教育科学“十五”国家规划课题研究成果

高等学校经济管理学科数学基础教材

高等数学 下册

徐文雄 主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

教育科学“十五”国家规划课题研究成果
高等学校经济管理学科数学基础教材

高等数学

下　册

徐文雄　主编

赵仪娜　魏　平　李换琴　李　萍　刘晋平　合编

高等教育出版社

内容提要

本书是教育科学"十五"国家规划课题"21世纪中国高等学校经济管理类数学课程教学内容和课程体系的创新与实践"项目成果之一，针对经济管理类学科人才培养总体要求和学科特点，按照教育部高等学校非数学专业数学课程教学指导委员会《经济管理类高等数学课程教学基本要求》编写而成。

本书是《高等数学》的下册，内容包括：向量代数与空间解析几何、多元函数微分学及其应用、重积分及其应用、曲线积分与曲面积分、常微分方程和差分方程初步。除一般高等数学教学基本内容之外，增加了微积分在经济与管理科学中的应用，介绍了许多具有专业特点的应用实例、数学概念和数学模型。每章末配有典型问题解析（含历届考研典型题）、练习题(A)（基本题）、练习题(B)（提高题）及习题参考答案等，供师生在教学中采用。

本书可作为高等学校经济管理类专业学生高等数学教材或教学参考书，也可供其他专业学生和报考硕士研究生的考生参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．下册/徐文雄主编．—北京：高等教育出版社，2004.12

ISBN 7-04-015553-2

Ⅰ．高…　Ⅱ．徐…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第109176号

策划编辑 马　丽　**责任编辑** 舒敬江　**封面设计** 李卫青　**责任绘图** 黄建英
版式设计 王　莹　**责任校对** 金　辉　**责任印制** 宋克学

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京大容彩色印刷有限公司		
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2004年12月第1版
印　　张	19.5	**印　　次**	2004年12月第1次印刷
字　　数	360 000	**定　　价**	20.60元

物 料 号： 15553-00

目　　录

第七章　向量代数与空间解析几何

第八章　多元函数微分学及其应用

第九章　重积分及其应用

第十章　曲线积分与曲面积分

第十一章 常微分方程

第十二章 差分方程初步

第七章

向量代数与空间解析几何

平面解析几何以笛卡儿直角坐标系为桥梁,使平面上的点和图形与代数中的数和方程建立联系,拓展出了用代数方法解决几何问题,用几何直观思考代数问题的巨大平台.在一元函数微积分中,平面解析几何发挥着重要的作用.同样道理,在多元函数微积分中,空间解析几何也将起到不可或缺的作用.空间解析几何在引入向量的概念和运算后,利用代数手段把我们从二维空间带入三维空间,也为有机会进入 n 维空间铺平了道路.

本章引入向量概念和向量运算,并运用向量这一有力工具,研究空间中点、线、面、体及其相互关系.

第一节　向量及其坐标表示

一、向量的概念

在我们的生活中,除了温度、时间等仅有大小的量(称为标量)外,还有位移、速度、力、力矩等这类既有大小,又有方向的量,即所谓向量.

定义 7.1　既有大小又有方向的量叫**向量**(或**矢量**).

在数学中,常用一条有向线段来表示向量.有向线段的长度表示其大小,有向线段的方向表示其方向.例如,以 O 为起点,P 为终点的有向线段所表示的向量,记作 $\overrightarrow{OP}$,如图 7-1 所示.也常用黑体字母 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{F}$ 或带箭头的字母 $\vec{a}$、$\vec{r}$、$\vec{v}$、$\vec{F}$ 来表示向量.

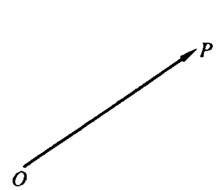

图 7-1

在实际问题中,向量一般都与其起点有关,例如力,既要考虑它的大小、方向,也要考虑它的作用点.质点的速度同样要考虑的不仅是大小和方向,也一定要注意该质点的位置.在数学上,为了研究和应用的方便,我们研究的向量不考虑其起点或位置,而是把向量抽象为只

有大小和方向的量，我们称其为**自由向量**，简称**向量**.

