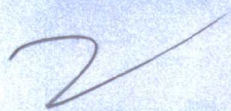


研究生教学用书

公共基础课系列

科技应用中的微分变分模型

*Differential and Variational Models
in Applications of Science and Technology*



徐 长 发

BOOKS FOR GRADUATE STUDENTS

华中科技大学出版社

研究生教学用书
公共基础课系列

科技应用中的微分变分模型

徐长发

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

科技应用中的微分变分模型/徐长发
武汉:华中科技大学出版社,2004年9月
ISBN 7-5609-3255-X

I. 科…

II. 徐…

III. 微分模型-变分模型-应用数学

IV. O29

科技应用中的微分变分模型

徐长发

责任编辑:杨志锋

封面设计:刘 卉

责任校对:刘 飞

责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:华中科技大学惠友文印中心

印 刷:华中科技大学印刷厂

开本:787×960 1/16

印张:21.75

字数:397 000

版次:2004年9月第1版

印次:2004年9月第1次印刷

定价:32.00元

ISBN 7-5609-3255-X/O·332

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

内 容 简 介

本书重点讨论应用于一些科技领域的偏微分方程模型和变分模型,书中突出实际应用问题的背景和研究要求,突出问题的内在规律,突出这些规律的数学描述含义,突出建模的原理。

本书内容丰富,可读性强,利于自学,利于扩展知识,利于提高数学建模能力。

本书可作为大学理工科高年级学生、研究生和博士研究生的数学模型课程的教材,可作为非力学专业的力学教材,可作为偏微分方程及其数值解法课程的配套教材,也可作为工程技术人员进行应用研究的参考书。

ABSTRACT

This book focuses on the discussion of differential equation models and variational models applied to some scientific and technological fields. The book gives prominence to the background and the research need of practical application issues, to the internal law of problems, to the implication of the mathematical description of these laws, and to the principle of the model building.

This book is rich in content, has a strong readability, is propitious to knowledge expansion, and to the improvement of mathematical model building ability.

This book can be used as a textbook of mathematical model course for college engineering majors in high grades, graduate students and Ph. D. s, and can also be used as a textbook of mechanics for non-mechanical majors, and can further be used as a textbook of differential equation and its numerical method course, and last, a reference book for application research by engineers and technicians.

写在“研究生教学用书”出版 15 周年前岁

“接天莲叶无穷碧，映日荷花别样红。”今天，我国的教育正处在一个大发展的崭新时期，而高等教育即将跨入“大众化”的阶段，蓬蓬勃勃，生机无限。在高等教育中，研究生教育的发展尤为迅速。在盛夏已临，面对池塘中亭亭玉立的荷花，风来舞举的莲叶，我深深感到，我国研究生教育就似夏季映日的红莲，别样多姿。

党的十六大报告以空前的力度强调了“科教兴国”的发展战略，强调了教育的重大作用，强调了教育的基础性、全局性、先导性，强调了在社会主义建设中教育的优先发展的战略地位。从报告中，我们可以清楚看到，对高等教育而言，不仅赋予了重大的历史任务，而且更明确提出了要培养一大批拔尖创新人才。不言而喻，培养一大批拔尖创新人才的历史任务主要落在研究生教育肩上。“百年大计，教育为本；国家兴亡，人才为基。”国家之间的激烈竞争，在今天，归根结底，最关键的就是高级专门人才，特别是拔尖创新人才的竞争。由此观之，研究生教育的任务可谓重矣！重如泰山！

前事不忘，后事之师。历史经验已一而再、再而三地证明：一个国家的富强，一个民族的繁荣，最根本的是要依靠自己，要以“自力更生”为主。《国际歌》讲得十分深刻，世界上从来就没有什么救世主，只有依靠自己救自己，寄希望于别人，期美好于外力，只能是一种幼稚的幻想。内因是发展的决定性的因素。当然，我们决不应该也决不可能采取“闭关锁国”，自我封闭，固步自封的方式来谋求发展，重犯历史错误。外因始终是发展的必要条件。正因为如此，我们清醒看到了，“自助者人助”，只有“自信、自尊、自主、自强”，只有独立自主，自强不息，走以“自力更生”为主的发展道路，才有可能在向世界开放中，争取到更多的朋友，争取到更多的支持，充分利用好外部的各种有利条件，来扎扎实实地而又尽可能快地发展自己。这一切的关键就在于，我们要有数量与质量足够的高级专门人才，特别是拔尖创新人才。何况，在科技高速发展与高度发达，而知识经济已初见端倪的今天，更加如此。人才，高级专门人才，拔尖创新人才，是我们一切事业发展的基础。基础不牢，地动山摇；基础坚牢，大厦凌霄；基础不固，木凋树枯；基础深固，硕茂葱绿！

