



普通高等教育



“十五”

PUTONG
GAODENG JIAOYU
SHIWU
GUIHUA JIAOCAI

规划教材

工程电磁场基础与应用

Fundament of Engineering Electromagnetic Fields and Applications

杨尔滨 杨欢红 刘蓉晖 陆文雄 编著



中国电力出版社

<http://jc.cepp.com.cn>

0441.4
74

普通高等教育



“十五”

规划教材

PUTONG
GAODENG JIAOYU
SHIWU
GUIHUA JIAOCAI

工程电磁场基础与应用

编 著 杨尔滨 杨欢红
刘蓉晖 陆文雄
主 审 徐国治

北方工业大学图书馆



00594835



中国电力出版社

<http://jc.cepp.com.cn>

SGJ43/98

内 容 简 介

工科电类专业的电磁场课程是在大学物理的基础上开设的。该课程进一步介绍宏观电磁场的基本性质和基本规律,并介绍其应用方面的基本知识及技能,使电气工程学生对工程中的电磁现象和电磁过程,能应用场的观点进行初步分析;对一些简单的问题能进行计算;为学习专业或进一步研究电磁场问题,准备必要的理论基础。

正是基于以上出发点,本书着重阐明工程电磁场所涉及到的基本理论和基本概念。通过较多的例子,尽可能将枯燥复杂的理论,阐述得通俗易懂,便于自学。同时还尝试着将 MATLAB 软件用于对电磁场理论的分析 and 仿真,使读者能从复杂的数学表达式中看出其所表达的物理图像,使抽象的电磁场理论显现出生动直观的一面。

本书在各章后面都有小结和一定量的难易程度适当的习题,并附有参考答案。本书可作为电气工程及其自动化专业的本科生学习教材,也可作为电子信息工程、自动控制、网络通信等专业的学习参考书,同时还可作为有关工程技术人员的自学参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

工程电磁场基础与应用/杨尔滨等编著. —北京:中国电力出版社, 2005

普通高等教育“十五”规划教材

ISBN 7 - 5083 - 3533 - 3

I. 工... II. 杨... III. 电磁场 - 高等学校 - 教材
IV. 0441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 082929 号

中国电力出版社出版、发行

(北京三里河路 6 号 100044 <http://jc.cepp.com.cn>)

汇鑫印务有限公司

各地新华书店经售

*

2005 年 8 月第一版 2005 年 8 月北京第一次印刷

787 毫米 × 1092 毫米 16 开本 17.5 印张 403 千字

印数 0001—3000 册 定价 26.80 元

版 权 专 有 翻 印 必 究

(本书如有印装质量问题, 我社发行部负责退换)

序

由中国电力教育协会组织的普通高等教育“十五”规划教材，经过各方的努力与协作，现在陆续出版发行了。这些教材既是有关高等院校教学改革成果的体现，也是各位专家教授丰富的教学经验的结晶。这些教材的出版，必将对培养和造就我国 21 世纪高级专门人才发挥十分重要的作用。

自 1978 年以来，原水利电力部、原能源部、原电力工业部相继规划了一至四轮统编教材，共计出版了各类教材 1000 余种。这些教材在改革开放以来的社会主义经济建设中，为深化教育教学改革，全面推进素质教育，为培养一批批优秀的专业人才，提供了重要保证。原全国高等学校电力、热动、水电类专业教学指导委员会在此间的教材建设工作中，发挥了极其重要的历史性作用。

特别需要指出的是，“九五”期间出版的很多高等学校教材，经过多年的教学实践检验，现在已经成为广泛使用的精品教材。这批教材的出版，对于高等教育教材建设起到了很好的指导和推动作用。同时，我们也应该看到，现用教材中有不少内容陈旧，未能反映当前科技发展的最新成果，不能满足按新的专业目录修订的教学计划和课程设置的需要，而且一些课程的教材可供选择的品种太少。此外，随着电力体制的改革和电力工业的快速发展，对于高级专门人才的需求格局和素质要求也发生了很大变化，新的学科门类也在不断发展。所有这些，都要求我们的高等教育教材建设必须与时俱进，开拓创新，要求我们尽快出版一批内容新、体系新、方法新、手段新，在内容质量上、出版质量上有突破的高水平教材。

