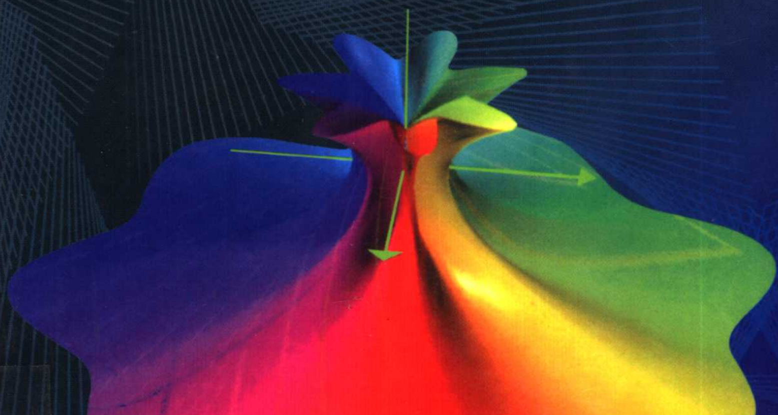
高等数学
学习指导与习题全解

（配同济高等数学·少学时）

赵振海 编著



$r=0.4\sin 7\theta+0.2+z^2,\ z<1$

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

高　等　数　学
学习指导与习题全解

(配同济高等数学·少学时)

赵振海　编著

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导与习题全解 / 赵振海编著．—大连：大连理工大学出版社，2004.12
ISBN 7-5611-2771-5

Ⅰ．高…　Ⅱ．赵…　Ⅲ．高等数学—高等学校—解题
Ⅳ．O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 094607 号

大连理工大学出版社出版
地址：大连市凌水河　邮政编码：116024
电话：0411-84708842　传真：0411-84701466　邮购：0411-84707961
E-mail：dutp@dutp.cn　URL：http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸：140mm×203mm　印张：15.5　字数：582 千字
印数：1 ～6 000
2004 年 12 月第 1 版　2004 年 12 月第 1 次印刷

责任编辑：吴孝东　责任校对：南江霞
封面设计：宋　蕾

定　价：20.00 元

前　言

“数学”,不单是科学的工具,更是科学的皇后。作为友人,她定会以其奇妙、神通、思辨启发你的心智,熏陶你的灵魂,并伴随你追寻高远的人生。

万丈高楼平地起,熟能生出百巧来。作者从长期的学习和教学实践中总结出以下学习经验:一看、二做(实践)、三想、四归纳总结。

作者从事高等数学教学 40 多年,十分了解大学生在高等数学学习中普遍遇到的困惑、疑难问题,本书第一部分针对这些问题进行详细解析,大家可以通过认真研读,从中体会“看书、思考”的方法和乐趣。本书第二部分是习题全解。解题时,先给出思路,指出解题时需要用到的有关概念、性质、定理和公式,解题过程中及时总结经验、传授技巧,以求将作者的解题思路完整地展示给读者,大家可以通过这一部分提高分析问题、解决问题的能力。为加深印象,帮助记忆,书中穿插“传经”、“送宝”、“点拨”、“提醒”等小版块,大家可以从中掌握从具体问题中学习知识,从具体问题中归纳、总结、提高的方法。最终使大家从被动的看书,到主动地“学习”,达到“知识的自组织、自增长”。

最后,引用诺贝尔奖金获得者李政道教授的一段名言作为结尾:

科学研究的是自然现象的规律,对这些客观规律的总结和抽象,是科学家的创造,如牛顿第二运动定律表达为“力等于质量与加速度的乘积”,这是牛顿对力学现象规律性的抽象。这个创造是主观的。同时,他的叙述非常简单。类似情况告诉我们,对自然现象的规律叙述得越简单,应用越广泛,那么这个科学的内容往往就越深刻。

