

2005年全国硕士研究生入学考试用书

SHUXUE ZUIHOUCHONGCI MONISHITI

数学最后冲刺 模拟试题

(理工类)

主编/李永乐

新华出版社



2019年10月 第1版第1次印刷

数学最后冲刺 模拟试题

2019年10月

2019年10月

1

2019年10月



2005 年全国硕士研究生入学考试用书

数学最后冲刺模拟试题

(理工类)

主 编:李永乐

编 者:(按姓氏笔画)

北京交通大学

赵达夫

清 华 大 学

李永乐

东北财经大学

龚兆仁

新 华 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

数学最后冲刺模拟试题. 理工类 / 李永乐主编. —北京: 新华出版社, 2004. 9

2005 年全国硕士研究生入学考试用书

ISBN 7-5011-6815-6

I. 考... II. 李... III. 高等数学—研究生—入学考试—习题 IV. Q13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 094763 号

敬告读者

本书封面粘有策划者专用防伪标识, 凡有防伪标识的为正版图书, 请读者注意识别。

2005 年全国硕士研究生入学考试用书

数学最后冲刺模拟试题(理工类)

主编: 李永乐

*

新华出版社出版发行

(北京石景山区京原路 8 号 邮编: 100043)

新华出版社网址: <http://xhchs.126.com>

中国新闻书店: (010) 63072012

新华书店总经销

北京云浩印刷有限责任公司印刷

*

787 毫米×1092 毫米 16 开本 9.5 印张 226 千字

2004 年 10 月第 1 版 2004 年 10 月第 1 次印刷

ISBN 7-5011-6815-6/G · 2481 定价: 15.00 元

若有印装质量问题, 请与印刷厂联系 (010) 89022977

修订版前言

本次修订在结构上有两个大的改动,一是分为理工类与经济类两本书,二是增加了三套模拟试卷。首先是编写更新了较多的模拟题,解答部分也较前更详细,在评注中还增加了较多的题外话,更便于考生理解与把握数学中的一些重要思想与方法;其次增加三套模拟试卷可以使考生在复习的最后阶段练练手,查漏补缺;第三分为两册书后将提高题目的利用率。希望本书的修订再版,能对同学们的复习备考有更大的帮助。

编 者

2004 年 10 月

前 言

本书是为报考硕士研究生的考生编写的数学复习备考用书,适合于数学一至数学四4个卷种,内容包括高等数学(微积分)、线性代数、概率论与数理统计。该书是“数学基础过关660题”一书的姊妹篇。题型为解答题(含计算题、证明题与应用题)。注意,2004年卷子结构改变为:6个填空题,8个选择题,9个解答题,其中填空、选择共56分,解答94分。

硕士研究生入学考试的性质是“具有选拔功能的水平考试”,在强调选拔、强调能力考查的同时,考生除了对大纲中规定的基本概念、基本原理、基本方法深刻理解熟练掌握外,更要不断提高考生解答综合性试题、应用题及证明题的能力。作为研究生入学考试,不能单纯考查数学基础知识,而要在考查三基的基础上注意考查考生的逻辑思维能力、空间想象能力、运算能力,特别是综合应用所学知识的解题能力。所谓综合题(解答题)就是考查多个知识点的试题,一道好的综合题能把考试大纲要求考查的相关知识有机地结合起来。综合题考查的内容可以是同一学科的不同章节,也可以是不同学科的不同章节。

该书预测题全部是解答题。在内容设计上,每题均全新优化设计,涉及两个以上知识点,题型新颖、重点类型突出。几乎涵盖新大纲所有考查知识点。我们相信通过这些试题的训练,一定会尽快提高考生的分析问题和解决问题的能力。

该书每道题都有:分析——该题的解题步骤和解题思路、方法;解答——该题的详细、规范解题过程;评注——该题所考查的知识点(或命题意图),解题思路归纳总结和延伸,常见错误和注意事项。同时,在解题过程中,力求一题多解,扩展考生视野和思路,比较各种解题方法的特点和适用范围,从而提高考生的应试水平。