根据教育部《关于“十五”期间普通高等教育教材建设与改革的意见》的精神，“十五”期间普通高等教育教材建设的工作任务就是通过多层次的教材建设，逐步建立起多学科、多类型、多层次、多品种系列配套的教材体系。为此，中国电力教育协会在充分发挥各有关高校学科优势的基础上，组织制订了反映电力行业特点的“十五”教材规划。“十五”规划教材包括修订教材和新编教材。对于原能源部、电力工业部组织原全国高等学校电力、热动、水电类专业教学指导委员会编写出版的第一至四轮全国统编教材、“九五”国家重点教材和其他已出版的各类教材，根据教学需要进行修订。对于新编教材，要求体现电力及相关行业发展对人才素质的要求，反映相关专业科技发展的最新成就和教学内容、课程体系的改革成果，在教材内容和编写体系的选择上不仅要有本学科（专业）的特色，而且注意体现素质教育和创新能力与实践能力的培养，为学生知识、能力、素质协调发展创造条件。考虑到各校办学特色和培养目标不同，同一门课程可以有多本教材供选择使用。上述教材经中国电力教育协会电气工程学科教学委员会、能源动力工程学科教学委员会、电力经济管理学科教学委员会的有关专家评审，推

荐作为高等学校教材。

在“十五”教材规划的组织实施过程中，得到了教育部、国家经贸委、国家电力公司、中国电力企业联合会、有关高等院校和广大教师的大力支持，在此一并表示衷心的感谢。

教材建设是一项长期而艰巨的任务，不可能一蹴而就，需要不断完善。因此，在教材的使用过程中，请大家随时提出宝贵的意见和建议，以便今后修订或增补。（联系方式：100761 北京市宣武区白广路二条1号综合楼9层 中国电力教育协会教材建设办公室 010-63416237）

中国电力教育协会

前 言

电磁场理论是电气工程类专业技术的理论基础，是电气工程及其自动化专业本科学子必须具备的知识结构。

本教材是根据国家教委公布的高等工业学校《电磁场课程教学基本要求》及结合近年来不断进行的教学改革的具体情况，为电气工程类本科学子所编写的一本专业技术基础课程教材。旨在大学物理电磁学的基础上进一步阐述宏观电磁现象的基本规律，介绍其在工程应用方面的基本知识，以培养学生应用场的观点和方法对电工领域中的电磁现象、电磁过程进行定性分析和判断的能力以及进行定量分析的基本技能，为学生今后解决工程实际问题打下良好的基础。此外，本课程的理论性和逻辑推理特点，对培养学生正确的思维方法和严谨的科学态度也大有帮助。

本书的特点主要有：

(1) 在内容体系上采用从静态场到时变场，从特殊到一般的顺序。重点加强了对基本概念的阐述，并力求理论与实际相结合，所举例题与专业实际相联系。既能与先修课程保持恰当的衔接，也能为后续专业课程所应用到的电磁场理论进行合理的安排。

(2) 尽量简化对某些定理和公式的证明推导，对一些较为抽象问题的论述通过例题和透彻的分析，以消除学生对电磁场理论课存在的数学繁难、概念抽象、自学不易的感觉。

(3) 采用 MATLAB 强大的仿真功能，对电磁场进行仿真，可以清楚地看到电磁场的三维空间分布的模拟分布曲线图，使得学生在学习较为抽象的电磁场理论时有了形象思维的帮助，以增强学懂弄通电磁场理论的信心。

本书是按 50~70 学时的教学安排所编写的，也可以根据具体教学要求进行增删。

参加本书编写的有上海电力学院杨尔滨、杨欢红、刘蓉晖和陆文雄，其中杨尔滨编写第四、五、七章及附录一、二并任本书主编；陆文雄编写第一章，并校审各章习题及解答；杨欢红编写第三章及附录三、四；刘蓉晖编写第二、六章。全书由上海交通大学徐国治教授仔细校审，并提出许多宝贵的修改意见，在此谨致谢意。

