



常考易错典型试题

高考错题本



全国高考命题研究组 编
北京天利考试信息网
全国学习科学研究会考试研究中心 审

2006 高考必备
举一反三训练



联合推荐

数 学

西藏人民出版社

高考错题本

数 学

◆ 全国高考命题研究组 编
北京天利考试信息网
全国学习科学研究会考试研究中心 审

西藏人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

常考易错典型试题2/北京天利考试信息网编.

-拉萨:西藏人民出版社,2004.10

ISBN 7-223-01704-X

I.常… II.北… III.课程—高中—习题—升学参考资料 IV.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 049529 号

常考易错典型试题2

——高考错题本

作 者 北京天利考试信息网

责任编辑 侯志玲

封面设计 谭仲秋

出 版 西藏人民出版社

社 址 拉萨市林廓北路20号 邮政编码 850000

北京发行部:100013 北京市东土城路8号林达大厦A座13层

电 话:010-64466482,64466473,51655511-858

印 刷 天津市凯旭印刷有限公司

经 销 全国新华书店

开 本 16开(787×1092) 字 数 1280千

印 数 10000 印 张 66

版 次 2005年8月第2版第1次印刷

标准书号 ISBN 7-223-01704-X/G·725

定 价 75.00元(全5册)

编写说明

每一次考试之前,为了避免考生犯与前面考试相同的错误,老师叮嘱考生最多的恐怕就是“多看错题本”,这里所说的错题本,常指的是考生把自己以前考试或者自测或者练习等过程中出错的题目整理成的小册子,但是,并不是所有的考生都有这一习惯,或者有的考生虽然整理了自己的错题本,但是只是把前面考试中犯的错误简单的列了出来,而没有把其他可能会出现错误整理出来,另外,考生一个人做的题目毕竟是有限的,以后的考试尤其是高考中,碰到自己没有见过,而又特别容易使大家步入误区的题目,相当多的考生还是很紧张。为了帮助考生解决这一难题,更为了能够提供一套新颖、独特的复习资料,以助考生提高备考质量,北京天利考试信息网联合全国学习科学研究会考试研究中心,邀请了大量多年活跃在教学一线的专家、教师,精心编写了此书。

本书主要设置以下的栏目:

考点解读 以2006年高考考查要求和最新的高考命题信息为导向,对考试重点、易错问题等内容进行了全面的解读和归类,以帮助考生明确命题规律和重点,抓住考试基本内容,更积极主动地面对高考。

点击典型、易错题 对近几年高考和模拟试题中典型、易错题目,给出了准确解题的思路分析和解答误区的警示,以利于考生在今后的考试中,有效规避答题误区、正确解答考试题目。

举一反三 结合前两部分的内容,选择了既突出高考考点,又有时代特色的,集科学性、新颖性和实用性为一体的典型体例,供考生检测提高。

解题点评 对举一反三中出现的所有题目,从命题角度、考查要点、解题思路等方面进行了全面、系统的点评,帮助考生提升应试水平。

特别说明:1. 本书在设置专题时,充分考虑了考生的复习实际,适合于考生不同轮次的复习提高;2. 本书在选用试题时,除注重了题目本身的典型性外,还充分考虑了高考模式、考纲变化及各省市单独命题等各项因素,适用于全国各省市考生;3. 本书将2005年高考试题的易错题目也进行了分类点评,考生可以从中获取更新的高考信息。

参加本书编写的有:龙秀功、刘烈文等教学一线的特高级教师。

读者有何建议、疑问,可登陆北京天利考试信息网(www.TL100.com, bbs.TL100.com, cnc.TL100.com)留言。为了帮助读者用好本书,天利考试信息网还专门开辟了“读者加油站”和读者论坛,读者可以登录,查阅高考信息、下载免费试题、交流答题经验。

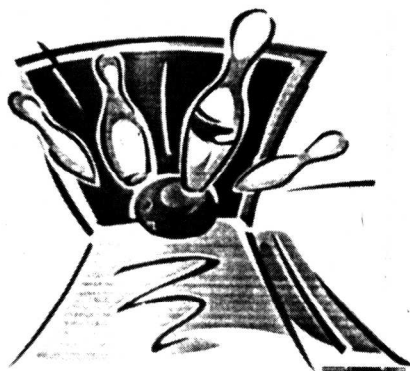
相信本书会成为将要参加高考的你的益友!