数学离不开计算,考研也非常重视对计算能力的考查。因此,考生复习时要注意提高运算能力,要提高计算的准确性,不仅要动脑而且要动手,不能华而不实,眼高手

低,丢三拉四,犯“低级”错误。

我们在认真研究历年试题的基础上,该书对考试的重点、难点通过解答题加以分解剖析,对考生常出的错误归纳整理,我们用化整为零各个击破以及基础与综合相结合的方法,用点面结合,抓住基础突出重点的方法,设计出不同解题思想层次的试题整合成书。同学们在使用本书时,最好能先自己动手想与算,不要急于看解答,评注中的一些题外话亦值得细心揣摩。

研究生考试科目从 2003 年调整之后,数学科的权重在原有基础上增加了 50%,因此与往年相比,数学成绩对总分将有更大的影响,数学科的地位愈显重要,同时由于数学科本身的特点,考生的数学成绩历年来相关较大,这说明数学科的考试选拔性质更突出。因此,希望考生们要根据考试大纲认真踏实全面系统地复习,心态要平和,戒浮躁,要循序渐进,不断积累步步提高,面对激烈的竞争,望有志者抓紧抓细抓早。

本书也可供大专院校的学生在学习高等数学、线性代数、概率论与数理统计时的参考。

由于编者水平有限,加之时间比较仓促,书中难免有错误和疏漏之处,恳请读者批评指正。

编 者

2003 年 10 月

目 录

一、最后冲刺模拟试题

- (1) 高等数学 (1)
- (2) 线性代数 (34)
- (3) 概率论与数理统计 (59)

二、模拟试卷与参考解答

- (1) 数学一模拟试卷一 (87)
 参考解答 (91)
- (2) 数学一模拟试卷二 (107)
 参考解答 (111)
- (3) 数学二模拟试卷 (126)
 参考解答 (130)

一、最后冲刺模拟试题

(1) 高等数学

1 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内可导, 且 $f(0)=1, f'(0)=2$. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right]^{\frac{n}{1-f(\frac{1}{n})}}$$

【分析】 直接求数列的极限不易求, 由已知的条件, 可通过求函数的极限得到所求数列的极限.

【解】 考虑极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \sin x \right]^{\frac{1}{x[1-f(x)]}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{\sin x - x}{x} \right]^{\frac{x}{\sin x - x} \cdot \frac{\sin x - x}{x^2 [1-f(x)]}}$$

只需求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2 [1-f(x)]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3}{x^2 [1-f(x)]} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{1-f(x)} = \frac{1}{6f'(0)} = \frac{1}{12}.$$

于是 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \sin x \right]^{\frac{1}{x[1-f(x)]}} = e^{\frac{1}{12}}$. 进而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right]^{\frac{n}{1-f(\frac{1}{n})}} = e^{\frac{1}{12}}.$$

2 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{x(x^2-4)}{\sin \pi x}, & x < 0, \\ \frac{x(x+1)}{x^2-1}, & x \geq 0. \end{cases}$

求 $f(x)$ 的间断点, 并判断其类型.

【分析】 求分段函数的间断点, 首先要判断分段接口点是否间断, 然后再看各段

中的初等函数是否有间断点,例如分母为0的点,但要注意这些点是否在对应的分段中.

【解】 (1) 首先考查分段点 $x=0$ 是否间断

$$\because \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x+1)}{x^2-1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x^2-4)}{\sin \pi x} \xrightarrow{\frac{0}{0}} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x^2-4}{(\cos \pi x)\pi} = \frac{-4}{\pi}$$

$\therefore x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类跳跃间断点.

再看 $f(x)$ 的其他间断点.