限于作者的水平，本书中一定存在不少不妥和错误之处，恳请各位读者不吝指正。

编者

目 录

序	
前言	
第一章 静电场	1
第一节 真空中的静电场	1
第二节 电介质中的静电场	11
第三节 静电场的基本方程、分界面上的边界条件	18
第四节 平面镜像法	26
第五节 球面镜像法	31
第六节 柱面镜像法——电轴法	35
第七节 电容和部分电容	42
第八节 静电场能量和力	49
习题	59
第二章 恒定电场	63
第一节 导电媒质中的电流和电流密度	63
第二节 恒定电场的基本方程、分界面上的边界条件	66
第三节 恒定电场与静电场的比拟	74
第四节 电导与接地电阻的计算	76
习题	85
第三章 恒定磁场	88
第一节 真空中的恒定磁场	88
第二节 磁媒质中的恒定磁场	93
第三节 恒定磁场的基本方程、分界面上的边界条件	96
第四节 标量磁位	98
第五节 矢量磁位	101
第六节 镜像法	106
第七节 电感	109
第八节 磁场能量和力	115
习题	122
第四章 时变电磁场	128
第一节 时变电磁场的认识和发展过程	128
第二节 法拉第电磁感应定律	129
第三节 麦克斯韦方程	134
第四节 时变电磁场的边界条件	139
第五节 复数形式的麦克斯韦方程	140

第六节	坡印亭定理及坡印亭矢量	143
第七节	动态位	148
第八节	波动方程	151
第九节	电磁场与电路的关系	152
	习题	157
第五章	平面电磁波	159
第一节	理想介质中的均匀平面波	159
第二节	导电媒质中的平面波	163
第三节	电磁波的极化	168
第四节	平面电磁波的垂直投射	171
第五节	相速和群速	174
第六节	集肤效应、邻近效应、电磁屏蔽与涡流	175
第七节	电磁波谱	178
	习题	180
第六章	均匀传输线	182
第一节	电路参数的分布性与分布参数电路	182
第二节	均匀传输线及其方程	183
第三节	均匀传输线方程的正弦稳态解	186
第四节	均匀传输线的原参数和副参数	193
第五节	终端接特性阻抗的传输线	195
第六节	终端接任意阻抗的传输线	197
第七节	无损耗传输线	199
第八节	无损耗线方程的通解	204
第九节	无损耗线的波过程	207
	习题	209
第七章	应用 MATLAB 对电磁场的仿真	211
第一节	MATLAB 简介	211
第二节	应用 MATLAB 的 m 语言对电磁场的仿真	212
第三节	应用 MATLAB 偏微分方程工具箱对电磁场的仿真	227
	习题	239
附录一	矢量分析与场论概念	241
附录二	立体角的概念	251
附录三	电磁场常用物理量和单位	252
附录四	电磁场专业词汇中英文对照表	254
	习题参考答案	261
	参考文献	269

第一章 静 电 场

电场的特性，通常用被携入电场的静止带电体所受到机械力（电场力）的作用来说明。因此我们这样来定义电场：电场是电磁场的一个方面，它对于引入场中的静止的带电体有机械力的作用。

必须指出，要分析电场的特性，必须用静止的带电体。这是因为如果带电体不是静止的，则不但电场对它有力的作用，而且磁场也将对它有力的作用。

多数情况下，电磁场是与电荷密切联系着的，所以也可以简单地说：电荷周围所存在着的一种特殊形式的物质，称为电场。

相对于观察者为静止的，且其电荷不随时间而变的带电体所产生的电场，称为静电场。

本章讨论静止电荷产生的电场，描述它的场量——电场强度矢量、电位移矢量。根据静电场环路定理及守恒性，引入了电位和电位梯度的概念；根据高斯通量定理，先分析真空中的电场，再讨论电介质中的电场，以及导体的影响，由此得出静电场的基本方程，包括积分形式和微分形式，并引入了旋度和散度的概念，得出静电场的无旋性和有散性。

由基本方程的积分形式，导出不同介质分界面上场量的边界条件。由基本方程的微分形式，导出电位所满足的微分方程，即泊松方程和拉普拉斯方程。根据静电场解答的惟一性，介绍了镜像法和电轴法这两种间接求解的方法。

根据独立导体和两导体间电容的计算方法，给出了多导体系统部分电容的概念。最后介绍了静电场能量、能量密度，以及应用虚功原理，即用虚位移法计算电场力的方法。

第一节 真空中的静电场

1. 库仑定律、电场强度

无限大真空中，两个点电荷 q_1 、 q_2 间的作用力，可由库仑定律确定。在图 1-1 中， q_2 所受到 (q_1 对它) 的作用力，在国际单位制 (SI) 中，可表示为

$$f_{21} = q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} r_{12}^0 \quad (1-1)$$

式中， r_{12}^0 是由 q_1 到 q_2 方向的单位矢量。

同样地， q_1 所受到的力，可表示为

$$f_{12} = q_1 \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} r_{21}^0 \quad (1-2)$$