作　者

2004 年 10 月 20 日

目　录

第一章　函数与极限

本章知识结构图

- 函数与极限
  - 函数
    - 集合
    - 函数定义
    - 函数的主要特性
      - 有界性
      - 单调性
      - 奇偶性
      - 周期性
    - 反函数
    - 复合函数、初等函数
    - 分段函数
  - 极限
    - 数列极限—[ε-N]定义
    - 函数极限
      - [ε-δ]定义
      - [ε-X]定义
    - 极限存在准则
      - 夹逼准则
      - 单调有界准则
    - 两个重要极限
      - $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$
      - $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$
    - 极限运算法则
  - 无穷小与无穷大
    - 定义
      - 无穷小定义
      - 无穷大定义
    - 无穷小比较
      - 高阶无穷小
      - 低阶无穷小
      - 同阶无穷小
      - 等价无穷小
    - 等价无穷小在求极限中应用
  - 函数连续性
    - 连续的三个定义
    - 间断点定义、求法、类型
    - 连续函数的和、差、积、商连续性
    - 反函数、复合函数连续性、初等函数连续性
    - 闭区间上连续函数性质

第一节 函 数

疑难问题解析

1 教学基本要求指出“理解函数的概念”，要达到这一点，最低应该明确些什么？

答 最低应该明确：

(1)函数的本质是对应关系，即函数关系是对应关系(或映射关系)；

(2)函数定义的两个要素；

(3)函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处有定义是指函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处有对应值。

2 函数定义的两个要素是什么？

答 (1)定义域 $\xlongequal{\text{def}}$ 使函数 y 有对应值的自变量 x 的取值范围；

(2)对应关系 $\xlongequal{\text{def}}$ 给定 x 值，得出 y 值的某种对应规律。

称(1)、(2)为构成函数概念的两个要素，同时也是判断两个函数是否是同一个函数的准则。

例如，$y=f(x)$ 与 $s=f(t)$，两个函数是否表示同一函数？为什么？

思路 要判断两个函数是否相同，主要依据函数概念的两个要素：定义域和对应规律。若两个函数的定义域和对应规律都相同，则两个函数是同一个函数，否则就是不同的函数。

函数相同，定义域与对应规律都相同。此题告诉我们一个函数的表示法与构成函数的两个要素有关，而与自变量、因变量用什么字母表示无关。即 $f(x)=f(t)=f(u)=\cdots$ 简称函数表示法的“无关性”。函数表示法的“无关性”是由 $f[g(x)]$ 的表达式去求 $f(x)$ 的表达式的有效方法。

3 函数关系是对应关系在本节有什么应用？

答 1° 在函数符号应用中的应用——由 $f[g(x)]$ 的表达式求出 $f(x)$ 的表达式。

【例 1】 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，试求 $f(x)$。

思路 因为函数的本质是对应关系，所以 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ 表示关于“$x+\dfrac{1}{x}$”的对应值。因此它的右端应该是“$x+\dfrac{1}{x}$”的表达式，但是由于化简而变成现在右

端形式。解决这类题型的关键是将 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)$ 的右端表达式恢复为原来的关于"$x+\frac{1}{x}$"的表达式，恢复的方法有两种：(1)凑出法；(2)设出法。

解法 1　凑出法：　$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}+2-2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$

由函数表示法的"无关性"得 $f(x)=x^2-2$。

解法 2　设出法：设 $u=x+\frac{1}{x}$，则 $u^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$；

$x^2+\frac{1}{x^2}=u^2-2$，所以 $f(u)=u^2-2$，即 $f(x)=x^2-2$。

2°　构造复合函数

构造复合函数的实质也是函数符号应用问题。其理论根据仍然是函数的本质是对应关系。函数先与中间变量 u 对应 $y=f(u)$，而 $y=f(u)$ 的定义域恰是中间变量 $u=g(x)$ 的值域。再找出中间变量 u 的值域所对应的自变量 x 的变化域，问题便得到解决。从上述分析知，解这类问题的关键是弄清中间变量的值域，即 $y=f(u)$ 的定义域。

【例 2】　设函数 $y=f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，则 $f[f(x)]=$______。