“工欲善其事，必先利其器。”自古凡事皆然，教育也不例外。教学用书是“传道授业解惑”培育人才的基本条件之一。“巧妇难为无米之炊”。特别是在今天，学科的交叉及其发展越来越多及越快，人才的知识基础及其要求越来越广及越高，因此，我一贯赞成与支持出版“研究生教学用书”，供研究生自己主动地选用。早在 1990 年，本套用书中的第一本即《机械工程测试·信息·信号分析》出版时，我就为此书

写了个“代序”，其中提出：一个研究生应该博览群书，博采百家，思路开阔，有所创见。但这不等于他在一切方面均能如此，有所不为才能有所为。如果一个研究生的主要兴趣与工作不在某一特定方面，他也可选择一本有关这一特定方面的书作为了解与学习这方面知识的参考；如果一个研究生的主要兴趣与工作在这一特定方面，他更应选择一本有关的书作为主要的学习用书，寻觅主要学习线索，并缘此展开，博览群书。这就是我赞成要为研究生编写系列的“研究生教学用书”的原因。今天，我仍然如此来看。

还应提及一点，在教育界有人讲，要教学生“做中学”，这有道理；但须补充一句，“学中做”。既要在实践中学习，又要在学习中实践，学习与实践紧密结合，方为全面；重要的是，结合的关键在于引导学生思考，学生积极主动思考。当然，学生的层次不同，结合的方式与程度就应不同，思考的深度也应不同。对研究生特别是对博士研究生，就必须是而且也应该是“研中学，学中研”，在研究这一实践中，开动脑筋，努力学习，在学习这一过程中，开动脑筋，努力研究；甚至可以讲，研与学通过思考就是一回事了。正因为如此，“研究生教学用书”就大有英雄用武之地，供学习之用，供研究之用，供思考之用。

在此，还应进一步讲明一点。作为一个研究生，来读“研究生教学用书”中的某书或其他有关的书，有的书要精读，有的书可泛读。记住了书上的知识，明白了书上的知识，当然重要；如果能照着用，当然更重要。因为知识是基础。有知识不一定有力量，没有知识就一定没有力量，千万千万不要轻视知识。对研究生特别是博士研究生而言，最为重要的还不是知识本身这个形而下，而是以知识作为基础，努力通过某种实践，同时深入独立思考而体悟到的形而上，即《老子》所讲的不可道的“常道”，即思维能力的提高，即精神境界的升华。《周易·系辞》讲了：“形而上谓之道，形而下谓之器。”我们的研究生要有器，要有具体的知识，要读书，这是基础；但更要有“道”，更要一般，要体悟出形而上。《庄子·天道》讲得多好：“书不过语。语之所贵者意也，意有所随。意之所随者，不可以言传也。”这个“意”，就是孔子所讲的“一以贯之”的“一”，就是“道”，就是形而上。它比语、比书，重要多了。要能体悟出形而上，一定要有足够数量的知识作为必不可缺的基础，一定要在读书去获得知识时，整体地读，重点地读，反复地读；整体地想，重点地想，反复地想。如同韩愈在《进学解》中所讲的那样，能“提其要”，“钩其玄”，以达到南宋张孝祥所讲的“悠然心会，妙处难与君说”的体悟，化知识为己之素质，为“活水源头”。这样，就可驾驭知识，发展知识，创新知识，而不是为知识所驾驭，为知识所奴役，成为计算机的存储装置。

这套“研究生教学用书”从第一本于1990年问世以来，到明年，就经历了不平凡的15个春秋。从研究生教育开始以来，我校历届领导都十分关心研究生教育，高度重视研究生教学用书建设，亲自抓研究生教学用书建设；饮水思源，实难忘怀！“逝者如斯夫，不舍昼夜。”截至今天，“研究生教学用书”的出版已成了规模，蓬勃发