如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等，且方向相同，我们就说向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是相等的，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 从几何上看，经过平移后能完全重合的向量被视为相等的.

向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小叫做向量的长度或模，记作 $|\boldsymbol{a}|$. 模等于 1 的向量叫**单位向量**，常记为 $\boldsymbol{e}$. 模等于零的向量叫**零向量**，记作 $\boldsymbol{0}$. 零向量被看成起点与终点重合的向量，它有任意方向.

两个非零向量如果它们的方向相同或相反，我们说这两个向量**平行**. 向量 $\boldsymbol{a}$ 平行于向量 $\boldsymbol{b}$，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

当两个平行向量的起点放在同一点时，它们的终点和公共起点必在同一条直线上. 因而，两向量平行也说两向量**共线**.

当三个向量或三个以上的向量的起点放在同一点时，如果它们的终点和公共起点在同一平面上，我们说这些向量**共面**.

二、向量的线性运算

1. 向量的和与差

首先我们定义两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**，即向量的加法.

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，在我们的研究空间任取一点 A，如图 7－2 所示，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再以 B 为起点，作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连接 AC，我们称向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这样得到两向量之和的方法叫做向量相加的三角形法则.

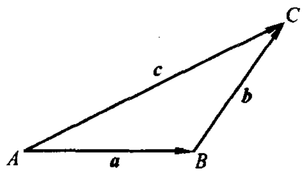

图 7－2

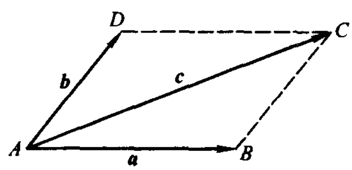

图 7－3

力学上有一种求合力的平行四边形法则，如图 7－3 所示. 比较图 7－2 和图 7－3，这种平行四边形法则等效于三角形法则. 因此，求两相量之和时，即可以用三角形法则，也可以用这种平行四边形法则.

向量的加法符合下列运算规律：

(1) 交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) 结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

由图 7－3，利用三角形法则，易见 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$，即交换律成立. 从图 7－4 不难看出加法符合结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$. 而且三个

向量相加的和为以第一个向量的起点为起点,最后一个向量的终点为终点的向量.

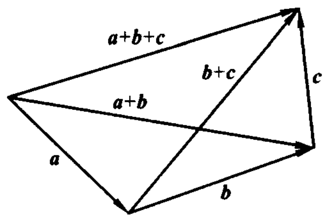

图 7－4

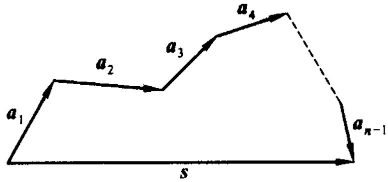

图 7－5

由向量加法的交换律和结合律不难推广出:n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$($n\geqslant3$)相加可写成

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n.$$

仿三个向量的加法,n 个向量相加的法则为:将前一向量的终点作为后一向量的起点,依次作向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$,再以第一向量的起点为起点,最后一个向量的终点为终点作一向量,这个向量即为所求的和.如图 7－5 所示

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n.$$

我们把与向量 $\boldsymbol{a}$ 大小相同方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**,记作 $-\boldsymbol{a}$.

现在我们可以定义两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**差**

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

特别,当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 时,有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}(\text{起点与终点重合}).$$

图 7－6 是画 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的两个方法.(a) 以 $\boldsymbol{a}$ 的终点为起点作 $-\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $-\boldsymbol{b}$ 终点的向量为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$;(b) 以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为起点,$\boldsymbol{a}$ 的终点为终点的向量为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

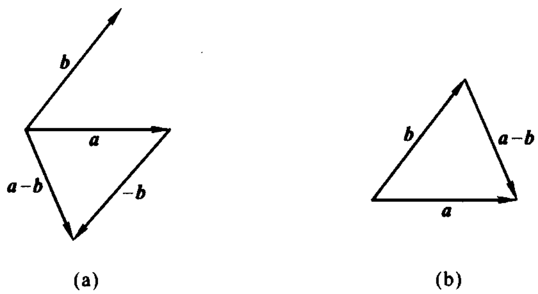

图 7－6

另外,由三角形三边关系,有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|;\ |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

第一个式子在 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时等号成立,第二个式子在 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时等号成立.