式中， r_{21}^0 是由 q_2 到 q_1 方向的单位矢量， $r_{21}^0 = -r_{12}^0$ 。

式 (1-1) 和式 (1-2) 中，电荷的单位是 C，距离 r 的单位是 m，力的单位为 N， ϵ_0 是真空的介电常数，也称真空的电容率，它的单位为 F/m，其值为 $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ 。

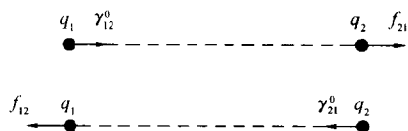


图 1-1

如果有多个点电荷, 则一个点电荷所受其他点电荷对它的作用力应等于这些点电荷分别作用于该点电荷的力的矢量和, 即可以应用叠加原理。

应用库仑定律时应当注意两点: ①它仅适用于电荷处在无限大真空(或均匀介质)的情况下; ②它仅适用于点电荷。实际上任何带电体都有体积,

当带电体的线性尺度与两带电体间的距离相比微不足道时, 在工程要求的准确度下, 可以将带电体上的电荷当作点电荷来处理。

静止带电体周围电场的性质, 可以通过引入另一试体电荷在场中所受的作用力来描述。

为了使被研究的电场尽量少受试体的影响, 试体的几何尺寸必须很小, 同时它所带的电量 q_t 也必须相当小, 即为电量很小的点电荷。

电场的分布特性可以通过单位正电荷在场中所受的力来表征。表征电场性质的基本物理量称为电场强度 E , 简称为场强, 它的数学表达式为

$$E(x, y, z) = \lim_{q_t \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z)}{q_t} \quad (1-3)$$

式中, f 表示试体电荷 q_t 在观察点 $P(x, y, z)$ 所受的作用力; E 是随着空间位置的不同而变化的矢量函数, 它的单位是 V/m , 或 N/C , 但这是非电单位。

应该注意, 空间某点的电场强度 E 与正电荷在该点所受的力 f 的方向一致, 其量值等于单位正电荷在该点所受到的力的大小, 但电场强度并不是力。

根据电场强度的定义和库仑定律, 可以求得点电荷 q 在无限大真空中所产生的电场强度

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} r^0 \quad (1-4)$$

点电荷 q 所在的点称为源点, 观察点称为场点。 r^0 和 r 分别为由源点指向场点的单位矢量和距离。

根据叠加原理, 多个 (n 个) 点电荷在无限大真空中某点产生的电场强度应等于各个点电荷各自在该点产生的电场强度之和。由于电场强度是矢量, 所以这种求和, 应该是矢量和, 即

$$E = E_1 + E_2 + \cdots + E_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{r^2} r_k^0 \quad (1-5)$$

电荷的分布实际上是不连续的, 但是当我们考察电的宏观现象时, 可以把电荷的离散分布近似地用它的连续分布来替代, 因此就可以引入电荷密度的概念。

当电荷作体分布时, 定义其体电荷密度为

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV} \quad (C/m^3) \quad (1-6)$$

当电荷分布在厚度可以忽略的面积上时, 定义其面电荷密度为

$$\rho_s = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS} \quad (C/m^2) \quad (1-7)$$

同样地, 当电荷分布在截面积可以忽略的线形区域时, 定义其线电荷密度为

$$\rho_l = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl} \quad (\text{C/m}) \quad (1-8)$$

计算电场时, 对于任何电荷分布, 可以把它们分成许多元电荷 dq , 而把每一元电荷看成点电荷。因此根据式 (1-4), 在无限大真空中, 元电荷在离它 r 远处所产生的电场强度为

$$d\mathbf{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}^0 \quad (1-9)$$

应用叠加定理, 全部电荷在该点所产生的电场强度为

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \mathbf{r}^0 \quad (1-10)$$

这是给定电荷分布求电场强度的一般公式。式中的 dq , 随电荷的体分布、面分布或线分布, 可分别表示为 ρdV 、 $\rho_S dS$ 或 $\rho_l dl$ 。

【例 1-1】 图 1-2 所示真空中长度为 l 的线电荷, 其电荷线密度为 ρ_l , 求线外任一点 P 处的电场强度。

解 取圆柱坐标并将线电荷沿 z 轴方向放置, 由于电场成轴对称, 因此与 α 坐标无关。 dz' 为线元, 源点 $\rho_l dz'$ 的坐标为 $(0, 0, z')$, 它在场点 P 处的三个圆柱坐标分量分别为

$$dE_r = dE \sin\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l dz'}{R^2} \sin\theta$$

$$dE_z = 0$$

$$dE_z = dE \cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l dz'}{R^2} \cos\theta$$