解　因为 $f(x)$ 的值域为 $|f(x)|\leqslant 1$，所以

$$f[f(x)]=\begin{cases}1, |f(x)|\leqslant 1\\ 0, |f(x)|>1\end{cases}=1, x\in(-\infty,+\infty)$$

4　函数 $y=f(x)$ 在定义区间 X 上是奇(偶)函数的必要条件是什么？

分析　由函数 $f(x)$ 的奇偶性定义知：对于 $\forall x\in X$，有 $-x\in X$ 且恒有 $f(-x)=-f(x)$ ($f(-x)=f(x)$)，从而得出 $y=f(x)$ 在 X 上是奇(偶)函数的必要条件是定义区间 X 关于坐标原点对称。

5　若 $y=f(x)$ 在包含坐标原点的对称区间 X 上处处有定义，则 $y=f(x)$ 在 X 上是奇函数的必要条件是什么？

分析　由奇函数定义知，对于 $\forall x\in X$，有 $-x\in X$ 且 $f(-x)=-f(x)$。又已知 $0\in X$，由于 x 的任意性，所以取 $x=0$，则上式也成立，即 $f(0)=-f(0)$，故 $f(0)=0$。所以在包含坐标原点的对称区间 X 上 $y=f(x)$ 是奇函数的必要条件是 $f(0)=0$。

6　函数 $y=f(x)$ 在定义域 X 上是周期函数的必要条件是什么？

分析　由周期函数定义知：对 $\forall x\in X$，有 $x\pm T\in X$，对任意的正整数 n，有 $f(x)=f(x+T)=\cdots=f(x+nT)=\cdots=f(x-nT)$。由于 x 及 n 的任意性推得

X 必为$(-\infty,+\infty)$。从而得 $y=f(x)$为周期函数的必要条件是它的定义域为$(-\infty,+\infty)$,即定义域 X 为双向无界区间。

习题 1-1

1. 用区间表示适合下列不等式的变量 x 的变化范围：

(1)$2<x\leqslant 6$　　(2)$|x|<3$　　(3)$|x-2|<\frac{1}{10}$

(4)$|x|>100$　　(5)$0<|x-1|<0.01$

解　(1)$(2,6]$;(2)$(-3,3)$;(3)$-\frac{1}{10}<x-2<\frac{1}{10}$,即$(1.9,2.1)$;

(4)$(-\infty,-100)\cup(100,+\infty)$;(5)$(0.99,1)\cup(1,1.01)$

2. 求邻域半径 δ,使 $x\in U(1,\delta)$时,$|2x-2|<\varepsilon$。又若 ε 分别为 0.1、0.01 时,上述 δ 各等于多少?

解　$|2x-2|<\varepsilon$,$|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}$,所以 $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$,$\varepsilon=0.1$ 时$|x-1|<\frac{0.1}{2}$,故 $\delta=\frac{0.1}{2}$;同理 $\delta=\frac{0.01}{2}$,即 $\delta=0.05,0.005$。

3. 下列各题中,函数 $f(x)$和 $g(x)$是否相同?为什么?

(1)$f(x)=\lg(x^2)$,$g(x)=2\lg x$;　(2)$f(x)=x$,$g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3)$f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$,$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$;

(4)$f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$,$g(x)=\sin x$。

解　(1)不同,因为两者定义域不同。$f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,$g(x)$的定义域为$(0,+\infty)$。

(2)不同,因为两者对应规律不同。$f(x)$的值域为$(-\infty,+\infty)$,而 $g(x)$的值域为$[0,+\infty)$。

(3)相同,两者定义域相同,对应规律也相同,$f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}=x\sqrt[3]{x-1}$。

(4)不同,两者对应规律不同,$f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}=\sqrt{\sin^2 x}=|\sin x|$。

4. 求下列函数的定义域。

(1)$y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$;　(2)$y=\frac{2x}{x^2-3x+2}$;(3)$y=\arcsin(x-3)$;

(4)$y=\sqrt{3-x}+\arctan\frac{1}{x}$;(5)$y=\ln(x+1)$;　(6)$y=e^{\frac{1}{x}}$。

解　(1)$\begin{cases}x\neq 0\\1-x^2\geqslant 0\end{cases}$,$\begin{cases}x\neq 0\\|x|\leqslant 1\end{cases}$,所以定义域为$[-1,0)\cup(0,1]$。