2. 向量的数乘

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$,它是一个向量,它的模为 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$,它的方向当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同,当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反.

向量的数乘符合以下规律:

(1) 结合律:$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

这是因为 $|\lambda(\mu\boldsymbol{a})|=|\mu(\lambda\boldsymbol{a})|=|(\lambda\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda\mu||\boldsymbol{a}|$,而且它们有相同的方向.

(2) 分配律:$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$(图 7-7(a)(b)),

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}\text{(图 7-7(c))}.$$

由图 7-7 知,分配律是成立的.

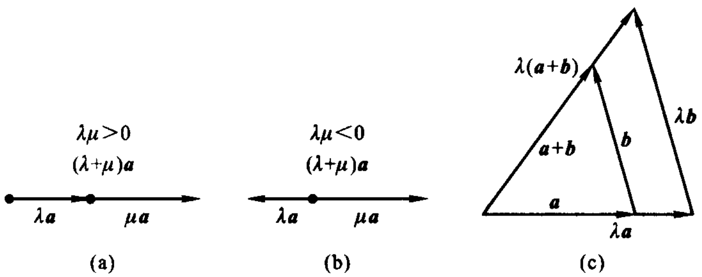

图 7-7

向量的加法和数乘运算统称为向量的**线性运算**.

我们已经知道模等于 1 的向量是单位向量.如果用 $\boldsymbol{e}$ 表示与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量,那么由数乘可知

$||\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{e}|=|\boldsymbol{a}|$,又 $|\boldsymbol{a}|>0$,使 $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向,因而

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}.$$

由于 $|\boldsymbol{a}|\neq0$,因此,上式可写成

$$\boldsymbol{e}=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}\text{,或记作 }\boldsymbol{e}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

这说明一个向量乘以它的模的倒数所得的向量为与此向量同向的单位向量.我们常用这个单位向量表示该向量的方向.因此,把向量 $\boldsymbol{a}$ 写为 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\left(\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\right)$,明晰地体现了向量 $\boldsymbol{a}$ 的两个特征:大小和方向.

例 1 求平分有共同起点的向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角的向量.

解 设所求向量为 $\boldsymbol{c}$,则

$$c = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} + \frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}.$$

如图 7－8 所示(请读者考虑为什么?).

定理 7.1 设向量 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$,那么,向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是:存在唯一的实数 λ,使 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$.

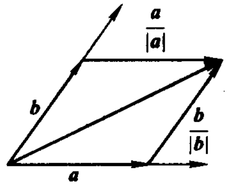

图 7－8

证 条件的充分性正是向量数乘的定义. 现证明必要性:

设 $\boldsymbol{b} /\!/ \boldsymbol{a}$,取 $|\lambda| = \frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$,当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时 λ 取正值,当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时 λ 取负值,即有 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$,这不仅因为 $\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 同向,且

$$|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}| = \frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|.$$

再证 λ 是唯一的,设 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b} = \mu\boldsymbol{a}$,两式相减,$(\lambda - \mu)\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$,则 $|\lambda - \mu||\boldsymbol{a}| = 0$.因为 $|\boldsymbol{a}| \neq 0$,故 $|\lambda - \mu| = 0$,从而 $\lambda = \mu$,所以 λ 是唯一的.

三、向量的投影

定义 7.2 设有数轴 $\boldsymbol{l}$ 和向量 $\boldsymbol{a}$,过 $\boldsymbol{a}$ 的起点 A 和终点 B 分别作二平面 π_1 和 π_2 垂直于 $\boldsymbol{l}$,分别交 $\boldsymbol{l}$ 于 A'、B' 两点,则有向线段 $\overrightarrow{A'B'}$ 的数值(当与 $\boldsymbol{l}$ 同向,为其长度;当与 $\boldsymbol{l}$ 反向,为其长度的负值)叫做 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{l}$ 上的**投影**(或**射影**),记作 $\mathrm{Prj}_l\boldsymbol{a}$,如图 7－9 所示.