其中

$$R = \frac{r}{\sin\theta} = r \csc\theta$$

$$z' = z - r \cot\theta, dz' = r \csc^2\theta d\theta$$

代入前式后可得

$$dE_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l \sin\theta}{r} d\theta$$

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l \cos\theta}{r} d\theta$$

长度为 l 的整个线电荷在 P 点处引起的电场强度为

$$E_r = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta d\theta = \frac{-\rho_l}{4\pi\epsilon_0} (\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta d\theta = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

当线电荷为无限长时, 则 $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi$, 得

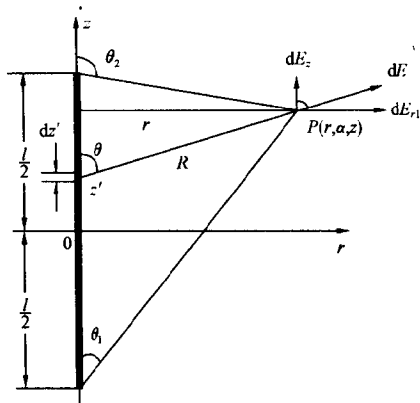


图 1-2

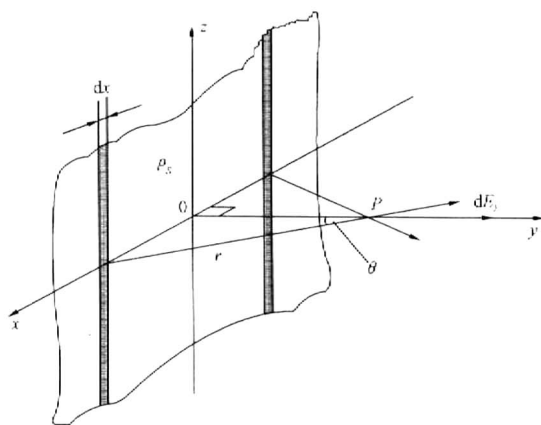


图 1-3

dx) r 处 $P(0, y, 0)$ 的电场强度为

$$dE_y = \frac{\rho_s dx}{2\pi\epsilon_0 r} \cos\theta = \frac{\rho_s y dx}{2\pi\epsilon_0(x^2 + y^2)}$$

其中

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \cos\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

整个面电荷在 P 点引起的电场强度为

$$E_y = \frac{\rho_s y}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + y^2} = \frac{\rho_s y}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{y} \left[\lg^{-1} \frac{x}{y} \right]_{x=-\infty}^{\infty} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}$$

即

$$\mathbf{E} = E_y \mathbf{i} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \mathbf{j}$$

2. 真空中的高斯定理

在无限大真空中, 有一点电荷, 以该点电荷所在处为球心作一任意半径 r 的球面, 则由该球面穿出的 \mathbf{E} 的通量应为

$$\psi_E = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}^0 \cdot \mathbf{r}^0 d\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oiint_S d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (1-11)$$

这说明真空中一个点电荷 q 与由它发出的 \mathbf{E} 通量间有关系式

$$\psi_E = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (1-12)$$

如果包围点电荷的是一个任意形状的闭合面, 则由该闭合面穿出的 \mathbf{E} 的通量 ψ_E 仍为 q/ϵ_0 。

将上述结论推广, 可得真空中的高斯定理: 在真空电场中, 穿出任意闭合面的 \mathbf{E} 通量 ψ_E 等于该闭合面所包围的电荷的代数和 Q 除以真空介电常数 ϵ_0 , 即

$$E_r = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$$E_z = 0$$

即

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{r}^0$$

【例 1-2】 图 1-3 所示无限大面分布电荷的面电荷密度为 ρ_s , 求面外任一点的电场强度。

解 在面电荷上切取宽度为 dx 的窄条, 若长度为 l , 则其元面积 $dS = ldx$, 因此该窄条的电荷线密度为

$$\rho_l = \frac{\rho_s l dx}{l} = \rho_s dx$$

利用 [例 1-1] 的结果, 距离线电荷 (窄条

$$\psi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (1-13)$$

如果在无限大真空的电场中, 作一闭合面包围了 n 个点电荷, 则根据叠加原理

$$\psi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\sum_{k=1}^n q_k}{\epsilon_0} \quad (1-14)$$

显然, 对于闭合面内是连续分布电荷的情况, 则为

$$\psi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\iiint_V \rho dv}{\epsilon_0} \quad (1-15)$$