$\because x < 0$ 时, $\sin \pi x = 0$, 即 $x = -1, -2, -3, \dots$ 时, $f(x)$ 无定义,

$\therefore x = -1, -2, -3, \dots$ 是 $f(x)$ 的间断点, 记 $k = -1, -2, -3, \dots$.

$$\text{又 } \because \lim_{x \rightarrow k} f(x) = \lim_{x \rightarrow k} \frac{x(x^2-4)}{\sin \pi x} = \begin{cases} \infty, & k(k^2-4) \neq 0 \\ \frac{0}{0}, & k(k^2-4) = 0 \end{cases}$$

$$k(k^2-4) \neq 0 \Rightarrow k \neq 0, k \neq \pm 2$$

$\therefore k \neq -2$, 即 $k = -1, -3, -4, -5, \dots$ 时, $x = k$ 是 $f(x)$ 的第二类无穷型间断点.

$$\text{而 } k = -2, \therefore \lim_{x \rightarrow k} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x(x^2-4)}{\sin \pi x} \xrightarrow{\frac{0}{0}} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2-4}{(\cos \pi x)\pi} = \frac{8}{\pi}$$

$\therefore x = k = -2$ 是 $f(x)$ 的第一类可去间断点.

最后当 $x > 0$ 时, $\because x^2-1=0$, 即 $x=1$ 时, $f(x)$ 无定义, $\therefore x=1$ 是 $f(x)$ 的间断点.

$$\because \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x+1)}{x^2-1} = \infty \text{ 故 } x=1 \text{ 是 } f(x) \text{ 的第二类无穷型间断点.}$$

【评注】 本题考查的内容是:(1) 间断点及其类型的概念;(2) 分段函数的极限;(3) 左、右极限的概念;(4) 洛必达法则. 主要考查内容(1).

3 已知 $f(x) = 3x^2 + ax^{-3} (a > 0)$, 若 $x > 0$ 时, 总有 $f(x) \geq 45$ 成立, 试求 a 的

取值范围.

【分析】 本题实质是求 a 为何值时 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 的最小值大于或等于 45.

【解】 $f'(x) = 6x - 3ax^{-4}$, 由 $f'(x) = 6x - 3ax^{-4} = 0$, 得 $x = \left[\frac{a}{2}\right]^{\frac{1}{5}} > 0$ (因为 $a > 0$). 又

$f''(x) = 6 + 12ax^{-5}$, 有 $f''\left(\left[\frac{a}{2}\right]^{\frac{1}{5}}\right) = 6 + 12a\left[\frac{a}{2}\right]^{-1} = 30 > 0$, 所以 $x = \left[\frac{a}{2}\right]^{\frac{1}{5}} > 0$.

是 $f(x) = 3x^2 + ax^{-3} (a > 0)$, 在 $(0, +\infty)$ 上的唯一极值点, 故

$$f\left(\left[\frac{a}{2}\right]^{\frac{1}{5}}\right) = 3\left[\frac{a}{2}\right]^{\frac{2}{5}} + a\left[\frac{a}{2}\right]^{-\frac{3}{5}} = \frac{5}{\sqrt[5]{4}} \sqrt[5]{a^2}$$

是 $f(x) = 3x^2 + ax^{-3} (a > 0)$, 在 $(0, +\infty)$ 内的最小值.

$$\text{令 } \frac{5}{\sqrt[5]{4}} \sqrt[5]{a^2} \geq 45, \text{ 得 } a \geq 486.$$

故当 $a \geq 486$ 时有 $f(x) \geq 45 (x > 0)$.

4 设 $f_n(x) = C_n^1 \cos x - C_n^2 \cos^2 x + \cdots + (-1)^{n-1} C_n^n \cos^n x$, 求证: (1) 对于任何自然数 n , 方程 $f_n(x) = \frac{1}{2}$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 中有唯一实根.

(2) 设 $x_n \in (0, \frac{\pi}{2})$ 满足 $f_n(x_n) = \frac{1}{2}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\pi}{2}$.

【分析】 (1) 应先把 $f_n(x)$ 变形后, 再应用连续函数的介值定理. (2) 由 (1) 得出函数 $f_n(x)$ 的性质后再考虑.