展.目前已出版了用书69种,有的书发行了数万册,有22种分别获得了国家级、省部级教材奖、图书奖,有数种已为教育部列入向全国推荐的研究生教材,有20种一印再印,久销不衰.采用此书的一些兄弟院校教师纷纷来信,称赞此书为研究生培养与学科建设做出了贡献.我们深深感激这些鼓励,“衷心藏之,何日忘之?!”没有读者与专家的关爱,就没有我们“研究生教学用书”的发展.

唐代大文豪李白讲得十分正确:“人非尧舜,谁能尽善?”我始终认为,金无足赤,物无足纯,人无完人,文无完文,书无完书.“完”全了,就没有发展了,也就“完”蛋了.江泽民同志在党的十六大报告中讲得多么深刻:“实践没有止境,创新也没有止境.”他又指出,坚持“三个代表”重要思想的关键是与时俱进.这套“研究生教学用书”更不会例外.这套书如何?某本书如何?这样的或那样的错误、不妥、疏忽或不足,必然会有.但是,我们又必须积极、及时、认真而不断地加以改进,与时俱进,奋发前进.我们衷心希望与真挚感谢读者与专家不吝指教,及时批评.当局者迷,兼听则明;“嚶其鸣矣,求其友声.”这就是我们的肺腑之言.当然,在这里,还应该深深感谢“研究生教学用书”的作者、审阅者、组织者(华中科技大学研究生院的有关领导和工作人员)与出版者(华中科技大学出版社的编辑、校对及其全体同志);深深感谢对“研究生教学用书”的一切关心者与支持者,没有他们,就决不会有今天的“研究生教学用书”.

我们真挚祝愿,在我们举国上下,万众一心,在“三个代表”重要思想的指引下,努力全面建设小康社会,加速推进社会主义现代化,为实现中华民族伟大复兴,“芙蓉国里尽朝晖”这一壮丽事业中,让我们共同努力,为培养数以千万计高级专门人才、特别是一大批拔尖创新人才,完成历史赋予研究生教育的重大任务而做出应有的贡献.

谨为之序.

中国科学院院士
华中科技大学学术委员会主任
杨叔子
2003年7月于喻园

前 言

随着科学技术的发展,工程、数学、计算机的结合表现得愈来愈广泛且愈来愈深刻.

用数学方法解决实际问题,往往首先需要针对实际问题建立相应的数学模型,要用计算机进行离散模拟,要用数据图形、图表等形式表现和分析实际问题的内在规律,还需要对上述过程作出修正,直至满意地解决实际问题为止.这种数学模型——模拟计算——模拟显示——模拟控制过程,这种解决实际问题的新的一体化的方法,是最方便快捷的,最经济实用的,最切实可行的.

建立数学模型也就是用数学形式表述实际应用问题内在的量化规律.这不仅要求掌握实际应用问题内在的量化关系,而且要求掌握这些量化关系用数学形式表现的规律性.这两方面知识是同等重要的.然而读者在这两方面知识中普遍存在着不同程度的障碍,或一方面知之较多而另一方面知之较少,或两方面知识不能融会贯通.本书试图对这两方面知识贯通讲解,试图在这两方面知识之间架设“桥梁”,试图提高读者关于分析问题和解决问题的能力,这就是本书的写作目的.

本书重点介绍的是有关偏微分方程和变分问题的模型,这些模型在众多的学科和应用领域中都有着非常广泛的应用.本书中的数学模型所涉及的知识范围,在数学方面涉及描述稳态过程的椭圆型偏微分方程,描述扩散过程的抛物型偏微分方程,描述波动过程的双曲型偏微分方程;在科技方面涉及材料力学、弹性力学、结构力学、振动力学、流体力学、电磁学、电力过程、最优控制和生态学等学科领域.基于本书的写作目的,书中仅突出各种实际应用问题的背景和研究要求,突出这些问题的内在规律,突出这些规律的数学描述含义,突出建模.至于所建立的数学模型是否可解以及如何数值求解问题,书中并未涉及,读者可从相关书籍中获取知识.