(2)$x^2-3x+2\neq 0$ 即 $x^2-3x+2\neq(x-1)(x-2)$,即$(x-1)(x-2)\neq 0$,所以定义域为$(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$。

(3)$|x-3|\leqslant 1$，$-1\leqslant x-3\leqslant 1$，$2\leqslant x\leqslant 4$，所以定义域为$[2,4]$。

(4)$\begin{cases}3-x\geqslant 0\\x\neq 0\end{cases}$，$\begin{cases}x\leqslant 3\\x\neq 0\end{cases}$，定义域为$(-\infty,0)\cup(0,3]$。

(5)$x+1>0$，$x>-1$，定义域为$(-1,+\infty)$。

(6)$x\neq 0$，所以定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$。

5. 设 $f(x)=\sqrt{4+x^2}$，求下列函数值：

$$f(0),\quad f(1),\quad f(-1),\quad f\left(\frac{1}{a}\right),\quad f(x_0),\quad f(x_0+h)$$

解　$f(0)=\sqrt{4+0^2}=2$，$f(1)=\sqrt{4+1^2}=\sqrt{5}$，$f(-1)=\sqrt{4+(-1)^2}=\sqrt{5}$，$f\left(\frac{1}{a}\right)=\sqrt{4+\left(\frac{1}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{4a^2+1}}{|a|}$，　$f(x_0)=\sqrt{4+x_0^2}$，　$f(x_0+h)=\sqrt{4+(x_0+h)^2}$。

6. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\frac{\pi}{3}\\0, & |x|\geqslant\frac{\pi}{3}\end{cases}$，求 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)$，$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$，$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$，$\varphi(-2)$。

解　因为 $|x|=\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}$，所以 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{6}\right|=\frac{1}{2}$，同理 $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$。因为$|-2|>\frac{\pi}{3}$，所以 $\varphi(-2)=0$。

7. 设 $f(t)=2t^2+\frac{2}{t^2}+\frac{5}{t}+5t$，证明 $f(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$。

证明　$f\left(\frac{1}{t}\right)=2\left(\frac{1}{t}\right)^2+\frac{2}{\left(\frac{1}{t}\right)^2}+\frac{5}{\left(\frac{1}{t}\right)}+5\left(\frac{1}{t}\right)$

$$=\frac{2}{t^2}+2t^2+5t+\frac{5}{t}=2t^2+\frac{2}{t^2}+\frac{5}{t}+5t=f(t)$$

8. 设 $F(x)=e^x$，证明(1)$F(x)\cdot F(y)=F(x+y)$；(2)$\frac{F(x)}{F(y)}=F(x-y)$。

证明　(1)$F(x)\cdot F(y)=e^x\cdot e^y=e^{x+y}=F(x+y)$；

(2)$\frac{F(x)}{F(y)}=\frac{e^x}{e^y}=e^{x-y}=F(x-y)$。

9. 设 $G(x)=\ln x$。证明当 $x>0$，$y>0$ 时下列等式成立：

(1)$G(x)+G(y)=G(xy)$；　　(2)$G(x)-G(y)=G\left(\frac{x}{y}\right)$。

证明　(1)$G(x)+G(y)=\ln x+\ln y=\ln(xy)=G(xy)$。

(2)$G(x)-G(y)=\ln x-\ln y=\ln\frac{x}{y}=G\left(\frac{x}{y}\right)$。

10. 下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些既非奇函数又非偶函数？

(1)$y=x^2(1-x^2)$；(2)$y=3x^2-x^3$；(3)$y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$；(4)$y=x(x-1)(x+1)$；

(5)$y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$；(6)$y=\frac{a^x-a^{-x}}{2}$；(7)$y=|\sin x|$；(8)$y=\sin x-\cos x+1$。

