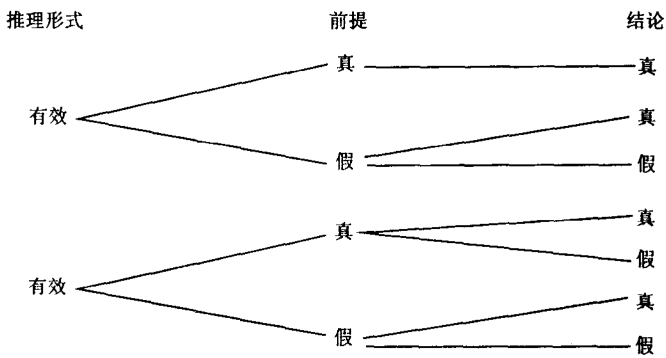
因为如果 $1+1\neq2$，则 $1+1>1$

$1+1=2$（并非 $1+1\neq2$）

所以 $1+1\ngtr1$（并非 $1+1>1$）

命题或命题形式的真与假，叫做命题的真值，它是命题的逻辑性质。当命题的真值仅为真假二值时，其命题为二值命题；二值命

题是命题真值的基础，这里我们以二值命题为例。推理或推理形式的有效性是推理的逻辑性质，命题的真值与推理的有效性二者有很密切的联系：



由上可知，推理形式中，前提和结论的七种真值关系只有一种是确定的，即前提真而结论真，或者说，前提真而结论不能假。这是判定一推理是否有效的唯一依据。而另外六种真值关系是不确定的，即一推理形式有效而前提是假的，则结论可真可假，一推理形式无效而前提无论真假，其结论都是可真可假的。需要强调的是：一个有效的推理，其前提和结论都可能是假的。例如：

如果 $1+1=2$，则 $1+2=3$

$1+2\neq3$（并非 $1+2=3$）

所以，$1+1\neq2$（并非 $1+1=2$）

这是按照前面有效式（$1'$）给出的一个前提假（即：前提中至少有一个假）且结论假而形式有效的推理。其有效性在于：如果它的前提是真的，则结论一定是真的，即使事实上它是假的。同样，一个无效的推理，其前提和结论都可能是真的。例如：

如果 $1+1\neq2$，则 $1+2\neq3$

1 + 1 = 2

所以,1 + 2 = 3

这是按照前面无效式(2′)给出的一个前提真结论真而形式无效的推理,虽然其结论是真的,但它与前提的真值关系是不确定的。当我们把该推理与另一个具有相同形式的推理相比较,它的无效性就变得明显了。请见上述结论为“1 + 1 ≯ 1”的推理实例。

以上表明,推理有效性,是指推理中前提和结论之间的真值关系或形式关系,如果这种关系是确定的,则我们能确定该推理有效,如果这种关系是不确定的,则我们不能确定该推理是否有效。推理中前提和结论之间确定的真值关系,一般表现为有效的推理形式。因此说,逻辑学是研究推理形式有效性的学科。

从另一角度说,要确定一个推理的结论一定是真的,必须满足两个条件:一是前提是真的;二是推理形式是有效的。一般来说,确定前提的真,是具体科学研究的对象,而确定推理的有效性,则是逻辑学的特殊职责。逻辑学把真的命题抽象为命题形式,以讨论命题形式之间的真值关系,从而把有效的推理形式与无效的推理形式区别开来。

每一个有效的推理形式都是逻辑学家在无数次具体的思维实践中总结或抽象出来的逻辑规律。由于命题的结构具有不同的层次性,因此在对命题的结构作分析时,可以将同一个命题分析成不同的命题形式,这就有一个将命题分析到何种层次的命题形式是恰当的问题。逻辑学家的原则是:对命题形式的分析不能影响它在推理形式中有效性。例如:

(3)逻辑学是研究推理有效性的,三段论是逻辑学,所以,三段论是研究推理有效性的。

(4)如果一个有效推理的结论是假的,则前提也是假的,这是必然的。因此,一个结论为假的有效推理,其前提为真,这是不可能的。

(3)和(4)的推理形式如下:

(3′)对任意对象 x,如果 x 是 S,则 x 是 P;a 是 S,所以 a 是 P。(公式为:$\forall x(Sx \rightarrow Px), Sa \vdash Pa$),符号 $\vdash$ 表示"推出"关系)。

(4′)因为如果 p 则 q 是必然的,所以,p 且非 q 是不可能的(公式为:$\Box(p \rightarrow q) \vdash \neg \Diamond(p \wedge \neg q)$)。