高斯定理可以应用立体角概念作一般证明。

【例 1-3】用高斯定理求图 1-4 所示线密度为 ρ_l 的无限长线电荷外任一点的电场强度。

解 由 [例 1-1] 的结果可知, 无限长线电荷外任一点的电场, 只有径向分量并成轴对称, 无轴向分量。以线电荷为轴线作一半径为 r , 高为 l 的圆柱形高斯面, 其包围的电荷为 $\rho_l l$, 根据式 (1-14) 可得

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\rho_l l}{\epsilon_0}$$

由于圆柱上下底无电场强度通量, 只有侧面有通量, 并且半径为 r 处的场强相等, 因此上式可写成

$$E \oint_S dS = 2\pi r l E = \frac{\rho_l l}{\epsilon_0}$$

所以

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_l}{2\pi r \epsilon_0} \mathbf{r}^0$$

3. 静电场的环路定理和守恒性

由于电场强度 \mathbf{E} 是矢量, 矢量的运算较为复杂, 因此希望找到一个标量函数来表征静电场。为此我们来考察试验电荷 q_1 在电场中从一点沿某一路径移动到另一点时, 作用于 q_1 的电场力所做的功。从图 1-5 可见, 试验电荷 q_1 移动距离 $d\mathbf{l}$ 时, 电场力所做的功为

$$dA = \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = q_1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-16)$$

将 q_1 从 P 点移动到 Q 点, 电场力所做的功是

$$A_{PQ} = q_1 \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-17)$$

定义 A_{PQ} 与 q_1 的比值为沿某一路径由 P 点到 Q 点的电压, 用 U_{PQ} 来表示, 这样

$$U_{PQ} = \frac{A_{PQ}}{q_1} = \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-18)$$

可见两点间的电压等于由一点到另一点移动单位正电荷时, 电场力所做的功。电压的单位是 V。

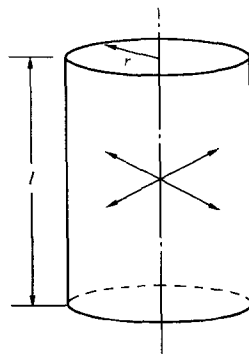


图 1-4

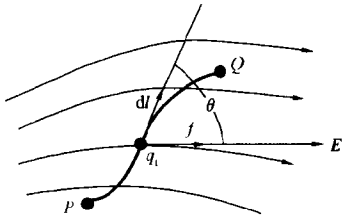


图 1-5

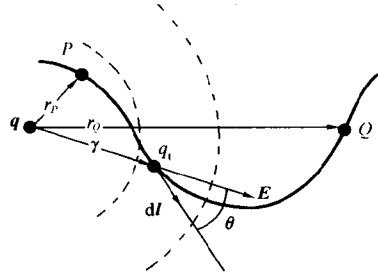


图 1-6

现在还要进一步探讨静电场中两点之间的电压与所取的路径是否有关系。为此，把点电荷在真空中所产生的电场强度表达式 (1-4) 代入式 (1-18)，并进行积分，于是

$$U_{PQ} = \int_P^Q \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}^0 \cdot d\mathbf{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_P^Q \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_Q} \right) \quad (1-19)$$

式中， r_P 与 r_Q 分别为 P 、 Q 两点与点电荷 q 所在处的距离，见图 1-6。

根据上述可以看出， P 、 Q 两点间的电压 U_{PQ} ，只与 P 点和 Q 点的位置有关，而与所取路径无关。这是静电场的重要性质。这一结论虽然是由一个点电荷所产生的电场中得出的，但是在一般情况下，它也是正确的。这是因为对于任何电荷分布，总可以把它分成许多可以看成点电荷的元电荷 dq ，每个元电荷产生的电场既然具有上述性质，而整个电荷分布所产生的电场，是所有这些元电荷引起的元场强的合成，当然也具有这种性质。由此还可以看出电压也可以应用叠加原理。

静电场中任意两点间电场强度向量 \mathbf{E} 的线积分与路径无关这一特性，常用另一种形式来表达，即电场强度向量 \mathbf{E} 的环路线积分恒等于零。推导如下：

在图 1-7 所示的电场中，从 P 到 Q 沿两条不同的路径 PmQ 和 PnQ ，求电场强度 \mathbf{E} 的线积分，因为电压与路径无关，应有

$$\int_{PmQ} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{PnQ} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-20)$$