解 (1)设 $y=f(x)=x^2(1-x^2)$，则 $f(-x)=(-x)^2(1-(-x)^2)=x^2(1-x^2)=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数。

(2)设 $y=f(x)=3x^2-x^3$，则 $f(-x)=3(-x)^2-(-x)^3=3x^2+x^3\neq f(x)$ 且 $f(-x)\neq -f(x)$，所以 $f(x)$ 为非奇非偶函数。

(3)设 $y=f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$，则 $f(-x)=\frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\frac{1-x^2}{1+x^2}=f(x)$，所以$f(x)$为偶函数。

(4)设 $y=f(x)=x(x-1)(x+1)=x(x^2-1)$，则 $f(-x)=(-x)[(-x)^2-1]=-x(x-1)(x+1)=-f(x)$，所以$f(x)$为奇函数。

(5)设 $y=f(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$，则 $f(-x)=\frac{a^{-x}+a^x}{2}=\frac{a^x+a^{-x}}{2}=f(x)$，所以 $f(x)$为偶函数。

(6)设 $y=f(x)=\frac{a^x-a^{-x}}{2}$，则 $f(-x)=\frac{a^{-x}-a^{-(-x)}}{2}=-\frac{a^x-a^{-x}}{2}=-f(x)$，所以$f(x)$为奇函数。

(7)设 $y=f(x)=|\sin x|$，则 $f(-x)=|\sin(-x)|=|\sin x|=f(x)$，所以 $f(x)$为偶函数。

(8)设 $y=f(x)=\sin x-\cos x+1$，则 $f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1\neq f(x)\neq -f(x)$，所以$f(x)$为非奇非偶函数。

11. 设下面所考虑的函数都是定义在对称区间$(-l,l)$内的。证明：

(1)两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数；

(2)两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数。

证明 (1)设 $y_1=f(x)$，$y_2=g(x)$，$x\in(-l,l)$ 是两个偶函数，$y(x)=f(x)+g(x)$，$y(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=y(x)$，所以 $y(x)=f(x)+g(x)$3是偶函数。

设 $\varphi(x)$，$\psi(x)$是定义在$(-l,l)$上的两个奇函数，且 $\Phi(x)=\varphi(x)+\psi(x)$，则 $\Phi(-x)=\varphi(-x)+\psi(-x)=-\varphi(x)-\psi(x)=-(\varphi(x)+\psi(x))=-\Phi(x)$，所以两个奇函数之和 $\varphi(x)+\psi(x)$是奇函数。

(2)设 $f(x),g(x)$ 是定义在 $(-l,l)$ 内的两个偶函数，且 $F(x)=f(x)g(x)$，则 $F(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=f(x)\cdot g(x)=F(x)$，所以两个偶函数的积为偶函数。

设 $\varphi(x),\psi(x)$ 是定义在 $(-l,l)$ 内的两个奇函数，$G(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x)$，则 $G(-x)=\varphi(-x)\psi(-x)=[-\varphi(x)][-\psi(x)]=\varphi(x)\psi(x)$，所以两个奇函数的乘积为偶函数。

设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的偶函数，$g(x)$ 是定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数，$\Phi(x)=f(x)g(x)$，则 $\Phi(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)(-g(x))=-f(x)g(x)=-\Phi(x)$，所以偶函数与奇函数的乘积为奇函数。

12. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，证明 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加。

证明　设 $\forall x_1,x_2\in(-l,0)$，且 $x_1<x_2$，则有

$$-x_1,-x_2\in(0,l)\text{且}-x_2<-x_1$$

由题设条件知 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，可得

$$f(-x_2)<f(-x_1)$$

因为 $f(x)$ 是定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数，所以有

$$-f(x_2)<-f(x_1)$$

从而有　$$f(x_1)<f(x_2)\quad x_1,x_2\in(-l,0)\text{且}x_1<x_2$$

这就说明了对 $(-l,0)$ 内任意的 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内单调增加。

13. 下列函数中哪些是周期函数；对于周期函数，指出其周期。

(1) $y=\cos(x-2)$；　(2) $y=\cos4x$；　(3) $y=1+\sin\pi x$；

(4) $y=x\cos x$；　(5) $y=\sin^2x$。

思路　利用周期函数定义。设 $f(x)$ 是以 $T>0$ 为周期的函数，则 $f(ax)$ 是以 $\frac{T}{a}$ 为周期的函数。

解　(1)设 $y=f(x)=\cos(x-2)$，则 $f(x+2\pi)=\cos(x+2\pi-2)=\cos[(x-2)+2\pi]=\cos(x-2)$，所以 $y=\cos(x-2)$ 是周期函数，周期 $l=2\pi$。

