概率论与数理统计

朱　章　夏恩德　主编

华中科技大学出版社
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS
E-mail: hustpp@wuhan.cngb.com

概率论与数理统计

朱 章 夏恩德 主 编
余 敏 陈金和 副主编

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/朱　章　夏恩德　主编
武汉:华中科技大学出版社,2004 年 9 月
ISBN 7-5609-3256-8

Ⅰ. 概…
Ⅱ. ①朱…　②夏…
Ⅲ. 概率论-高等学校-教材;数理统计-高等学校-教材
Ⅳ. O21

概率论与数理统计　　朱　章　夏恩德　主编

策划编辑:曾　光　　封面设计:潘　群
责任编辑:吴锐涛　　责任监印:张正林
责任校对:刘　竣

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87557437

录　排:华大图文工作室
印　刷:荆州市今印印务有限公司

开本:850×1168　1/32　印张:6.75　字数:159 000
版次:2004 年 9 月第 1 版　印次:2004 年 9 月第 1 次印刷　定价:11.00 元
ISBN 7-5609-3256-8/O・333

内容简介

全书内容由两大部分组成，共分八章，前五章是概率论部分，内容包括随机事件与概率，随机变量及其分布，多维随机变量及其分布，随机变量的数字特征，大数定律与中心极限定理.后三章是数理统计部分，内容包括数理统计的基本概念，参数估计与假设检验.

本书适合作为高等院校工科、理科（非数学专业）各专业教材，也可供自学者选用.

前　言

概率论与数理统计是研究现实世界中随机现象统计规律性的学科，是一门应用性较强的数学基础课.在社会、经济和科学技术中广泛存在着随机现象，需要用概率统计方法去分析和处理各种带随机干扰的数据，直至作出科学的决策.随着计算机技术的飞速发展，概率统计的应用领域不断拓展，研究内容也日益更新.因此，对原有的课程体系和教学内容进行改革，剔除陈旧的内容，吸收先进的成果，编写一本既能加强基础知识与提高应用能力，又能重视传统知识与计算机技术相结合，同时贴近学生接受能力，紧扣这门课程教学大纲的具有时代特色的概率统计教材，是工科数学教学改革的要求，也是我们追求的目标.

基于我们的目标，本书在编写中遵循了如下原则：内容详略得当，叙述简明易懂，重点难点处理适度，例题习题选取兼顾基础与提高、理论与应用.

本书共八章，依据高等院校工科数学课程指导委员会审订的《概率论与数理统计教学基本要求》定为48课时，其分配如下：第1章8学时，第2章8学时，第3章7学时，第4章6学时，第5章3学时，第6章4学时，第7章6学时，第8章6学时.

本书由朱章、夏恩德任主编，余敏、陈金和任副主编.各章编写分工如下：第1章 舒和智，第2章 余敏，第3章 程良炎，第4章 朱章，第5章 张晓燕，第6章 李慧，第7章 陈金和，第8章 卢旭升，全书由夏恩德和朱章统稿.

在本书编写过程中得到黄石理工学院教务处、公共课部的大力支持和协助，在此一并表示感谢.

限于编者水平，书中不当之处，欢迎批评指正.

编　　者

2004年6月8日

目　　录

第1章　随机事件与概率

在日常生活以及科学研究活动中，人们常会遇到两类现象，一类是在一定条件下必然发生（或必然不发生）的现象，例如，向上抛一物体必然下落，同性电荷必不相互吸引，等等. 这类现象称为确定性现象. 另一类现象，是在一定条件下其结果呈现出不确定性，例如，任意抛一枚硬币，其结果可能是“币值”面朝上，也可能是“徽花”面朝上；又如，某工厂在同一种工艺条件下生产的产品的寿命，等等. 这种在一定条件下，具有多种可能的试验结果，但事先无法确定会出现什么结果的现象称为**随机现象**. 概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的一门数学学科.

随着科学技术的进步与发展，概率论与数理统计的理论和方法的应用是越来越广泛，几乎遍及所有科学技术、工农业生产和国民经济的各个领域.

1.1　随机事件及其运算

1.1.1　随机事件的概念

为了揭示随机现象的规律性，就要对随机现象进行观察、试验. 为了叙述的方便，我们把对随机现象进行的观察或试验，都称为试验.

如果一个试验具有下列特点：

(1) 在相同的条件下可以重复地进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，试验的所有可能结果事先可以确定；

(3) 在进行每次试验之前，不能确定其中哪一种结果会出现.

则称这种试验为**随机试验**，简称**试验**.

例1 掷一枚骰子，观察出现的点数.

例2 从装有10只红球，10只白球的盒子中任意摸出5只球，记录其中的白球数.