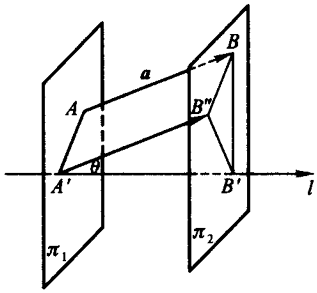

图 7－9

平移向量 $\boldsymbol{a}$ 使其起点 A 与投影 A' 重合,此时 $\boldsymbol{a}$ 的正向与 $\boldsymbol{l}$ 轴的正向的夹角记为 $\theta(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$,则我们有

$$\mathrm{Prj}_l\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\cos\theta. \tag{1}$$

这样,我们不难得到投影的如下性质:

性质 1: $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{l} \Leftrightarrow \mathrm{Prj}_l\boldsymbol{a} = 0$;

性质 2: $\mathrm{Prj}_l(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_n) = \mathrm{Prj}_l\boldsymbol{a}_1 + \mathrm{Prj}_l\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \mathrm{Prj}_l\boldsymbol{a}_n$;

性质 3: $\mathrm{Prj}_l(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda\mathrm{Prj}_l\boldsymbol{a}$.

(请读者自证.)

四、空间直角坐标系,向量与点的坐标

1. 空间直角坐标系

我们知道，给定一个点，一个方向及单位长度，就确定了一根数轴. 单位向量既确定了方向，又确定了单位长度，这样，给一个点及一个单位向量就确定了一根数轴. 设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{e}$ 确定了数轴 $\boldsymbol{l}$，对于轴上任意一点 P，对应一个向量 $\overrightarrow{OP}$，由 $\overrightarrow{OP}/\!/\boldsymbol{e}$ 及定理 7.1 知，存在唯一实数 a，使 $\overrightarrow{OP}=a\boldsymbol{e}$，并且 $\overrightarrow{OP}$ 与实数 a 一一对应，这样就建立了点、向量和数的一一对应关系，如图 7－10 所示. 换言之，几何点 P 可以用向量 $a\boldsymbol{e}$ 或实数 a 表示. 我们称 a 为数轴 $\boldsymbol{l}$ 上点 P 的坐标.

下面我们引入三维空间的概念.

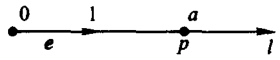

图 7－10

在空间取定一点 O 和三个两两垂直的单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，就确定了三根都以 O 为原点的两两垂直的数轴，依次记为 x 轴（横轴），y 轴（纵轴），z 轴（竖轴），统称坐标轴，它们构成一个空间直角坐标系，称为 $Oxyz$ 坐标系. 通常把 x 轴和 y 轴置于水平面上，而 z 轴则平行于铅垂线；它们的正向一般符合右手法则：即右手竖起拇指，伸直食指，并让中指和它们垂直，常以食指为 x 轴，中指为 y 轴，拇指为 z 轴，如图 7－11 所示. 三根坐标轴任意两个决定的平面叫坐标面. x 轴和 y 轴决定的平面叫 xOy 坐标面，还有 yOz 和 zOx 坐标面. 这三张两两垂直的坐标面将空间分为八部分，称为八个卦限，如图 7－12 所示.

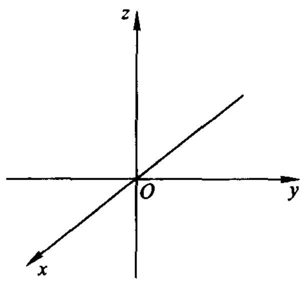

图 7－11

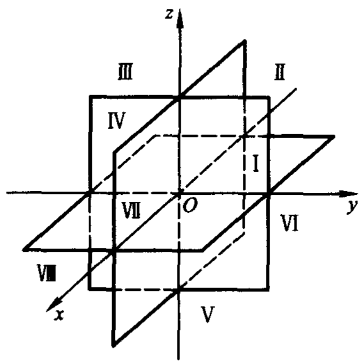

图 7－12

即 xOy 坐标面的四个象限Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ的上方依次是Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ四个卦限，下方依次是Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ四个卦限.

2. 向量的坐标表示

任一向量 $\boldsymbol{a}$ 在三个坐标轴上的投影：a_x,a_y,a_z 称为 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，记 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ 或 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，而三个有序数 a_x,a_y,a_z 被视为一个向量在三个坐标轴上的投影，则其确定唯一向量 $\{a_x,a_y,a_z\}$，这样向量 $\boldsymbol{a}$ 和三个有序数 a_x，

a_y, a_z 之间建立了一一对应的关系.