(2)设 $y=f(x)=\cos4x$，则 $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(4x+2\pi)=\cos4\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos4x$ 是周期函数，周期 $l=\frac{\pi}{2}$。

(3)因为 $\sin x$ 是以 2π 为周期的函数，所以 $\sin\pi x$ 是以 2 为周期的函数，故 $y=1+\sin\pi x$ 是以 2 为周期的函数。

(4) $y=x\cos x$ 不是周期函数。

(5) $y=\sin^2x=\frac{1-\cos2x}{2}$，因为 $\cos x$ 是以 2π 为周期的函数，所以 $\cos2x$ 的周

期为 π,即 $y=\sin^2 x$ 是周期函数且周期为 $l=\pi$。

14. 求下列函数的反函数。

(1)$y=\dfrac{1-x}{1+x}$;　　(2)$y=2\sin 3x, x\in\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right]$;

(3)$y=1+\ln(x+2)$;　　(4)$y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$。

思路 $y=f(x)$的反函数求法:(1)从 $y=f(x)$解出 $x=f^{-1}(y)$;(2)将 x 换为 y,同时将 y 换为 x 得反函数 $y=f^{-1}(x)$。

解 (1)$y=\dfrac{1-x}{1+x}$,$y+xy=1-x$,$x(1+y)=1-y$,$x=\dfrac{1-y}{1+y}$,从而得反函数 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$;

(2)$y=2\sin 3x$,$\sin 3x=\dfrac{y}{2}$,$3x=\arcsin\dfrac{y}{2}$,$x=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{y}{2}$,所以反函数 $y=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{x}{2}$,$x\in[-2,2]$。

(3)$\ln(x+2)=y-1$,$x+2=e^{y-1}$,$x=e^{y-1}-2$,所以反函数为 $y=e^{x-1}-2$。

(4)$y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$,$y+2^x y=2^x$,$2^x(1-y)=y$,$2^x=\dfrac{y}{1-y}$,$x=\log_2\dfrac{y}{1-y}$,所以反函数为 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$。

15. 在下列各题中,求由所给函数复合而成的函数,并求这函数分别对应于所给自变量 x_1 和 x_2 的函数值:

(1)$y=u^2$,$u=\sin x$,$x_1=\dfrac{\pi}{6}$,$x_2=\dfrac{\pi}{3}$;

(2)$y=\sin u$,$u=2x$,$x_1=\dfrac{\pi}{8}$,$x_2=\dfrac{\pi}{4}$;

(3)$y=\sqrt{u}$,$u=1+x^2$,$x_1=1$,$x_2=2$;

(4)$y=e^u$,$u=x^2$,$x=\tan t$,$t_1=0$,$t_2=\dfrac{\pi}{4}$;

(5)$y=u^2$,$u=e^x$,$x=\tan t$,$t_1=0$,$t_2=\dfrac{\pi}{4}$。

解 (1)$y=\sin^2 x$,$y\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin^2\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{4}$,$y\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin^2\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3}{4}$。

(2)$y=\sin 2x$,$y\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,$y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$。

(3)$y=\sqrt{1+x^2}$,$y(1)=\sqrt{2}$,$y(2)=\sqrt{5}$。

(4)$y=e^{\tan^2 t}$,$y(0)=1$,$y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=e$。