编者
2005年9月

目 录

数 学

专题一	集合的概念与运算	(1)
专题二	简易逻辑	(6)
专题三	函数的定义域和解析式	(9)
专题四	函数的值域和最值	(14)
专题五	函数的性质	(19)
专题六	函数的图像	(24)
专题七	数列的概念及通项	(28)
专题八	等差数列与等比数列	(32)
专题九	等差、等比数列的性质及应用	(39)
专题十	数列求和	(43)
专题十一	数列的综合应用	(48)
专题十二	三角函数的求值、化简和证明	(53)
专题十三	三角函数的图像和性质	(58)
专题十四	解三角形	(63)
专题十五	平面向量	(68)
专题十六	不等式的基本性质	(72)
专题十七	不等式的证明	(77)



目 录

专题十八	不等式的解法	(83)
专题十九	直线和圆的方程	(88)
专题二十	圆锥曲线方程	(97)
专题二十一	直线与平面	(108)
专题二十二	空间角的计算	(112)
专题二十三	空间距离的计算	(118)
专题二十四	空间向量	(123)
专题二十五	分类计数原理与分步计数原理	(131)
专题二十六	排列与组合	(135)
专题二十七	二项式定理及其应用	(140)
专题二十八	概率	(145)
专题二十九	离散型随机变量的分布列	(153)
专题三十	离散型随机变量的期望与方差	(159)
专题三十一	统计	(166)
专题三十二	数学归纳法	(170)
专题三十三	数列的极限及其运算	(176)
专题三十四	函数极限及函数的连续性	(180)
专题三十五	导数的概念及运算	(184)
专题三十六	导数的应用	(191)
专题三十七	复数	(199)





专题一 集合的概念与运算

一、考点解读

1. 集合的含义与表示

(1) 通过实例,了解集合的含义,体会元素与集合的“属于”关系.

(2) 能选择自然语言、图形语言、集合语言(列举法或描述法)描述不同的具体问题,感受集合语言的意义和作用.

2. 集合间的基本关系

(1) 理解集合之间包含与相等的含义,能识别给定集合的子集.

(2) 在具体情境中,了解全集与空集的含义.

3. 集合的基本运算

(1) 理解两个集合的并集与交集的含义,会求两个简单集合的并集与交集.

(2) 理解在给定集合中一个子集的补集的含义,会求给定子集的补集.

(3) 能使用 Venn 图表达集合的关系及运算,体会直观图示对理解抽象概念的作用.

二、点击典型、易错试题

【例题 1】已知集合 $M = \{y \mid y = x^2 + 1, x \in \mathbf{R}\}$, $N = \{y \mid y = x + 1, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $M \cap N$ 等于 ()

A. $(0, 1), (1, 2)$

B. $\{(0, 1), (1, 2)\}$

C. $\{y \mid y = 1 \text{ 或 } y = 2\}$

D. $\{y \mid y \geq 1\}$

解题思路: $M = \{y \mid y = x^2 + 1, x \in \mathbf{R}\} = \{y \mid y \geq 1\}$

$N = \{y \mid y = x + 1, x \in \mathbf{R}\} = \{y \mid y \in \mathbf{R}\}$

$\therefore M \cap N = \{y \mid y \geq 1\} \cap \{y \mid y \in \mathbf{R}\} = \{y \mid y \geq 1\}$

易错警示: 误区 1, 解方程组 $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$, 从而选择 B, 这是由于在理解

上仅注意了构成集合元素的共同属性,而忽视了集合的元素是什么,事实上 M, N 的元素是数而不是点.

误区 2, 在解方程组的基础上,注意到 M, N 中代表元素是 y , 因此选 C, 这是由于没有抓住集合的实质.