经过移项

$$\int_{PmQ} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_{PnQ} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (1-21)$$

交换第二项的上下限

$$\int_{PmQ} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{QnP} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (1-22)$$

即

$$\int_{PmQnP} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (1-23)$$

上式通常写成

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0 \quad (1-24)$$

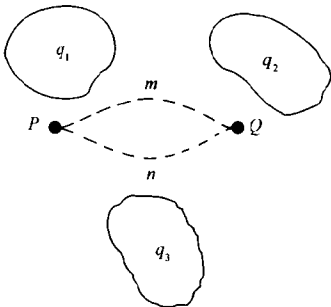


图 1-7

电场强度的环路线积分为零, 是静电场的基本方程之一, 这就是静电场的环路定理。该定理表明, 在静电场中沿任一闭合环路移动单位正电荷一周, 电场力所做的功为零, 换言之, 沿任一闭合环路运动, 功和能量是守恒的。根据静电场的守恒性, 故称静电场是守恒场。

4. 电位与电位梯度

由于静电场中任意两点间的电压有完全确定的数值, 而与路径无关, 因此如果在场中任意选定一点例如 Q 点, 作为参考点, 那么单位正电荷从电场中任意点 P 移动到参考点 Q 时, 电场力所做的功, 也就是 P 点到 Q 点的电压, 将仅随 P 点的坐标而异, 此时 P 点到参考点的电压, 被定义为 P 点的电位, 它是个标量, 即

$$\varphi_P = \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-25)$$

φ_P 也可称为 P 点相对于 Q 点的电位。不管参考点如何选取, 一经确定后, 空间中任意一点 P 都有完全确定的单一电位值, 即电位是单值函数, 因此可用电位来描述静电场的特性。参考点的电位显然为

$$\varphi_Q = \int_Q^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (1-26)$$

电位的单位与电压的相同, 也是 V 。

在工程上, 常常把大地表面作为电位参考点。而在理论分析时, 只要引起电场的全部电荷都处于有限的空间区域内, 不管电荷如何分布, 选取无限远作为参考点, 对电位计算将带来很大的方便。在这种情况下, 任意点 P 的电位为

$$\varphi_P = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-27)$$

静电场中任意两点 A 与 B 间的电压, 就是这两点之间的电位差。这是因为

$$\begin{aligned} U_{AB} &= \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_Q^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_A^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_B^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \varphi_A - \varphi_B \end{aligned} \quad (1-28)$$

当 $\varphi_A > \varphi_B$ 时, $U_{AB} > 0$ 为正值, 因此所说的电压是指电位降, 即某点的电位就是该点与参考点间的电压。

由式 (1-27) 可以求得在无限大真空中一个点电荷 q 在距离它 r 远处的电位为

$$\varphi = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (1-29)$$

根据一个点电荷所产生电位的表达式, 应用叠加原理可以得出 n 个点电荷在电场中任意点所产生的电位

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{r_k} \quad (1-30)$$

式中, r_k 是第 k 个点电荷 q_k 与要求其电位的场点之间的距离。

对于连续分布的电荷,同样可以应用叠加原理写出它们所产生的电位

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} \quad (1-31)$$

当为线分布电荷,产生的电位为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_l dl}{r} \quad (1-32)$$

当为面分布电荷,产生的电位为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\rho_S dS}{r} \quad (1-33)$$

当为体分布电荷,产生的电位为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho dV}{r} \quad (1-34)$$

电场强度和电位这两个物理量,既然都是表征同一电场特性的场量,两者之间必定具有一定的内在联系。上面已经讨论了如何从电场强度 \mathbf{E} 求电位 φ , 这里来讨论已知电位 φ 如何求电场强度 \mathbf{E} 。

设 A 和 B 是电场中非常接近的两个点,相距 Δl (如图 1-8 所示), 因此可以将 AB 线上各点的电场强度看作都是相等的。若 Δl 和 \mathbf{E} 的夹角为 θ , 则有单位正电荷从 A 点移到 B 点时, 电场力所做的功应等于 A 、 B 两点间的电位差, 即

$$\varphi_A - \varphi_B = \mathbf{E} \cdot \Delta l = E \cos \theta \Delta l \quad (1-35)$$