下面用代数形式描述向量的模、方向和线性运算.

(1) 模：$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$，如图 7-13 所示； (2)

(2) 方向：$\boldsymbol{a}$ 与 x、y、z 轴的夹角分别记为 α, β, γ. 如果 α, β, γ 确定了，那么 $\boldsymbol{a}$ 的方向也就确定了. 我们称 α, β, γ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的三个方向角，而它们的余弦 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦，由投影定义，有

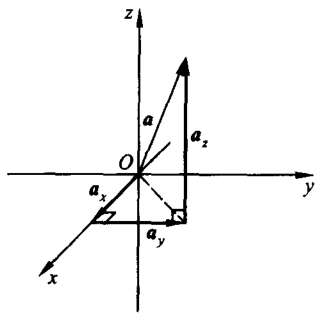

图 7-13

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \qquad (3)$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

及

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (4)$$

(3) 加法与数乘

设 $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$，$\boldsymbol{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ 为两个向量，λ、μ 为两个实数，则

$$\lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b} = \{\lambda a_x + \mu b_x, \lambda a_y + \mu b_y, \lambda a_z + \mu b_z\}.$$

若 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z} (= \lambda)$. (5)

(5) 式的连比中，分母可以有零，但要求分母为零的分子同时为零.

3. 点的坐标，两点间距离与定比分点公式

设 M 是空间一点，我们称 $\overrightarrow{OM}$ 为点 M 关于原点 O 的**向径**. 称 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标为点 M 的坐标，记为 (x, y, z). 显然，当向量以原点为起点时，终点的坐标也是向量的坐标. 故此，在不致引起混淆的情况下，有时我们对点 (x, y, z) 和向量 $\{x, y, z\}$ 无需严格区分.

例 2 设点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为已知两点，求 M_1 与 M_2 两点间的距离.

解 由 $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \{x_2, y_2, z_2\} - \{x_1, y_1, z_1\}$，得两点间距离公式

$$d = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (6)$$

例 3 求点 $M(x, y, z)$，它分 M_1、M_2 成定比 $\dfrac{M_1M}{MM_2} = \lambda$，其中 M_1M, MM_2

是两个有向线段的值.

解 我们可将有向线段值之比写成向量的形式：$\overrightarrow{M_1M} = \lambda\,\overrightarrow{MM_2}$

即 $$\{x - x_1, y - y_1, z - z_1\} = \lambda\{x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z\},$$

故 $x - x_1 = \lambda(x_2 - x)$，从而 $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$，同样地，

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

特别，当 $\lambda = 1$ 时，得中点公式：

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}, z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

第二节 数量积、向量积和混合积

一、数量积

1. 数量积的概念和性质

设一物体在力 $\boldsymbol{F}$ 作用下沿直线从点 A 移动到点 B，用 $\boldsymbol{S}$ 表示位移$\overrightarrow{AB}$，由物理学知道，力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为

$$W = |\boldsymbol{F}||\boldsymbol{S}|\cos\theta,$$

其中 θ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 的夹角，如图 7－14 所示.

去掉物理意义，考虑任意两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，记 θ(或$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$)为它们的夹角，于是我们有

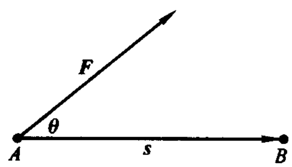

图 7－14

定义 7.3 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是夹角为 θ 的两个向量，实数 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**(或**点积**，也叫**内积**)，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，读作"$\boldsymbol{a}$ 点乘 $\boldsymbol{b}$"或"$\boldsymbol{a}$ 点 $\boldsymbol{b}$"，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta. \quad (1)$$

由投影定义 7.2，得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a},$$

即两个向量的数量积是一个向量的模乘以另一个向量在此向量上的投影.

由定义 7.3 变力做功可记为 $W = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{S}$.

数量积是由两个向量所决定的一个标量，它具有以下性质：

(1) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$;

(2) 交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

(3) 分配律：$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$;

(4) 结合律：$(\lambda \boldsymbol{a})\cdot \boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{b})$，$\lambda$ 为实数.