启示: 这里 M, N 是用描述法表示的, 要注意其元素是实数 y 而不是实数对 (x, y) , 而且 M, N 分别表示函数 $y = x^2 + 1 (x \in \mathbf{R})$, $y = x + 1 (x \in \mathbf{R})$ 的值域, 在解决这类问题时, 一定要抓住集合及其元素的实质.

【考题2】若 $A = \{1, 3, x\}$, $B = \{x^2, 1\}$, 且 $A \cup B = (1, 3, x)$, 则这样的 x 的不同取值有 ()

- A. 2 个 B. 3 个 C. 4 个 D. 5 个

解题思路: 由已知得 $B \subseteq A$, $\therefore x^2 \in A$, $x^2 \neq 1$. ① $x^2 = 3$, 得 $x = \pm\sqrt{3}$, 都符合. ② $x^2 = x$, 得 $x = 0$ 或 $x = 1$, 而 $x \neq 1$, $\therefore x = 0$, 综合 ①, ②, 共有 3 个值.

易错警示: 由 $x^2 = 1$, $x^2 = 3$, $x^2 = x$ 三种情况, 一共解出 5 个值, 选择 D.

考虑互异性, 由 $x \neq 1$, 将 $x^2 = x$ 这种情况也舍去, 只剩 $x^2 = 3$, 选择 A.

错因在于没考虑互异性或考虑不全面.

【考题3】已知集合 $A = \{x \mid x^2 - 3x - 10 \leq 0\}$, 集合 $B = \{x \mid P + 1 \leq x \leq 2P - 1\}$, 若 $B \subseteq A$, 求实数 P 的取值范围.

解题思路: 由 $x^2 - 3x - 10 \leq 0$ 得 $-2 \leq x \leq 5$ 欲使 $B \subseteq A$, 应有:

(1) 当 $B \neq \emptyset$ 时, 即 $p + 1 \leq 2p - 1 \Rightarrow p \geq 2$.

由 $B \subseteq A$ 得 $\begin{cases} -2 \leq p + 1 \\ 2p - 1 \leq 5 \end{cases} \Rightarrow -3 \leq p \leq 3$

$\therefore 2 \leq p \leq 3$

(2) 当 $B = \emptyset$ 时, 即 $p + 1 > 2p - 1$

解得 $p < 2$

由(1)(2)得: $p \leq 3$

$\therefore p$ 的取值范围是 $p \leq 3$

易错警示: 由 $x^2 - 3x - 10 \leq 0$ 得 $-2 \leq x \leq 5$

欲使 $B \subseteq A$, 只需 $\begin{cases} -2 \leq p + 1 \\ 2p - 1 \leq 5 \end{cases} \Rightarrow -3 \leq p \leq 3$

$\therefore p$ 的取值范围是 $-3 \leq p \leq 3$

启示: 解决有关 $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \emptyset$, $A \subseteq B$ 等集合问题时容易忽视空集的情况而出现漏解, 这需要在解题过程中全方位、多角度审视问题.

三、举一反三

1. 已知集合 $M = \{y \mid y = -x^2 + 2, x \in \mathbf{R}\}$, $N = \{y \mid y = -x + 2, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $M \cap N$ 等于 ()

- A. $\{(0, 2), (1, 1)\}$ B. $\{1, 2\}$
C. $\{y \mid y \leq 2\}$ D. $\{y \mid 1 \leq y \leq 2\}$

2. 集合 $M = \left\{x \mid x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\}$, $N = \left\{x \mid x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$, 则 ()

- A. $M = N$ B. $M \supseteq N$
C. $M \subseteq N$ D. $M \cap N = \emptyset$

3. 已知 $M = \{3, a\}$, $N = \{x \mid x^2 - 3x < 0, x \in \mathbf{Z}\}$, $M \cap N = \{1\}$, $P = M \cup N$, 那么集合 P 的子集共有 ()

A. 3 个

B. 7 个

C. 8 个

D. 16 个

4. 不等式 $x+1 > \frac{1}{x-1}$ 成立的 x 的范围为_____.

5. 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - x - 2 \leq 0\}$, $B = \{x \mid 2a < x < a+3\}$, 且满足 $A \cap B = \emptyset$, 则实数 a 的取值范围是_____.