为了增强可读性,书中不仅体现了为顺利阅读所需的学习思维方式,由浅入深,深入浅出,解释数学描述的含义,而且体现了为提高应用研究能力所需要的扩散思维方式,指明每种模型在众多学科中的扩展性.

本书可作为数学模型课程的教材,可作为非力学专业的力学教材,可作为偏微分方程及其数值解法课程的配套教材.本书可作为大学理工科高年级学生、研究生和博士生的学习参考书,也可供科技工作者参考.

由于作者水平有限,书中错误在所难免,敬请广大读者指正.

作 者

于武汉华中科技大学

2004年8月

“研究生教学用书”可供书目

书 名	作 者
机械工程测试。信息·信号分析(第二版)(教育部推荐教材,获国家级 优秀教材奖、获部委优秀教材奖、省科技进步奖)	卢文祥等
应用泛函简明教程(第三版)	李大华
时间序列分析与工程应用(上)(下)(获中国图书奖、国家图书奖)	杨叔子等
偏微分方程数值解法(第二版)	徐长发
数字语音处理(获部委优秀教材奖、省科技进步奖)	姚天任
辩证法史论稿	阳作华等
机械振动系统——分析、测试、建模与对策(上)(下)(第二版) (教育部推荐教材,获部委优秀教材奖)	师汉民等
薄膜生长理论(获部委优秀教材奖)	王敬义
高等弹性力学	钟伟芳等
硒的化学、生物化学及其在生命科学中的应用	徐辉碧等
水电系统最优控制	张勇传
高等工程数学(第三版)	于 寅
并行分布式程序设计	刘 健
损伤力学(获中国图书奖)	沈 为
非线性分析——理论与方法	胡适耕
模糊专家系统	李 凡
现代数字信号处理	姚天任等
动态传热学	郭方中
内燃机工作过程模拟	刘永长
半秩序列理论及应用	胡必铨
化学计量学	陆晓华等
自然辩证法新编(第二版)	李思孟等
机电动力系统分析	辜承林
并行程序设计方法学	刘 健
加工过程数控(第二版)(教育部推荐教材)	宾鸿赞
近代数学基础	于 寅
气体电子学	丘军林
工程噪声控制学	黄其柏
最优化原理	胡适耕

书 名	作 者
随机过程(第二版)	刘次华
信息存储技术原理	张江陵
应用群论导引	张端明
高等教育管理学	姚启和
稳定性的理论方法和应用	廖晓昕
动力工程现代测试技术	黄素逸
行政学原理(第二版)(教育部推荐教材)	徐晓林
中国传统文化十二讲	王炯华
实用小波方法(第二版)	徐长发
建筑结构诊断鉴定与加固修复	李惠强
国际经济学	方齐云
遗传算法及其在电力系统中的应用	熊信银等
英语科技学术论文——撰写与投稿(第二版)	朱月珍
非线性固体计算力学	宋天霞
现代制造系统的监控与故障诊断	周祖德
制造系统性能分析建模——理论与方法	李培根
快速成形技术	王运赣
智能系统非经典数学方法	朱剑英
面向对象程序设计及其应用	刘正林
激光先进制造技术	郑启光
断裂力学及断裂物理	赵建生
水力发电过程控制	叶鲁卿
科学社会主义理论与实践	编写组
现代实用光学系统	陈海清
矩阵论	杨明 刘光忠
微观经济的数理分析	胡适耕
矩阵论学习辅导与典型题解析	林升旭
数值分析	李 红
钢筋混凝土非线性有限元及其优化设计	宋天霞等
快速模具制造及其应用	王运赣
高等流体力学	王献孚
工业激光技术	丘军林
计算流体力学	李万平
科技应用中的微分差分模型	徐长发
动力机械电子控制	张宗杰