(3)和(4)是两个有效的推理,即在(3)的推理形式(3′)中,将符号 a 换以表示任意个体的词项,将符号 S 和 P 换以表示个体性质的词项,在(4)的推理形式(4′)中,将符号 p 和 q 换以表示任意内容的命题,如果它们的前提是真的,其结论也一定是真的。

但是,(3′)和(4′)这两个推理形式的结构与上述(1′)和(2′)的结构是不同的。在(1′)和(2′)中仅仅分析了命题与命题之间的逻辑关系,因为这样分析已能反映出它们之间的推理有效性;而在(3′)中,不仅分析了命题与命题之间的逻辑关系,还分析了命题内部词项与词项之间的逻辑关系,在(4′)中,分析了含有模态词"必然","可能"的命题之间的逻辑关系,因为如果不这样分析,就不足以反映命题之间的推理有效性,就会将一个事实上有效的推理通过不恰当的逻辑形式的分析而导致推理无效。

因此,推理有效性问题还涉及对推理中命题的逻辑形式的正确分析。数理逻辑将不同结构类型的推理形式放入到不同的逻辑系统中加以研究(或者说,对不同推理结构的不同分析可导致不同的逻辑系统),如上述(1′)和(2′)是命题逻辑所研究的对象,(3′)是一阶谓词逻辑所研究的对象,(4′)是在经典逻辑基础上的模态逻辑研究的对象。由此,推理有效性问题,也是相对某一逻辑系统而言的,数理逻辑就是对形式有效的推理关系进行可靠且完全刻画的形式系统。

1.2 形式系统

数理逻辑在研究推理形式有效性的过程中,所运用的最一般方法是形式化方法。所谓形式化方法,是将一套特制的人工符号体系(形式语言)应用于一演绎体系以使其严格化、精确化的研究方法。这一严格的演绎体系,就称为逻辑演算的形式系统。

将形式语言用于演绎体系所构成的形式系统由两部分组成:一是形式语言,包括字母表和形成规则;二是形式演绎,包括初始公式(公理)和变形规则。

以下给出形式系统的定义。

定义1 (形式系统)一个形式系统 I 由下列四个集合构成:

(1)一个非空集合 $A(I)$,称为字母表或符号库;其元素是组成命题或推理公式的常项符号,变项符号以及括号;

(2)一个由 $A(I)$ 中符号的有限序列构成的集合 $E(I)$,称为项集或公式集,其元素为项或公式,由于 $E(I)$ 是按照形成规则形成的,并非是 $A(I)$ 中元素组成的全部序列的集合,因此,该集合也称形成规则集或合式公式集;

(3) $E(I)$ 的一个子集 $A_x(I)$,称为公理集,该集合可空,$A_x(I)$ 为空集的形式系统为自然推演系统,否则为公理系统;

(4) $E(I)$ 上的部分运算构成一个集合 $R(I)$,称为变形(或运算)规则集,由于运用 $R(I)$,可从 $E(I)$ 中的公式得到新的 $E(I)$ 公式(即定理),因此,该集合也称定理集。

记 I 为四元组 $\langle A(I),E(I),A_x(I),R(I)\rangle$,称 $\langle A(I),E(I)\rangle$ 为 I 的形式语言,记为 $L(I)$;称 $\langle A_x(I),R(I)\rangle$ 为 I 的形式演绎。

设 I_1 和 I_2 为两个形式系统,若 $A(I_1)\subseteq A(I_2)$,$E(I_1)\subseteq E(I_2)$,则称 $L(I_2)$ 是 $L(I_1)$ 的一个扩充,同时称 $L(I_1)$ 是 $L(I_2)$ 的一个归约。

I 的形式演绎也称形式推演或形式证明，它是对前提公式与结论公式“推出”关系的形式刻画，设 I 为一自然推演系统，以下给出 I 的形式定理和形式证明的定义。

定义 2 设 $\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots,\Gamma_n$ 为 I 中有限公式集，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 I 中公式，有限序列 $\Gamma_1 \vdash A_1,\Gamma_2 \vdash A_2,\cdots,\Gamma_n \vdash A_n$ 称为 $\Gamma_n \vdash A_n$ 的一个形式证明，当且仅当，每个 $\Gamma_i \vdash A_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 都是对该序列中它之前的若干个 $\Gamma_j \vdash A_j(j<i)$ 应用 I 的某条推演规则所导出的，此时称 $\Gamma_i \vdash A_i$ 为 I 中的形式定理，n 为这个形式证明的长度，称 $\Gamma_n \vdash A_n$ 或 $\Gamma_n \vdash_I A_n$ 为 I 中所要证明的形式定理，表示 A_n 在 I 中可由 Γ_n 形式证明或形式推出。