6. 已知集合 $A = \{x, x^2, y^2 - 1\}$, $B = \{0, |x|, y\}$. 且 $A = B$, 求 x, y 的值.

四、解题点评

1. C 点评:集合 M, N 分别是两个函数的值域,所以 $M = \{y | y \leq 2\}, N = \mathbf{R}$,故 $M \cap N = M = \{y | y \leq 2\}$.

易错警示:误区 1,解方程组得到两组解 $(0, 2)$ 和 $(1, 1)$ 从而选择 A.

误区 2,在解方程组的基础上,注意到集合的元素是 y ,因此选 B.

两类错误的根本原因都在于没有弄清楚集合 M, N 的实质.

2. C 点评: $M = \left\{x \mid x = \frac{(2k+1)\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\}$

$N = \left\{x \mid x = \frac{(k+2)\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\}$,观察两式中分子,知 $(2k+1)$ 表示奇数,而 $(k+2)$ 则表示整数,后者范围更大,所以 $M \subseteq N$.

易错警示:误区 1,从两个集合中代表元素的表达形式来看,非常相似,从而认为是相同的,而错误地选择 A.

误区 2,认为分子不同,错选 D.

3. C 点评: $N = \{x \mid 0 < x < 3, x \in \mathbf{Z}\} = \{1, 2\}$

由 $M \cap N = \{1\}$,得 $a = 1, \therefore M = \{3, 1\}$.

则 $P = M \cup N = \{1, 2, 3\}$, P 为三元集,故 P 的子集共有 $2^3 = 8$ 个,应选 C.

易错警示:误区 1, M 中有 2 个元素, N 中也有 2 个元素,认为 P 中有 4 个元素,从而选择 D.

误区 2, N 中元素含有了 0 或 3,或二者皆有,从而可能导致误选 D 或答案选对而其过程有误.

4. $-\sqrt{2} < x < 1$ 或 $x > \sqrt{2}$

点评:原不等式可化为 $x + 1 - \frac{1}{x-1} > 0$

即: $\frac{x^2 - 2}{x-1} > 0$ 等价于

$(x-1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) > 0$

由数轴标根法,解得:

$-\sqrt{2} < x < 1$ 或 $x > \sqrt{2}$

易错警示:误区 1,变形到 $\frac{x^2 - 2}{x-1} > 0$ 后不是用数轴标根法,而是进行符号的分类讨论,易

错,而且运算量大,较复杂.

误区 2,将原不等式化为 $(x+1)(x-1) > 1$,再解一元二次不等式,这样,没有考虑分母 $x-1$ 的符号,而是直接当正数来乘了.

5. $a \leq -4$ 或 $a \geq 1$

点评: $A = \{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$,由 $A \cap B = \emptyset$

① $B = \emptyset$,则 $2a \geq a+3$ 即 $a \geq 3$

② $B \neq \emptyset$,则 $\begin{cases} a+3 \leq -1 \\ 2a < a+3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 2a \geq 2 \\ 2a < a+3 \end{cases}$

即 $a \leq -4$ 或 $1 \leq a < 3$

综合 ①②, 有 $a \leq -4$ 或 $a \geq 1$

易错警示: 误区 1, 易漏掉 $B = \emptyset$ 的情况, 得 a 的范围是 $a \leq -4$ 或 $1 \leq a < 3$

误区 2, $B \neq \emptyset$ 时易漏掉 $2a < a+3$ 这一隐含条件, 得 $a \leq -4$ 或 $a \geq 1$

6. 解: 集合 $A = B$, 即 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 对于有限集 A, B , 则 $A = B$ 的条件即两个集合的元素完全相同, 由 $A = B, 0 \in B$ 得 $0 \in A$, 若 $x = 0$, 则 $x^2 = 0$ 且 $|x| = 0$, 与互异性矛盾; 若 $x^2 = 0$, 则 $x = 0$ 且 $|x| = 0$, 同样产生矛盾. $\therefore y^2 - 1 = 0$, 得 $y = 1$ 或 $y = -1$. 若 $y = 1$, 则 $1 \in B$, 又 $A = B$, $\therefore 1 \in A$; 若 $x = 1$, 则 $x^2 = 1$ 且 $|x| = 1$, 此时 $A = \{1, 1, 0\}, B = \{0, 1, 1\}$ 与互异性矛盾; 若 $y = -1$, 则 $-1 \in B$, 又 $A = B$, $\therefore -1 \in A; x^2 \geq 0, \therefore x = -1, x^2 = 1$, 此时 $A = \{-1, 1, 0\}, B = \{0, 1, -1\}$, 即 $A = B$. 综上知, $x = -1, y = -1$.