目 录

第 1 章 杆件弹性理论及其应用中的微分方程模型和变分模型	(1)
§ 1 杆件材料的力学性能	(1)
§ 2 受拉(压) 弹性杆的微分方程模型	(4)
§ 3 受拉(压)弹性杆的变分模型	(6)
§ 4 纯弯梁的微分方程模型.....	(11)
§ 5 纯弯梁的变分模型	(21)
§ 6 压杆稳定性的微分方程模型	(28)
§ 7 压杆稳定性的变分模型.....	(39)
第 2 章 平面杆结构及其应用中的微分方程模型和变分模型	(45)
§ 1 桁架计算中的基本问题.....	(45)
§ 2 简单桁架关于节点位移的变分模型	(48)
§ 3 一般桁架关于节点位移的变分模型	(50)
§ 4 平面刚架关于节点位移的数学模型	(57)
§ 5 结构在确定位置方向上位移的变分模型	(71)
第 3 章 平面弹性理论及其应用中的微分方程模型和变分模型	(83)
§ 1 两类平面弹性问题	(83)
§ 2 基本微分关系	(86)
§ 3 边界条件	(89)
§ 4 按位移求解平面弹性问题的微分方程模型	(92)
§ 5 按应力求解平面弹性问题的微分方程模型	(96)
§ 6 平面弹性问题的极坐标微分方程模型	(106)
§ 7 平面问题关于变温应力的微分方程模型	(113)
§ 8 平面弹性问题中的位移变分模型.....	(118)
§ 9 柱体自由扭转的微分和变分模型.....	(126)
§ 10 薄板弯曲的微分方程模型	(134)
第 4 章 弹性振动的微分方程模型和能量方程模型	(143)
§ 1 单自由度系统自由振动微分方程模型	(143)
§ 2 单自由度系统受迫振动微分方程模型	(153)
§ 3 多自由度线性振动系统的微分方程模型	(160)
§ 4 弹性杆纵向振动的微分方程模型.....	(169)

§ 5	梁的弯曲振动微分方程模型	(175)
§ 6	连续介质弹性体振动建模中的某些规律性	(178)
§ 7	杆结构的振动微分方程模型	(182)
§ 8	自激振动与变参振动的微分方程模型	(188)
第 5 章	不可压缩流体运动的微分方程模型	(196)
§ 1	不可压缩流体运动基本量的描述	(196)
§ 2	不可压缩流体运动的基本方程	(200)
§ 3	二维理想不可压缩定常势流的微分方程模型	(204)
§ 4	二维理想不可压缩定常有旋流动的微分方程模型	(210)
§ 5	二维不可压缩定常和不定常粘性层流的微分方程模型	(212)
§ 6	二维波浪微分方程模型	(218)
第 6 章	二阶椭圆型微分方程模型及其等价的变分模型	(228)
§ 1	建立椭圆型微分方程模型时应注意的几个问题	(228)
§ 2	几个几何变分模型和两类变分方法	(235)
§ 3	几个变分与控制的模型	(242)
§ 4	几个应用问题的椭圆型微分方程模型	(251)
第 7 章	抛物型微分方程模型	(260)
§ 1	热传导微分方程模型	(260)
§ 2	物质扩散过程的微分方程模型	(264)
§ 3	化学反应中的扩散微分方程模型	(266)
§ 4	几个应用问题的抛物型微分方程模型	(269)
第 8 章	双曲型微分方程模型	(278)
§ 1	运动波微分方程模型	(278)
§ 2	无界弦波动微分方程模型	(284)
§ 3	有界弦波动微分方程模型	(289)
§ 4	三维弹性波微分方程模型	(293)
§ 5	二阶偏微分方程的分类及其解的特性	(300)
§ 6	人类繁衍的微分方程模型	(307)
§ 7	肿瘤生长规律的分方程模型	(313)
§ 8	传染病蔓延规律的分方程模型	(314)
§ 9	电力输运问题的微分方程模型	(320)
模型检索		(327)
参考文献		(334)

第1章 杆件弹性理论及其应用中的 微分方程模型和变分模型

在实际工程应用中,柱和梁被广泛应用. 为了分析它们在实际应用中受力与变形的关系,本章用力分析法将其简化为一维的微分方程模型来讨论,用能量分析法将其简化为一维的变分问题来讨论,并且讨论了这两类数学模型的相互转换关系. 这些建模思想方法对稳态的受力分析问题来说是普遍适用的. 本章还进一步讨论了杆结构受力分析的微分变分模型.