三个向量的内积没有意义，所以这里的结合律是向量数乘的结合律.

这里对(3)给出证明，(1)、(2)、(4)由读者自证.

证 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}|(\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}+\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c})$

$$=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}.$$

即结合律成立.

2. 数量积的坐标表示

由定义知，对单位坐标向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 而言，有 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1,\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$，所以，若 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，那么

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}\\&\quad+a_yb_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+a_yb_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}\\&\quad+a_zb_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\\&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \tag{2}$$

3. 数量积的几何应用

数量积在几何上应用很广，下面用例题来说明.

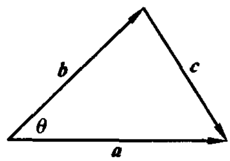

图 7－15

(1) 向量的模　由定义知 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$，所以 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$.

例 1　试用向量证明三角形的余弦定理.

解　如图 7－15 所示，

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{c}|^2&=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-2\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\\&=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle.\end{aligned}$$

这正是余弦定理.

(2) 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 间的夹角，由定义 7.3 得

$$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}. \tag{3}$$

例 2　已知三点 $A(2,1,1,)$、$B(3,2,1)$、$C(3,1,2)$，求 $\angle BAC$.

解　作向量 $\overrightarrow{AB}$ 及 $\overrightarrow{AC}$，$\angle BAC$ 就是向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角，这里 $\overrightarrow{AB}=\{1,1,0\}$，$\overrightarrow{AC}=\{1,0,1\}$，从而

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times1+1\times0+0\times1=1,$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2},$$

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

代入公式,得

$$\cos\angle BAC=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{2}.$$

所以

$$\angle BAC=\frac{\pi}{3}.$$

例 3 证明三角形三条高交于一点.

证明 如图 7-16,作$\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{AC}$的高交于H,则$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}$,延伸$\overrightarrow{CH}$交$\overrightarrow{AB}$,则本题即证明$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$.

因为$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$,$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

由
$$\begin{aligned}\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}&=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AH})\cdot\overrightarrow{AB}\\&=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})\\&=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}\\&=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BH}=0.\end{aligned}$$

故$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$.

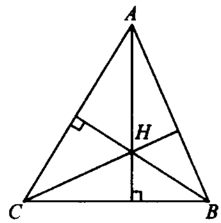

图 7-16

二、向量积

1. 向量积的概念和性质

物理学中的力矩是这样规定的:设 O 为一杠杆 L 的支点,有一个力 $\boldsymbol{F}$ 作用于这个杠杆上点 P 处,$\boldsymbol{F}$ 与$\overrightarrow{OP}$的夹角为 θ 如图 7-17 所示,则力 $\boldsymbol{F}$ 对支点 O 的力矩是一向量 $\boldsymbol{M}$,它的模

$$|\boldsymbol{M}|=|\overrightarrow{OP'}||\boldsymbol{F}|=|\overrightarrow{OP}||\boldsymbol{F}|\sin\theta.$$

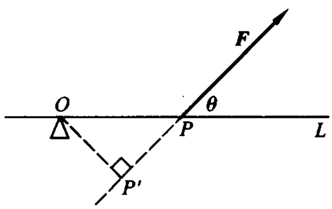

图 7-17

而 $\boldsymbol{M}$ 的方向垂直于$\overrightarrow{OP}$与$\boldsymbol{F}$ 所决定的平面,$\boldsymbol{M}$ 的指向是按右手规则从$\overrightarrow{OP}$以不超过 π 的转向$\boldsymbol{F}$ 的角来确定的,即当右手的四个手指从$\overrightarrow{OP}$以不超过 π 的角向 $\boldsymbol{F}$ 握拳时,大拇指的指向就是$\boldsymbol{M}$ 的方向.

抛开力矩的背景,我们引入向量积的概念.

定义 7.4 设$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是夹角为 θ 的两个向量.模为$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$,方向为垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和$\boldsymbol{b}$ 组成的平面且从$\boldsymbol{a}$ 的方向以右手规则转 θ 角到$\boldsymbol{b}$ 的方向的向量,称为 $\boldsymbol{a}$ 和