易错警示: 误区 1, 将两个集合中的元素分别一一对应相等, 列方程(组)求解, 再用互异性检验.

误区 2, 利用互异性列出不等式, 先排除几个值, 再用两个集合相等关系列方程组求解.

启示: 本题若由互异性出发列方程组求解, 计算量太大, 应通过从特殊值出发, 分类讨论解决.



专题二 简易逻辑

一、考点解读

1. 理解逻辑联结词“或”“且”“非”的含义,理解四种命题及其相互关系,掌握充要条件的意义.
2. 了解命题的逆命题、否命题与逆否命题.
3. 理解必要条件、充分条件与充要条件的意义,会分析四种命题的相互关系.
4. 通过数学实例,了解逻辑联结词“或”“且”“非”的含义.

二、点击典型、易错试题

已知全集 $U = \mathbf{R}$, $A \subseteq U$, 如果命题 $p: \sqrt{3} \in A \cup B$, 则命题“非 p ”是 ()

A. $\sqrt{3} \notin A$

B. $\sqrt{3} \in \complement_U B$

C. $\sqrt{3} \notin A \cap B$

D. $\sqrt{3} \in (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$

解题思路:由题意,非 $p: \sqrt{3} \notin A \cup B$

$$\therefore \sqrt{3} \in \complement_U (A \cup B) \quad \text{即} \sqrt{3} \in (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$$

易错警示:选择 C.

启示: $\because U = \mathbf{R}: \sqrt{3} \notin A \cup B$ 即 $\sqrt{3} \in \complement_U (A \cup B)$. 然后根据 $\complement_U (A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$ 即得结果. 此题考查的是“非 p ”命题的表达,不要与否命题混淆,误区中解法即犯了此错误. 解题时一定要注意区分清楚.

已知方程 $x^2 + (2k-1)x + k^2 = 0$, 求使方程有两个大于 1 的根的充要条件.

解题思路:使两根 x_1, x_2 都大于 1 的充要条件是:

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \Rightarrow k \leq \frac{1}{4} \\ (x_1 - 1) + (x_2 - 1) > 0 \Rightarrow k < -\frac{1}{2} \\ (x_1 - 1) \cdot (x_2 - 1) > 0 \Rightarrow k > 0 \text{ 或 } k < -2 \end{cases}$$

解得 $k < -2$

$\therefore$ 所求的充要条件为 $k < -2$

易错警示:误区 1, 设两根 x_1, x_2 , 则有

$$\begin{cases} x_1 + x_2 > 2 \\ x_1 x_2 > 1 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} -(2k-1) > 2 \\ k^2 > 1 \end{cases}$$

解得 $k < -1$

$\therefore$ 所求充要条件为 $k < -1$

误区 2, 由题意, 应有

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_1 + x_2 > 2 \text{ 即} \\ x_1 x_2 > 1 \end{cases} \begin{cases} (2k-1)^2 - 4k^2 \geq 0 \\ -(2k-1) > 2 \\ k^2 > 1 \end{cases}$$

解得 $k < -1$

$\therefore$ 所求充要条件为 $k < -1$

错误的原因在于: 问题的实质是确定所给的方程两根都大于 1 时 k 应满足的充要条件, 而误区错解中所列的不等式组仅是两根 x_1, x_2 都大于 1 的必要条件, 并不充分, 例如, $x_1 = 1, x_2 = 3$,

有 $\begin{cases} x_1 + x_2 > 2 \\ x_1 x_2 > 1 \end{cases}$, 但没有 $x_1 > 1, x_2 > 1$.