【证明】 (1) 因为 $f_n(x) = C_n^1 \cos x - C_n^2 \cos^2 x + \cdots + (-1)^{n-1} C_n^n \cos^n x = 1 - (1 - \cos x)^n$, 且 $f_n(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上连续, 又 $f_n(0) = 1, f_n(\frac{\pi}{2}) = 0$, 故由连续函数介值定理知: 存在 $x_n \in (0, \frac{\pi}{2})$, 使得 $f_n(x_n) = \frac{1}{2}$, 又因为 $f'_n(x) = -n(1 - \cos x)^{n-1} \sin x < 0, (0 < x < \frac{\pi}{2})$, 所以 $f_n(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内严格单调递减. 因此, 方程 $f_n(x) = \frac{1}{2}$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 中有唯一实根.

(2) 因为 $f_n(\arccos \frac{1}{n}) = 1 - (1 - \frac{1}{n})^n$, 两边取极限有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(\arccos \frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{e} > \frac{1}{2}$, 说明存在正整数 N , $\forall n > N$, 有 $f_n(\arccos \frac{1}{n}) > \frac{1}{2} = f_n(x_n)$, 又因为 $f_n(x)$ 严格单调递减, $(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$. 所以得到 $\arccos \frac{1}{n} < x_n < \frac{\pi}{2}$, 故由夹逼法则, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\pi}{2}$.

5 设函数 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 内有二阶导数, 且 $f(a+1) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0$. 求证: 在 $(a, +\infty)$ 内至少存在一点 ξ , 使 $f'(\xi) = 0$.

【分析】 寻找条件使 $f'(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 的某个子区间上满足罗尔定理.

【证明】 由已知 $f(a+1) = 0$, 若 $(a+1, +\infty) \subset (a, +\infty)$ 内, $f(x) \equiv 0$, 则 $f'(x) = 0, \forall x \in (a+1, +\infty)$ 都可取作 ξ , 使 $f'(\xi) = 0$, 结论自然成立.

若在 $(a+1, +\infty) \subset (a, +\infty)$ 内, $f(x) \not\equiv 0$, 则至少存在 $x_1 \in (a+1, +\infty)$, 使 $f(x_1) \neq 0$.

不妨设 $f(x_1) > 0$.

由于 $f(a+1) = 0$, 所以存在 x_2 , 满足 $a+1 < x_2 < x_1$ 时, $f(x_2) < f(x_1)$.

又因为 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0$, 所以存在 x_3 , 当 $x_1 < x_3 < +\infty$ 时, $f(x_3) < f(x_1)$.

由拉格朗日中值定理: 存在 $\xi_1 \in (x_2, x_1)$, 使

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0.$$

又存在 $\xi_2 \in (x_1, x_3)$, 使

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} < 0.$$

由于 $f(x)$ 二阶可导, 所以 $f'(x)$ 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 连续, 故存在 $\xi_3 \in (\xi_1, \xi_2)$ 使 $f'(\xi_3) = 0$.

补充定义 $f(a) = 0$, 又知 $f(a+1) = 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[a, a+1]$ 上满足罗尔定理. 于是存在 $\xi_4 \in (a, a+1)$, 使 $f'(\xi_4) = 0$.

由 $f'(x)$ 在区间 $[\xi_4, \xi_3]$ 上满足罗尔定理, 故存在 $\xi \in (\xi_4, \xi_3) \subset (a, +\infty)$, 使 $f'(\xi) = 0$.

【评注】 本题证明过程中应用了连续函数的介值定理,二次拉格朗日中值定理和二次罗尔定理,是一道综合的证明题.但是证明思路清楚,就是创造条件使 $f'(x)$ 在某个区间上满足罗尔定理.

证明的难点是如何由 $f(a+1) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 寻找本题的 $\xi_3 \in (a+1, +\infty)$, 使 $f'(\xi_3) = 0$.

建议考生见到这类问题,画出函数 $f(x)$ 的图形草图,这样便于启发思路寻找所要证明的点 ξ .

6 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a, +\infty)$ 内可导(其中 $a > 0$ 常数),且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [2f(x) + f'(x)] = 1$.

求证:(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} f(x) = +\infty$.