(5) $y=e^{2\tan x}$，$y(0)=1$，$y\left(\frac{\pi}{4}\right)=e^2$。

16. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$。问 (1) $f(x^2)$，(2) $f(\sin x)$，(3) $f(x+a)(a>0)$，(4) $f(x+a)+f(x-a)$，$(a>0)$ 的定义域各是什么？

解　(1) 由 $x^2\leqslant 1$，得 $|x|\leqslant 1$，$-1\leqslant x\leqslant 1$，定义域为 $[-1,1]$。

(2) 由 $0\leqslant \sin x\leqslant 1$ 得 $2n\pi\leqslant x\leqslant (2n+1)\pi$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$。即定义域为 $[2n\pi,(2n+1)\pi]$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$。

(3) 由 $0\leqslant x+a\leqslant 1$，得 $-a\leqslant x\leqslant 1-a$，即定义域为 $[-a,1-a]$。

(4) $\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1\\0\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases}$，若 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，则定义域为 $[a,1-a]$；若 $a>\frac{1}{2}$ 时，则函数无定义。

17. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\0, & |x|=1\\-1, & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=e^x$，求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$，并作出这两个函数的图形。

解　$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & |g(x)|<1\\0, & |g(x)|=1\\-1, & |g(x)|>1\end{cases}=\begin{cases}1, & |e^x|<1\\0, & |e^x|=1\\-1, & |e^x|>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1, & x<0\\0, & x=0\\-1, & x>0\end{cases}$$

因 $|e^x|<1$，则 $x<0$；$|e^x|=1$，则 $x=0$；$|e^x|>1$，则 $x>0$，

$$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases}e^1, & |x|<1\\e^0, & |x|=1\\e^{-1}, & |x|>1\end{cases}=\begin{cases}e, & |x|<1\\1, & |x|=1\\e^{-1}, & |x|>1\end{cases}$$

两个函数图形如图 1-1 所示。

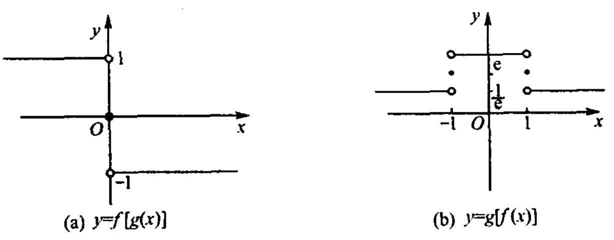


图 1-1

18. 火车站收取行李费的规定如下：当行李不超过 50 千克时，按基本运费计

算，如从上海到某地每千克收 0.15 元。当超过 50 千克时，超重部分按每千克 0.25 元收费。试求上海到该地的行李费 y(元)与重量(千克)之间的函数关系式，并画出这函数的图形。

解　$y=\begin{cases}0.15x, & 0<x\leqslant 50 \text{ 的正整数}\\ 7.5+0.25(x-50), & x>50 \text{ 的正整数}\end{cases}$

函数的图形如图 1-2 所示。

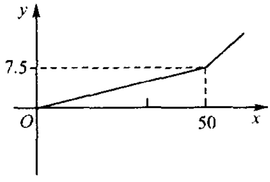


图 1-2

19. 按照银行规定某种外币一年期存款的年利率为 4.2%，半年期存款的年利率为 4.0%，每笔存款到期后，银行自动将其转存为同样期限的存款。设将总数为 A 单位货币的该种外币存入银行，两年后取出，问存何种期限的存款能有较多的收益，多多少？

解　存一年期存款一年后本利和为 $(1+4.2\%)A$

二年后取出的本利和为 $(1+4.2\%)^2A=1.085764A$

存半年期存款半年后取出本利和为 $(1+2\%)A$

二年后取出本利和为 $(1+2\%)^4A=1.0824321A$

存一年期的存款收益较多

多 $1.085764A-1.0824321A\approx 0.0033A$

点拨　将年利率换为月利率乘月份数，如 $(4\%\div 12)\times 6=2\%$ 为半年利率。

第二节　数列的极限

疑难问题解析

1 如何正确理解数列极限的概念？

分析　数列极限的严格定义要用不等式表达：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$。

因此，在学习数列极限概念时，首先必须弄清有关不等式的含义：

(1)在定义中的“$\forall\varepsilon>0$”表示什么意思呢？ε 是任意给定的，即 ε 的任意性是不可缺少的，而 ε 一经给定之后，ε 就是已知的了。因此 ε 具有任意性和确定性这样的双重性，这就是 $\forall\varepsilon>0$ 的含义。