启示: 找充要条件, 应找等价关系, 做到既充分且必要, 发掘问题的每一个实质、关键所在.

三、举一反三

1. 如果 x, y 是实数, 那么“ $xy > 0$ ”是“ $|x+y| = |x| + |y|$ ”的 ()

- A. 充分但不必要条件 B. 必要但不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

2. 若命题 p 的否命题为 r , 命题 r 的逆命题为 s , 则 s 是 p 的逆命题 e 的 ()

- A. 逆否命题 B. 逆命题
C. 否命题 D. 原命题

3. 命题“若 $|f(x)| > a$, 则 $f(x) > a$ 或 $f(x) < -a$ ”的否命题是_____.

4. 在直角坐标系中, 点 $(2x+3-x^2, \frac{2x-3}{2-x})$ 在第四象限的充要条件是_____.

5. 已知集合 $A = \{x, x^2, y^2 - 1\}$, $B = \{0, |x|, y\}$, 且 $A = B$, 求 x, y 的值.

四、解题点评

1. A 点评: 由 $xy > 0$ 知 x, y 同号, 则有 $|x+y| = |x| + |y|$; 从而有 $xy > 0 \Rightarrow |x+y| = |x| + |y|$; 而反之不一定成立, 因为 $x = 0, y \neq 0$ 时, $|x+y| = |x| + |y|$ 成立, 但 $xy > 0$ 不成立, 所示“ $xy > 0$ ”是“ $|x+y| = |x| + |y|$ ”的充分但不必要条件.

易错警示: 选择 C, 由 $xy > 0$ 知 x, y 同号, 则有 $|x+y| = |x| + |y|$; 反之, 若有 $|x+y|$

$=|x|+|y|$,也可知 x, y 同号.

2. C 点评: s 是 p 的逆否命题,故是 e 的否命题.

易错警示:误区 1,不能利用“原命题的逆命题和否命题互为逆否命题”这一关系.

误区 2,不会将原命题进行转换.

为了避免直接判断出错,可将命题 p 的形式设为“若 p 则 q ”.

3. 若 $|f(x)| \leq a$,则 $f(x) \leq a$ 且 $f(x) \geq -a$

易错警示:误区 1,易错写为“非 p ”命题

误区 2,对不等式进行否定时,忘记加等号

误区 3,漏掉对“或”的否定变为“且”.

4. $-1 < x < \frac{3}{2}$ 或 $2 < x < 3$ 点评:点在第四象限,则其横坐标为正,纵坐标为负,反之也成立.

$$\therefore \text{所求充要条件为:} \begin{cases} 2x+3-x^2 > 0 \Rightarrow -1 < x < 3 \\ \frac{2x-3}{2-x} < 0 \Rightarrow x > 2 \text{ 或 } x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

解得 $-1 < x < \frac{3}{2}$ 或 $2 < x < 3$ 为所求充要条件.

易错警示:误区 1,不能正确地将问题转化为其坐标的符号问题.

误区 2,解不等式组时,取交集错为取并集.

误区 3,解不等式时,忽略二次项系数符号.

5. 解:集合 $A = B$,即 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$,对于有限集 A, B ,则 $A = B$ 的条件即两个集合的元素完全相同.由 $A = B, 0 \in B$ 得 $0 \in A$.若 $x = 0$,则 $x^2 = 0$ 且 $|x| = 0$,与互异性矛盾;若 $x^2 = 0$.则 $x = 0$ 且 $|x| = 0$,同样产生矛盾. $\therefore y^2 - 1 = 0$,得 $y = 1$ 或 $y = -1$.若 $y = 1$,则 $1 \in B$,又 $A = B$, $\therefore 1 \in A$;若 $x = 1$,则 $x^2 = 1$ 且 $|x| = 1$,此时 $A = \{1, 1, 0\}, B = \{0, 1, 1\}$ 与互异性矛盾;若 $y = -1$,则 $-1 \in B$,又 $A = B$, $\therefore -1 \in A$; $x^2 \geq 0$, $\therefore x = -1, x^2 = 1$,此时 $A = \{-1, 1, 0\}, B = \{0, 1, -1\}$,即 $A = B$.