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

【分析】 由 $(e^{2x} f(x))' = e^{2x} [2f(x) + f'(x)]$, 可得到 $e^{2x} f(x)$ 与 $2f(x) + f'(x)$ 的关系.

【证明】 : (1) 因为 $(e^{2x} f(x))' = e^{2x} [2f(x) + f'(x)]$, 由已知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + f'(x)] = 1$, 可得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [e^{2x} f(x)] = +\infty$.

记 $g(x) = e^{2x} f(x)$. 由极限性质知: 存在 $x_0 > a$, 当 $x > x_0$ 时, $g'(x) > 1$. 从而当 $x > x_0$ 时, 由拉格朗日中值定理得: 存在 $\xi \in (x_0, x)$ 使得

$$g(x) - g(x_0) = g'(\xi)(x - x_0) > x - x_0. \text{ 进而得}$$

$$g(x) > g(x_0) + x - x_0.$$

两端取极限得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty, \text{ 即 } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} f(x) = +\infty.$$

(2) 由题设, 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 则其

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [2f(x) + f'(x)] - 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 - 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x). \text{ 从而}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}, \text{ 只需证明 } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}. \text{ 因为}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g'(x)}{2e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2f(x) + f'(x)}{2} = \frac{1}{2}.$$

所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

7 设 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 又对任意的 $x, y \in (-\infty, +\infty)$ 有 $f(x+y) = f(x)e^y + f(y)e^x$.

(1) 证明: 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续;

(2) 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导;

(3) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导, 求 $f(x)$ 的表达式.

【证明】 (1). 因为 $f(x+y) = f(x)e^y + f(y)e^x$.

令 $x=y=0$ 有 $f(0+0) = f(0)e^0 + f(0)e^0 = 2f(0)$, 所以 $f(0) = 0$.

若 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续, 则 $\forall x_0 \in (-\infty, +\infty)$ 有

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0)e^{\Delta x} + f(\Delta x)e^{x_0}] \\ &= f(x_0)e^0 + f(0)e^{x_0} = f(x_0). \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 在 x_0 连续, 由 x_0 的任意性, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续.

(2) 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导, 则 $\forall x_0 \in (-\infty, +\infty)$ 有

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0)e^{\Delta x} + f(\Delta x)e^{x_0} - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= f(x_0) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} e^{x_0} \\ &= f(x_0) + f'(0)e^{x_0}. \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 在 x_0 可导, 且 $f'(x_0) = f(x_0) + f'(0)e^{x_0}$.

(3) 由 (2) $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, $f'(x) = f(x) + f'(0)e^x$, 记 $a = f'(0)$, 则有方程:

$$y' - y = ae^x. \text{ 求解得 } y = cx + axe^x.$$

由 $y(0) = 0$. 得 $c = 0$. 所以 $f(x) = axe^x$. 其中 $a = f'(0)$.

8 设 $f(x)$ 为非负连续函数且 $f(x) \int_0^x f(x-t) dt = \sin^4 x$, 求 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的

平均值.

【分析】 这是一个积分方程,要算导数 $(\int_0^x f(x-t)dt)_x$. 含参数的定积分(设积分变量为 t ,参数为 x)对参数求导,需要掌握的内容有:(1)当被积函数不含有参数 x 时,只需利用变上限求导法和复合这函数求导法;(2)当被积函数含有参数 x 时,有两种方法可供选择;①利用换元将参数 x 换到积分限上去,具体到本题就是令 $x-t=u$,则 $\int_0^x f(x-t)dt = \int_0^x f(u)du$. ②利用定积分的线性性将 x 提到积分号外再求导,例如

$$\int_0^x (u+x)f(u)du = \int_0^x uf(u)du + x\int_0^x f(u)du.$$

此外要注意积分方程一般自带初始条件.

【解】 令 $x-t=u$,则 $\int_0^x f(x-t)dt = \int_0^x f(u)du$.