由形式系统和形式证明的定义表明，形式系统是纯形式的，即系统中所处理的只是符号、公式以及它们的变形等等，而完全不涉及它们的内容及意义，因此，形式系统也可看作是无意义的符号推演。这种不依赖符号和公式的解释的纯符号推演，是为了保证公式证明的严谨性和可靠性。

形式系统一经构造完成之后，本身立刻就成为研究的对象，成为对象理论，它所使用的形式语言，称为对象语言。以形式系统为对象理论的理论称为元理论或元逻辑，它是对形式系统的性质进行刻画或说明的理论，它所使用的语言是自然语言加特定的符号语言，称为元语言。元理论是从语法和语义两个角度来研究形式系统的性质的。

语法是对形式系统的构造以及对形式系统的语法性质进行刻画的理论，前者是用形式化方法构造一形式系统，例如，依次给出字母表、形成规则、公理、变形规则，最后是根据变形规则从公理推出定理。后者是研究已构造的形式系统的一系列语法特性，例如，一系统内的任一合式公式是否都在该系统内可证（语法一致性问题）；一系统内的任一合式公式是否都在该系统内可证或不可证，或者把一系统中不可证的公式加到公理中，该系统是否导致矛盾

(语法完全性问题)等等。

语法研究要使用语法元语言,例如,我们在陈述 I 系统的形式语言时,使用的符号:Γ,A,$\vdash$等,都是语法语言,通常所谓“合式公式”,“证明”,“可证”,“定理”,“推演”等都是语法概念,用语法语言陈述的定理称语法定理。

语义是对形式系统的解释以及对系统的语义性质进行刻画的理论。解释是把形式系统与一定的对象域联系起来,从而赋予形式系统内的初始符号和公式以一定的意义,例如,经解释后,系统中的某些符号成为概念,合式公式成为有意义的命题或命题函项,变形规则成为具有保真性的推理规则,定理成为有效的推理形式等,而解释后的形式系统称为形式系统的模型;对系统的语义性质进行刻画,例如,一系统内所有可证的公式是否都是逻辑真的公式或有效的推理形式(语义可靠性);一系统内所有与真命题相应的公式是否都是系统内可证的公式(语义完全性)等等。

语义研究要使用语义语言,例如,“真”,“假”,“重言式”,“满足”,“有效”,“解释”,“模型”等都是语义概念,用语义语言陈述的定理叫语义定理(与元定理相对应,用对象语言陈述的系统内的定理叫内定理)。

对象理论和元理论,以及对象语言和元语言,是不同层次的两种理论或层次,如不注意区分,则会导致逻辑悖论,例如有命题“本命题是假的”,我们设“本命题是假的”这一命题为 C,C 是用元语言表示的元命题,其中“本命题”一词所指称的命题是对象语言表示的对象命题,设为 C',则 C 为:“C' 是假的”(如果 C' 为空集,则 C 无意义)。如果将“本命题”一词所指称的命题当作 C,即 $C=C'$,就会导致悖论:C 是真的当且仅当 C 是假的。原因在于把 C 和 C' 是两个不同层次的命题(一为元命题,一为对象命题),混在一个命题中,互相包含,从而导致悖论。

以下是一个极其简单的形式系统的例子。

设形式系统 $I=\langle A(I),E(I),A_x(I),R(I)\rangle$：

(1)符号表($A(I)$):0(个体常项符号),′(一元运算(或函词)符号),≡(二元谓词符号)。

(2)形成规则($E(I)$)：

项的形成规则(也称项的归纳定义)：

①0 是项；

②如果 t 是项,则 t'是项。

③只有①和②的项是 I 的项。

换言之,I 的项集 $\text{Term}=\{0,0',0'',\cdots\}$。

公式的形成规则：

I 中仅有形如 $t_1\equiv t_2$的公式,其中 t_1,t_2是项。所有公式都是原子公式。因此,在 I 中

公式集 $\text{Formula}=$原子公式集 $\text{Atom}=\{t_1\equiv t_2 \mid t_1,t_2\in \text{Term}\}$。

(3)公理集($A_x(I)$)为空集。

(4)推演规则($R(I)$)：

① $\varnothing \vdash 0\equiv 0$(表示由空集$\varnothing$可推出 $0\equiv 0$)；

② $t_1\equiv t_2 \vdash t_1\equiv t_2$(模式,$0\equiv 0 \vdash 0'\equiv 0'$是②的一个例,表示由 $0\equiv 0$ 可推出 $0'\equiv 0'$)。

显然,I 的形式演绎中包含下列定理：

$0\equiv 0,0'\equiv 0',0''\equiv 0'',\cdots$