例3 观察灯泡厂生产出的一批灯泡的使用寿命.

例4 多次用指定的测量工具测量某物体的长度，由于种种因素的干扰，各次测量得到的数值不一定相同，它们应该是在某值l附近的一个实数值.

上述四个试验都是随机试验. 今后我们通过随机试验对随机现象进行研究.

在随机试验中，可能发生也可能不发生（而在大量试验中具有某种规律性）的结果称为**随机事件**，简称**事件**. 随机事件通常用大写字母A,B,C等表示.

在随机事件中，有些是试验中可能直接发生的结果. 如，例1中，出现的点数"1点"，"2点"，…，"6点"；例2中，取出的白球数i $(i=0,1,2,3,4,5)$；例3中，灯泡的使用寿命$\mu(\mu\geqslant 0)$；例4中，测量值$x(l-\alpha<x<l+\alpha)$都是随机事件. 这一类最简单的事件在每次试验中，有且仅有一个会发生，称之为**基本事件**.

另一类随机事件是用来描述试验中所关心的某些可能发生的结果，它们可以看做是由某些基本事件组合而成的，可称之为**复合事件**. 如，例1中，出现"偶数点"，记为A，它也是随机事件，但它不是基本事件，它是由"2点"，"4点"，"6点"这三个基本事件组成的，可记为$A=\{2点,4点,6点\}$. 只要上面三个基本事件中的一个出现，复合事件"偶数点"就出现. 显然，基本事件是不能分解为其他事件组合的. 又如，灯泡的使用寿命在1000小时以上也是复合事件，等等.

在每次试验中必然发生的事件称为**必然事件**，记做Ω. 必然不发生的事件称为**不可能事件**，记做$\varnothing$. 应该指出，必然事件和不可

能事件都具有确定性,但是为了今后研究的方便,我们将这两种事件看做特殊的随机事件.

1.1.2 样本空间

随机试验中所有可能发生的基本结果的全体,也就是基本事件的全体称为试验的**样本空间**,记做Ω.样本空间的每一个元素,即试验的每一个可能发生的基本结果,称为**样本点**.为了表达的方便,可以用适当的记号或数字来表示样本点,用样本点的集合来表示样本空间.例如,

例1中,用e_i表示"出现i点",则

$$\Omega=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}.$$

例2中,记白球的个数为i ($i=0,1,2,3,4,5$),则$\Omega=\{0,1,2,3,4,5\}$.

例3中,用t表示灯泡的寿命,则

$$\Omega=\{t\geqslant 0|t\text{ 的取值单位为小时}\}.$$

例4中,某物体长度的理论值为l,测量值为x,则

$$\Omega=\{x|l-\alpha<x<l+\alpha,\alpha\text{ 为很小的实数}\}.$$

由于样本空间Ω包含试验的所有可能发生的基本结果,而每次试验总有其中一个结果会发生,所以Ω为必然事件.

样本空间是概率论中一个重要概念,它把事件与集合联系起来,用集合来表达和分析事件.例如,前面描述的复合事件是由某些基本事件组合的,所以,复合事件可看做样本空间Ω的子集,而基本事件是Ω的单点子集,不可能事件$\varnothing$看做空集.设A为样本空间Ω的任一个子集,当A中所含基本事件之一发生,则事件A就发生.

1.1.3 事件间的关系及其运算

在实际问题中,往往要同时研究几个随机事件及它们之间的关系.例如,在检查某些圆柱形产品时,要求它的长度和直径都符

合规格才算合格，那么，“产品合格”与“长度合格”及“直径合格”等事件之间是有联系的，因此，有必要讨论事件之间的关系及运算.

(1) 如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B **包含**事件 A，或称事件 A 是事件 B 的**子事件**，记做 $A\subset B$(或 $B\supset A$).

例如，{长度不合格}$\subset${产品不合格}.

如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B **相等**，记做 $A=B$.

对任一事件 A，规定 $\varnothing\subset A$，而 $A\subset\Omega$.

(2) 事件 A 与事件 B 中至少有一个发生所构成的事件，称为事件 A 与 B 的**和事件**，记做 $A\cup B$. 例如，

{产品不合格}={直径不合格}$\cup${长度不合格}.

类似可规定有限个事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的和，并记做 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，简记为 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$. 可数多个事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n\cdots)$ 的和，记做

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_i\cup\cdots，简记为\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i.$$

(3) 事件 A 与事件 B 同时发生所构成的事件称为事件 A 与 B 的**积事件**，记做 $A\cap B$，或简记做 AB. 例如，

{产品合格}={直径合格}$\cap${长度合格}.