原式变为 $f(x)\int_0^x f(u)du = \sin^4 x$. 因为 $(\int_0^x f(u)du)' = f(x)$,所以

$$(\int_0^x f(u)du)' \int_0^x f(u)du = \sin^4 x, \quad \frac{1}{2}[(\int_0^x f(u)du)^2]' = \sin^4 x,$$

$$(\int_0^x f(u)du)^2 = 2 \int \sin^4 x dx = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{16} \sin 4x + c.$$

当 $x=0$ 时,左边为0,则 $c=0$. 故有

$$(\int_0^x f(u)du)^2 = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{16} \sin 4x. \text{ 当 } x = \frac{\pi}{2} \text{ 时,得}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \sqrt{\frac{3}{8}\pi}.$$

所以 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的平均值为

$$\overline{f(x)} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx}{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2\pi}}.$$

另一法:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \left[\int_0^x f(u)du \right] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx, \text{ 所以}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^x f(u) du \right] d \int_0^x f(u) du = \frac{3\pi}{16}$$

$$\frac{1}{2} \left[\int_0^x f(u) du \right]^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{16}, \quad \text{所以} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \sqrt{\frac{3\pi}{8}}.$$

$$\text{所以 } \overline{f(x)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \Big/ \frac{\pi}{2} = \sqrt{\frac{3}{2\pi}}.$$

【评注】 本题考查的内容是:(1) 是定积分的换元法;(2) 变上限函数与被积函数的关系;(3) 化积分方程为微分方程;(4) 变量可分离方程;(5) 三角函数有理式的积分;(6) 函数的平均值. 主要考查(1)与(2).

9 设 $f(x)$ 连续, $\psi(x) = \int_0^1 f(xt) dt$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$ (A 为常数), 求 $\psi'(x)$, 并讨论 $\psi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

【分析】 求解此题的思路中的几个关键点:(1) 为求 $\psi'(x) = \left(\int_0^1 f(xt) dx \right)'_x$ 想到用换元 $u = xt$ 把 x 换到积分限上后再求导;(2) 讨论 $\psi'(x)$ 在 $x=0$ 的连续性, 要计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \psi'(x)$ 和 $\psi'(0)$, 并看它们是否相等.(3) 计算 $f(0)$ 时, 要想到利用 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$ 和 f 连续.

【解】 因为 $\psi'(x) = \left(\int_0^1 f(xt) dt \right)'_x$, 所以令 $u = xt$, 得

$$\psi(x) = \int_0^1 f(xt) dt = \frac{\int_0^x f(u) du}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\psi'(x) = \frac{xf(x) - \int_0^x f(u) du}{x^2} \quad (x \neq 0)$$

$$\psi'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{x^2}$$

一、最后冲刺模拟试题

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{fx}{2x} = \frac{A}{2}$$

其中 $\psi(0) = \int_0^1 f(0)dt = f(0) = 0$, 是因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$, $f(x)$ 连续.

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \cdot x = A \cdot 0 = 0$$

又因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \psi'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - \int_0^x f(u)du}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u)du}{x^2} \\ &= A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} = \psi'(0) \end{aligned}$$

所以 $\psi'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

10 设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $f(0) = 1$, 且满足等式 $f'(x) + f(x) -$

$$\frac{1}{x+1} \int_0^x f(t)dt = 0.$$

(1) 求 $f'(x)$

(2) 证明: 当 $x \geq 0$ 时, $e^{-x} \leq f(x) \leq 1$.

【分析】 先求 $f'(x)$ 是解微分方程问题, 求出 $f'(x)$ 后再求出 $f(x)$, 之后估计不等式.

【解】 (1) 由 $f'(x) + f(x) - \frac{1}{x+1} \int_0^x f(t)dt = 0$ 得

$$[f'(x) + f(x)](x+1) - \int_0^x f(t)dt = 0$$

上式两边同时对 x 求导得:

$[f'(x) + f'(x)](x+1) + f'(x) = 0$, 令 $p(x) = f'(x)$, 则 $(p' + p)(x+1) + p = 0$, 化简得:

$$\frac{p'}{p} = \frac{-(x+2)}{x+1}, \text{ 两边积分有 } p = \frac{c_1 e^{-x}}{x+1}.$$