若 φ_B 用 $\varphi_A + \Delta\varphi$ 来表示, 则

$$\varphi_A - (\varphi_A + \Delta\varphi) = E \cos \theta \Delta l \quad (1-36)$$

$$-\Delta\varphi = E_l \Delta l \quad (1-37)$$

式中, $E_l = E \cos \theta$ 是电场强度在 l 方向的分量。当 $\Delta l \rightarrow 0$ 时, 有

$$E_l = -\frac{\partial \varphi}{\partial l} \quad (1-38)$$

即电场强度在 l 方向的分量等于电位在该方向的空间偏导数的负值或增加率的负值 (即减小率)。负号的意思是说电场强度方向是电位降落的方向。

如果分别地把直角坐标 x 、 y 、 z 轴的方向作为 l 的方向, 就可以得到电场强度沿这三个方向的分量为

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (1-39)$$

由于

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k} \quad (1-40)$$

于是, 在直角坐标中, 电场强度可写成

$$\mathbf{E} = -\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k} \right] \quad (1-41)$$

或用哈密顿算符 “ ∇ ” 表示

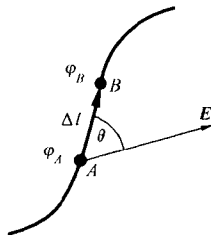


图 1-8

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \quad (1-42)$$

则

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi \quad (1-43)$$

式中, $\nabla \varphi$ 为电位梯度, 梯度也可记作 grad。

式 (1-43) 是微分的表达形式, 它表明电场强度是电位梯度的负值, 即一点的电场 \mathbf{E} 的方向沿着电位的最大空间变化率的负方向 (减小率最大的方向), 所以说电场强度的方向就是电位降的方向, 而电位梯度则是指电位升的方向。

式 (1-43) 的应用很广。由于电位是标量, 一般来说, 先求得电位函数, 然后求导得电场强度, 要比直接求来得简便。

由式 (1-43) 可以看出, 只有在电位不变的区域里, 电场强度才为零。电位为零处, 电场强度不一定为零。电场强度为零处, 电位也不一定为零。

【例 1-4】 已知图 1-9 所示真空中一带电圆环的电荷线密度为 ρ_l , 半径为 a , 求圆环轴线上任一点的电位和电场强度。

解 取元弧长 $a d\alpha$, $d\alpha$ 是其所对的圆心角, 因此其上元电荷 $dq = \rho_l a d\alpha$, 应用圆柱坐标可得电位

$$\varphi = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{a d\alpha}{r^2} = \frac{\rho_l a}{2\epsilon_0 \sqrt{a^2 + z^2}}$$

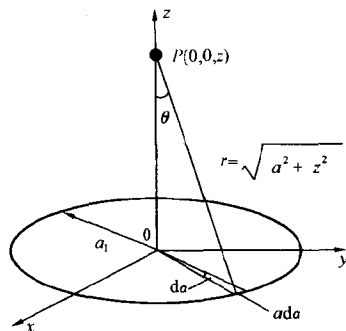


图 1-9

由于 P 点四周的电场成轴对称而互相抵消, 因此只有 z 向分量, 即

$$E = E_z = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{a d\alpha}{r^2} \cos\theta = \frac{\rho_l a}{2\epsilon_0 (a^2 + z^2)} \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{\rho_l a z}{2\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{3/2}}$$

或者由 $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ 来计算, 由于该处的电场强度只有 z 方向分量 E_z , 故

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_z \mathbf{k} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k} = -\frac{\partial}{\partial z} \frac{\rho_l a}{2\epsilon_0 \sqrt{a^2 + z^2}} \mathbf{k} \\ &= \frac{\rho_l a z}{2\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{k} \end{aligned}$$

【例 1-5】 已知图 1-10 所示带电圆盘的电荷面密度为 ρ_s , 半径为 a , 求圆盘轴线上任一点的电位和电场强度。

解 在圆盘上取一半径为 r 宽为 dr 的环带, 该环带的元面积 $dS = 2\pi r dr$, 其电荷 $dq = \rho_s dS = \rho_s \times 2\pi r dr$, 利用 [例 1-4] 计算圆环电场的结果可得元电荷在 P 点所产生的电位和电场强度分别为

$$\begin{aligned} d\varphi &= \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho_s \times 2\pi r dr}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\rho_s r dr}{2\epsilon_0 \sqrt{r^2 + z^2}} \\ dE_z &= \frac{\rho_s r dr}{2\epsilon_0 (r^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

整个圆盘面电荷于 P 点处所产生的电位和电场强度分别为

$$\varphi = \int_0^a \frac{\rho_s r dr}{2\epsilon_0 \sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \sqrt{r^2 + z^2} \Big|_0^a$$