类似可规定有限个事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的积，并记做 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$，简记为 $\bigcap_{i=1}^{n}A_i$. 可数个事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n\cdots)$ 的积，记做

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_i\cap\cdots，简记为\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i.$$

(4) 如果事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与 B **互斥**(或**互不相容**)，例如，“直径不合格”与“产品合格”互斥.

对于互斥事件 A 与 B，可以把 $A\cup B$ 记做 $A+B$. 如果一组事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意两个都互斥，则称这组事件**两两互斥**，这时，$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，记做 $A_1+A_2+\cdots+A_n$.

样本空间中基本事件是两两互斥的.

(5) 如果事件A与事件B满足$A\cup B=\Omega$且$AB=\varnothing$，则称事件A与B **互逆**(或**对立**)，记做$A=\overline{B}$，或$B=\overline{A}$. 例如，

"直径合格"与"直径不合格"是互逆事件.

注意 互斥事件与互逆事件之间的相互关系是互逆一定互斥，但反之不然.

(6) 由事件A发生，而事件B不发生所构成的事件，称为事件A与事件B的**差事件**，记做$A-B$. 例如，

{直径合格但长度不合格}={直径合格}-{长度合格}. 显然，$A-B=A\overline{B}$，$\overline{A}=\Omega-A$.

为了直观，我们用平面上的一个矩形表示样本空间，矩形内的点表示基本事件，则事件间的关系及运算就可用类似于集合的直观图形表示，如图 1-1 所示，图中两个小圆形分别表示事件A与事件B.

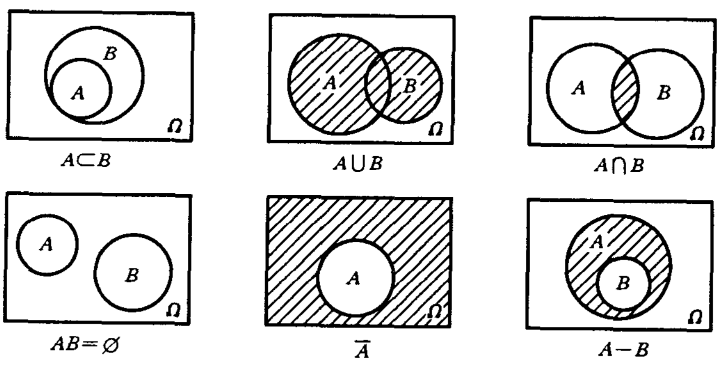

图 1-1

由于随机事件是样本空间Ω的子集，不可能事件用空集表示，而必然事件可以用样本空间Ω(作为它自身的子集)来表示. 那么，把随机事件之间的关系及运算与集合之间的关系及运算比较，可以看到两者的关系及运算是一致的. 所以关于集合的一些术语、记号，也可以描述事件之间的关系及运算. 从而，集合之间的运算性

质，对随机事件的运算都成立，列举以下几条性质.

(1) 传递关系：若 $A\subset B$，$B\subset C$，则 $A\subset C$.

(2) 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$.

(3) 结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

(4) 分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

(5) 对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$；$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

注意 对偶律可推广到任意有限多个及可数个事件.

例5 从一批产品中每次取出一个产品进行检验（每次取出的产品不放回），设事件 $A_i(i=1,2,3)$ 表示第 i 次取到合格品. 试用 A_1,A_2,A_3 表示下列事件：

(1) 三次都取到了合格品.

(2) 三次中至少有一次取到了合格品.

(3) 三次中恰有两次取到了合格品.

(4) 三次中最多有一次取到了合格品.

(5) 三次中不多于两次取到了合格品.

解 (1) "三次都取到了合格品"意味着事件 A_1,A_2,A_3 都发生，所以这事件可以表示为：$A_1A_2A_3$.

(2) "三次中至少有一次取到了合格品"就是事件 A_1,A_2,A_3 中至少有一个发生，所以事件可以表示为：$A_1\cup A_2\cup A_3$，也可以表示为：

$$A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3+A_1A_2\overline{A}_3$$
$$+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3+A_1A_2A_3.$$

(3) "三次中恰有两次取到了合格品"就是三个事件 A_1,A_2,A_3 中有其中两个事件发生，另一个事件不发生，所以这事件可以表示为：$A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3$.

(4) "三次中最多有一次取到了合格品"就是三个事件 A_1,A_2，A_3 中，有其中一个事件发生，而另两个事件不发生，或三个事件都

不发生，所以这事件可以表示为：$A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$，也可以表示为：$\overline{A_1A_2\cup A_2A_3\cup A_1A_3}$.