§1 杆件材料的力学性能

为了用数学模型描述杆件的受力与变形的关系,必须了解杆件受力与变形的数学描述方法,必须了解不同材料杆件(如铁杆、水泥柱等)的力学性能.

1. 杆件材料受力分析的基本假设

在实际工程应用中,杆件的应用是非常普遍的. 例如铸铁材料做成的杆件受外力拉伸,受外力压缩,受外力弯曲;又如钢筋混凝土材料做成的柱件受压变短,梁件受压变弯等. 为了保证这些杆件在实际应用中符合各种各样的要求,最关键、最基本的是要分析这些杆件的受力与变形之间的关系;为了用数学模型来分析杆件的受力和变形,就需对杆件材料的性能作一些简单的假设.

材料力学的基本假设.

(1) **均匀性和连续性假设.** 假设杆件材料的任何一个截面中,其物质的宏观分布是均匀的,不同截面的力学性能是相同的,这样便可采用微元分析方法了. 假设杆件在变形前后都是连续体,这样便可用连续函数来描述杆件的受力表现和变形表现了,就可采用微积分概念做力学分析了.

(2) **各向同性假设.** 由于组成材料的物质分布是均匀的,所以可以认为沿各个不同的方向材料具有相同的力学性能,这样的假设有利于将杆问题转化为数学中的一维问题. 当然,像由增强纤维(碳纤维、玻璃纤维等)与基体材料(环氧树脂、陶瓷等)制成的复合材料是各向异性的,这些问题可放在二维问题中讨论,本章节仅讨论可化为一维问题的杆件问题.

2. 杆件材料的拉伸力学性能试验

为了了解杆件材料在受力状态下的宏观表现,了解材料的力学性质,一般要做

材料拉伸试验. 即把材料做成标准形状和尺寸的试验棒, 将其放在拉伸试验机上, 参见图 1-1-1, 在缓慢增加拉伸载荷 P 的同时, 考察试件在相应载荷下的变形情况. 在拉伸试验中, 测定应变 $\epsilon = \frac{\Delta L}{L}$, 其中 L 为原试棒长度, ΔL 为拉伸增长量, 应力 $\sigma = P/A$, 其中 A 为试棒截面积, P 为拉伸载荷, 将应变 ϵ 作为横坐标, 应力 σ 作为纵坐标, 画出材料拉伸试验的 σ - ϵ 曲线, 称为应力-应变曲线.

低碳钢材料的应力-应变曲线, 见图 1-1-2. 由该图的 σ - ϵ 曲线可以看出, 整个拉伸过程大致分为 5 个阶段.

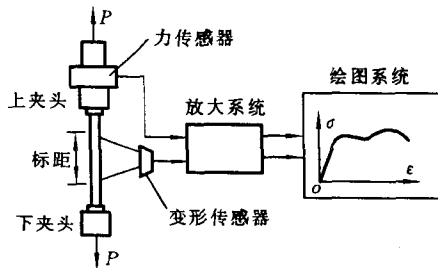


图 1-1-1 材料拉伸试验装置

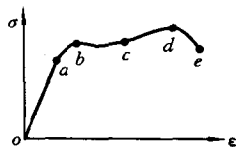


图 1-1-2 应力-应变曲线示意图

- 1) 线弹性阶段, 直线段 oa 部分, 应力与应变成正比,

$$\sigma = E \epsilon$$

表示材料在线弹性范围内满足虎克定律, E 称为弹性模量, 不同材料具有不同的弹性模量. 值得强调的是, 工程技术中通常让材料仅在线弹性范围内变化, 这不仅可保证材料的可靠使用, 卸载后仍恢复原样, 而且线弹性关系便于计算分析.

- 2) 非线性弹性阶段, 曲线 ab 部分, 应力与应变关系是非线性的. 虽然材料在卸载后也能恢复原样, 但非线性关系不利于计算分析. 通常, 非线性弹性区是很短的.

- 3) 屈服阶段, 曲线 bc 段, 这一阶段中当应力不增加或很小变化时会引起应变的显著变化, 材料产生显著的塑性变形, 这种现象称为屈服. 曲线中 b 点称为弹性极限点也称为屈服点. 材料受力超过弹性极限后, 材料产生塑性变形, 卸掉外载后材料不能恢复原来的尺寸.