(2)定义中的“$\exists N>0$”表示什么意思呢？“$\exists$”是什么意思呢？“$\exists$”的含义是：不是惟一的。$\exists N>0$ 表示 N 不是惟一的，只要找得到某一个 N 就可以。但 N 与 ε 有关，所以找 N 时要合理，这就决定找 N 的方法可以采取“放大法”。

因此"$\exists N>0$"的含义是 N 具有不惟一性和合理性这样的双重性质。值得注意的是 N 与 ε 有关，但不是 ε 的函数。

(3)定义中的 $|x_n-a|$ 表示什么？绝对值 $|x_n-a|$ 表示数轴上的动点 $M(x_n)$ 与定点 $A(a)$ 之间的距离，即 $|AM|=|x_n-a|$。

(4)定义中的不等式"$|x_n-a|<\varepsilon$"表示什么意思？不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 表示动点 $M(x_n)$ 与定点 $A(a)$ 之间的距离小于任意给定的正数 ε。由于 ε 可以任意小，则不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 表示点 x_n 无限接近于 a。

(5)定义中的"当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$"表示什么意思？由(2)知，这里的 N 是由一个已经任意给定的 $\varepsilon>0$ 确定好的项序数，大于 N 的项的序数就是 $N+1, N+2, \cdots$。因此对于 $n>N$ 时的一切 x_n，不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 都成立，即不等式 $n>N$ 时是不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立的条件，也就是说当 $n>N$ 时就是下列无穷多个不等式：$|x_{N+1}-a|<\varepsilon$，$|x_{N+2}-a|<\varepsilon$，…都成立。由于 ε 的任意性，从而有 x_n 无限接近于 a，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

上述(1)～(5)的分析是在教会读者如何看书，看书时对书中的定义的每句话都要读懂。

2 如何用数列极限[ε-N]定义验证极限？

分析　弄清数列极限[ε-N]定义中各项的含义，就不难得出利用数列 $\{x_n\}$ 极限[ε-N]定义验证极限的一般步骤。

如用[ε-N]定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{5n+2}=\dfrac{1}{2}$，这里 $x_n=\dfrac{2n-1}{5n+2}$，$a=\dfrac{1}{2}$ 都是已知的，$\forall\varepsilon>0$，ε 是任意给定，给定之后，ε 也是已知的。从而不等式 $\left|\dfrac{2n-1}{5n+2}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$ 是已知，用[ε-N]定义验证就是从已知不等式 $\left|\dfrac{2n-1}{5n+2}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$ 求出使此不等式成立的条件：$n>N$。因此问题的实质就是解不等式 $\left|\dfrac{2n-1}{5n+2}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$ 问题。下面给出一般规律：

按[ε-N]定义，先任给 $\varepsilon>0$，则 ε 就是已知的，而题中的 x_n，a 也是已知，假设结论成立，于是就化为从已知不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 去寻找该不等式成立的条件：$n>N$。由于 N 不是惟一的，因此 N 的选取具有灵活性，我们可以不必先追求最小的 N。一般采用"放大法"，即 $|x_n-a|<$ 放大 $<ME(n)<\varepsilon$，其中 M 是与 n 无关的数。而不等式 $ME(n)<\varepsilon$ 容易解出 n。从而找到使不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立的条件，问题便得证。从上述分析知这种证题方法是"逆推法"，也称"分析法"。

【例 1】　用[ε-N]定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-1}{n}=0$。

证明　$\forall\varepsilon>0$，要证 $\exists N>0$，当 $n>N$ 时，有 $\left|\dfrac{\sqrt{n+1}-1}{n}-0\right|<\varepsilon$ 只须