一、考点解读

函数的解析式与定义域每年高考必考,函数解析式往往在高考中的应用题中出现,要求能根据函数所具有的某些性质或它所满足的一些关系列出函数关系式.

二、点击典型、易错试题

【考题 1】 设函数 $f(x)$ 的定义域是 $[-2, 1]$, 则函数 $f\left(\frac{x-1}{x}\right)$ 的定义域是 ()

A. $(0, +\infty)$ B. $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$ C. $(-\infty, 0) \cup \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$ D. $[3, +\infty)$

解题思路: $-2 \leq \frac{x-1}{x} \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{x} \leq 1 \\ \frac{x-1}{x} \geq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 0 \text{ 或 } x \geq \frac{1}{3} \end{cases}$

故选 B.

易错警示: 不会求解复合函数的定义域, 或解分式不等式时出错.

【考题 2】 当 k 为何值时, 函数 $y = \frac{kx+7}{kx^2+4kx+3}$ 的定义域是一切实数?

解题思路: 由 $y = \frac{kx+7}{kx^2+4kx+3}$ 的定义域为一切实数, 可得分母 $kx^2+4kx+3 \neq 0$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立.

① 当 $k=0$ 时, 则 $3 \neq 0$ 成立.

② 当 $k \neq 0$ 时, $\Delta < 0$, 解得 $0 < k < \frac{3}{4}$.

综合 ①② 知, 当 $0 \leq k < \frac{3}{4}$ 时, $y = \frac{kx+7}{kx^2+4kx+3}$ 的定义域是 $\mathbf{R}$.

易错警示: 由 $y = \frac{kx+7}{kx^2+4kx+3}$ 的定义域为一切实数可知, 分母 $kx^2+4kx+3 \neq 0$ 对一切实数 x 恒成立.

$\therefore \Delta = (4k)^2 - 4k \cdot 3 < 0$, 解之得 $0 < k < \frac{3}{4}$,

$\therefore$ 当 $0 < k < \frac{3}{4}$ 时, 函数定义域为 $\mathbf{R}$.

关于 x 的方程 $kx^2 + 4kx + 3 = 0$ 中含有参数 k , 由于 x^2 项的系数为 k , 所以当 $k = 0$ 时, 它不是一元二次方程, 而此时 $3 \neq 0$ 恒成立.

已知 $f(x + \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, 求 $f(x-1)$.

解题思路: 由已知得 $f(x + \frac{1}{x}) = (x + \frac{1}{x})^2 - 2$, 但 $|x + \frac{1}{x}| \geq 2, \therefore f(x) = x^2 - 2 (|x| \geq 2)$,

从而 $f(x-1) = (x-1)^2 - 2$

$$= x^2 - 2x - 1 (x \geq 3 \text{ 或 } x \leq -1).$$

易错警示: 由已知得 $f(x + \frac{1}{x}) = (x + \frac{1}{x})^2 - 2, \therefore f(x) = x^2 - 2$,

$$\therefore f(x-1) = (x-1)^2 - 2 = x^2 - 2x - 1.$$

此解错在在使用直接拼配法或换元法求函数解析式时, 没有考虑定义域的变化致错.

三、举一反三

1. 若函数 $y = \frac{mx-1}{mx^2+4mx+3}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 则实数 m 的取值范围是 ()

A. $\{m \mid m \neq 0, m \in \mathbf{R}\}$

B. $(-\infty, 0) \cup [\frac{3}{4}, +\infty)$

C. $(0, \frac{3}{4})$

D. $[0, \frac{3}{4})$

2. 求下列函数的定义域:

(1) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-3x-4}}{|x+1|-2}$,

(2) $f(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2-1}) (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1).$

3. 已知 $f(x) = 2 + \log_3 x (1 \leq x \leq 9)$, 求函数 $y = [f(x)]^2 + f(x^2)$ 的最大值.

4. 已知 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 若 $f(0) = 0$, 且 $f(x+1) = f(x) + x + 1$, 试求 $f(x)$ 的表达式.