- 4) 强化阶段, 曲线 cd 段. 在这一阶段中, 要使材料变形, 就必须增加外力, 这种现象称为强化. 强化阶段的变形也是一种塑性变形.

- 5) 颈缩阶段, 曲线 de 段. 在这一阶段中材料被拉细了, 这个阶段中材料产生显著变形, 但所需的外力反而减少了; 继续变形, 材料会出现断裂.

每一种材料都要做拉伸试验, 利用材料的应力-应变曲线可估算出某种材料的实际许用应力, 它为弹性极限应力乘上一个安全系数. 这样, 材料在实际应用中受拉或受压时, 只要材料内部所承受的应力不超过许用应力, 材料使用就是安全的.

有时,材料在使用中会受到剪切力的影响,通过剪切试验也可估算出材料的剪切模量和剪切许用应力。

3. 杆件受力变形的函数表示

一根变截面的细长杆件可简化为 x 轴上的一条线段,参见图 1-1-3,杆件截面可用连续函数 $a(x)$ 表示,材料密度用 ρ 表示,微元长度用 dx 表示,微元重量用 $a(x)\rho dx$ 表示。

杆件所受外力,包括载荷力与约束力。按照外力的作用方式,可分为表面力和体积力。作用在构件表面上的外力称为表面力,例如接触压力等。表面力可能是连续分布的也可能是集中作用的;图中的分布力和集中力可分别用函数表示为 $F_1(x)$, $0 \leq x \leq l$ 和 $F_2\delta(x-x_0)$ 。体积力是外力场作用在质点上的,例如重力与惯性力都是体积力,体积力一定是连续分布的。

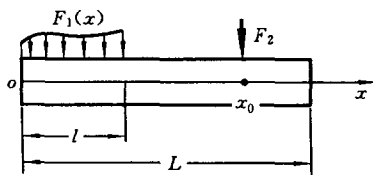


图 1-1-3 杆件力表示形式

在外力作用下,杆件内部产生内应力。设内力 ΔF 作用在 ΔA 面积上,则内应力定义为

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}.$$

内应力可看作是两个微元之间的相互作用力。杆件的内应力可描述为关于变量 x 的连续函数 $p(x)$ 。由于 $p(x)$ 可带有方向性,它一般可分解为轴向正应力 $\sigma(x)$ 和平行于截面方向的切应力 $\tau(x)$,它们都是连续函数。当杆件仅在轴向受拉或受压时,则仅有正应力 $\sigma(x)$,无切向应力 $\tau(x)$,如图 1-1-4(a)所示;当杆件弯曲时,则既有正应力也有切应力,如图 1-1-4(b)所示。

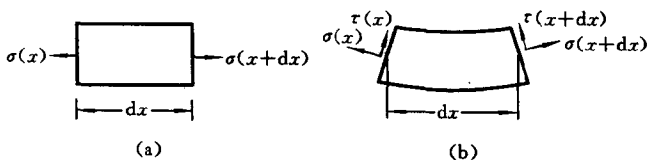


图 1-1-4 杆件微元的正应力和切应力示意

有应力就有应变,不同方向的应力产生不同方向的应变。设在正应力 σ 作用的点 K 处,使 KB 长度 ΔS 产生增量 Δu ,参见图 1-1-5(a),则 K 点处沿 KB 方向的正应变定义为

$$\varepsilon = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta S}.$$

因各点的正应变会有不同,所以正应变 $\varepsilon(x)$ 是关于变量 x 的函数。

设切向应力 τ 作用于 K 处, 使 KD (长度 ΔL) 产生斜移量 Δv , 参见图 1-1-5(b), 则 K 点处的切应变定义为

$$r = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta L}.$$

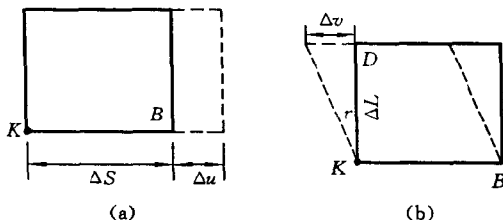


图 1-1-5 杆件微元的正应变和切应变示意

切应变 $r(x)$ 也是关于变量 x 的函数.