(5)"三次中不多于两次取到了合格品"就是三个事件A_1，A_2，A_3都发生的逆事件，所以这事件可以表示为：$\overline{A_1A_2A_3}$，也可以表示为：$A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3+A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3+\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$.

1.2 随机事件的概率

随机事件虽然在一次试验中可能发生，也可能不发生，这表现了随机事件偶然性的一面，但在大量重复地试验中，人们还是可以发现它的内在规律性，即随机事件发生的可能性大小是可以"度量"的. 随机事件的**概率**就是度量随机事件发生的可能性大小的一个数字.

概率论中一个最基本的问题，就是给随机事件的概率一个科学的"度量".

本节将以概率论的历史发展过程为背景，给出概率的古典定义、统计定义和公理化定义.

1.2.1 概率的古典定义

具有以下特征的一类简单的随机试验模型，称为**古典概型**(概型是概率模型的简称).

(1) 试验的样本空间中只有有限个基本事件；

(2) 试验中每个基本事件发生的可能性相同.

古典概型也叫**等可能概型**. 在概率论的产生和发展过程中，它是最早且最常用的一种概率模型.

定义1 在古典概型情形下，设样本空间Ω包含有n个基本事件，随机事件A包含有r个基本事件，则称比值$\frac{r}{n}$为随机事件A的

概率，记做$P(A)$，即

$$P(A)=\frac{r}{n}=\frac{A\text{所包含的基本事件数}}{\Omega\text{中的基本事件总数}}. \tag{1-1}$$

式(1-1)就是事件A的概率的计算公式，即概率的古典定义，由等可能性的条件，容易理解上述定义确实客观地反映了随机事件A发生的可能性大小.

式(1-1)告诉我们，计算事件的概率关键在于计算基本事件总数和事件A中所包含的基本事件数，这时，一般来说可以利用排列与组合的相关知识来分析和计算.

例6 号码锁上有六个拨盘，每个拨盘上有0～9共10个数字，这六个拨盘上的数字组成一个六位数的密码，如果不知道锁的密码，问一次就能把锁打开的概率是多少？

解 每一次拨号码锁得到的一组六位数字可看做一个基本事件，其总数为10^6，而每一基本事件的发生是等可能的，设A表示"一次能把锁打开"的事件，则A中只含一个基本事件，即原设定的密码，故

$$P(A)=\frac{1}{10^6}=0.000001.$$

这说明一次能把锁打开的可能性只有百万分之一. 所以在不知密码的情况下，一次就能把锁打开几乎是不可能的.

例7 将n只球随机地放入$N(N\geqslant n)$个盒子中去，试求每个盒子至多有一只球的概率？

解 将n只球随机地放入到N个盒子中去，每一种放法看做是一个基本事件，且具有等可能性. 基本事件的总数为$\overbrace{N\cdot N\cdot\cdots\cdot N}^{n\text{个}}=N^n$. 设事件$A$表示"每个盒子至多有一只球"，则$A$中包含的基本事件数为$N\cdot(N-1)\cdot\cdots\cdot(N-n+1)$.

故所求的概率为

$$P(A)=\frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{N^n}.$$

有许多问题和本例具有相同的数学模型. 如果把球和盒子作不同的解释,就有不同的实际意义. 例如,取 $N=365$,“球”解释为“人”,“盒子”解释为“某日”,则上述概率就是 n 个人中没有两人生日相同的概率.

在古典概率的计算中,一定要注意应用公式的条件,否则很容易出错,请看下例.

例8 掷两枚骰子,设事件 A 表示“出现的点数之和等于3”,求事件 A 的概率.

解法1 掷两枚骰子出现的点数之和的可能数值为{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12},共 11 个,而事件 A 出现的结果只能是点数之和为 3,

故
$$P(A)=\frac{1}{11}.$$

解法 2 两枚骰子看做有编号,试验中可能出现的结果有:

$$\begin{array}{cccc}
(1,1), & (1,2), & \cdots, & (1,6), \\
(2,1), & (2,2), & \cdots, & (2,6), \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
(6,1), & (6,2), & \cdots, & (6,6).
\end{array}$$

可知基本事件的总数为 $6\times 6=36$ 个,而事件 A 只包含两个结果:(1,2),(2,1).

故
$$P(A)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}.$$

分析 上面两种解法中,解法 1 显然错误,原因在于使用公式 $P(A)=\frac{r}{n}$ 时,没有注意试验结果的等可能性. 例如,解法 1 中,“点数之和为2”,只含一个结果(1,1),而“点数之和为3”则包含两个结果,即(1,2),(2,1). 所以,解法 1 中,点数之和的 11 个可能结果并不是等可能的.

由古典概率的定义,可以得到如下性质:

(1) 对于任意事件 A,有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;