杆件微元体的局部变形, 可用正应变和切应变来度量, 各微元体的局部变形累积起来就产生了构件的整体变形.

§ 2 受拉(压)弹性杆的微分方程模型

弹性杆受拉(或受压)是普遍应用的、最基本的受力变形方式之一. 本节将在线弹性范围内, 用力分析法建立受拉(压)杆的微分方程模型.

1. 受拉(压)杆件的形变位移所满足的微分方程

为了使分析问题简化, 假设杆件是可变截面积的细长杆, 在杆件受拉(压)时仅考虑轴向形变位移, 不考虑侧向形变位移.

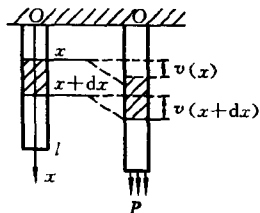


图 1-2-1 杆件受拉的形变位移示意

一根长为 L 、截面积为 $a(x)$ 的弹性细杆, 上端固定, 在自重及下端拉力 P 的作用下杆处于平衡, 试在线弹性范围内用力分析法建立关于杆件轴向形变位移的微分关系.

设立坐标系, 画出杆件受力简图, 如图 1-2-1 所示. 设在截面 x 处, 由于受拉的原因而存在应力(单位面积受力)为 $\sigma(x)$, 杆件在 x 处产生的位移为 $v(x)$, 受力前的微元段 $[x, x+dx]$ 形变为 $[x+v(x), (x+dx)+v(x+dx)]$, 则杆在线弹性范围内的应变(相对伸长)可表示为

$$\epsilon(x) = \frac{[(x+dx)+v(x+dx)] - (x+v(x))}{dx} \approx \frac{dv}{dx}, \quad (1.2.1)$$

这就是杆件关于应变和位移所满足的基本微分关系,其中 $\varepsilon(x) > 0$ 表示杆被位伸, $\varepsilon(x) < 0$ 表示杆被压缩.

另外,据虎克定律,应力 $\sigma(x)$ 可用位移表示为

$$\sigma(x) = E\varepsilon(x) = E \frac{dv}{dx}. \quad (1.2.2)$$

这是杆件关于应力和位移所满足的基本微分关系.

为了获得受拉(压)杆件形变位移所满足的微分方程,还要在线弹性范围内考虑力的平衡.此时在微元内存在如下关系:

在截面 x 处的内应力为 $a(x)\sigma(x)$;

在截面 $x+dx$ 处的内应力为 $a(x+dx)\sigma(x+dx)$;

在微元中内应力改变量为

$$a(x+dx)\sigma(x+dx) - a(x)\sigma(x) = \frac{d}{dx}(a(x)\sigma(x))dx;$$

在微元中的自重力为 $a(x)\rho g dx$, 其中 ρ 是材料密度, g 是重力加速度.

在微元中应力改变量与自重平衡,于是有

$$\frac{d}{dx}(a(x)\sigma(x))dx + a(x)\rho g dx = 0,$$

利用(1.2.2)式,上式可改写为

$$-\frac{d}{dx}\left(Ea(x) \frac{dv}{dx}\right) = \rho g a(x), \quad (1.2.3)$$

这就是弹性杆受拉平衡时位移所满足的微分方程.若弹性杆受压平衡,仍在同一坐标系中讨论问题,因应变方向为负值,所以此时的微分方程为(1.2.3)式右端项取负值的结果.

2. 受拉杆关于位移的微分方程模型

仅有微分方程(1.2.3)是不能求解出位移 $v(x)$ 的,它必须连同边界条件一起构成微分方程模型.

受拉杆问题的边界条件是容易确定的,但由于微分方程(1.2.3)采用了位移变量,所以边界条件也必须是关于位移的描述.显然,由于上端固定,所以 $v(0) = 0$; 由于杆末端受拉力 P 作用,所以 $a(L)\sigma(L) = P$, 即 $Ea(L)dv(L)/dx = P$.

总之,关于位移的受拉杆微分方程模型为

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left(Ea(x) \frac{dv}{dx}\right) = \rho g a(x), & 0 < x < L, \\ v(0) = 0, \\ Ea(L) \frac{dv}{dx}(L) = P. \end{cases} \quad (1.2.4)$$