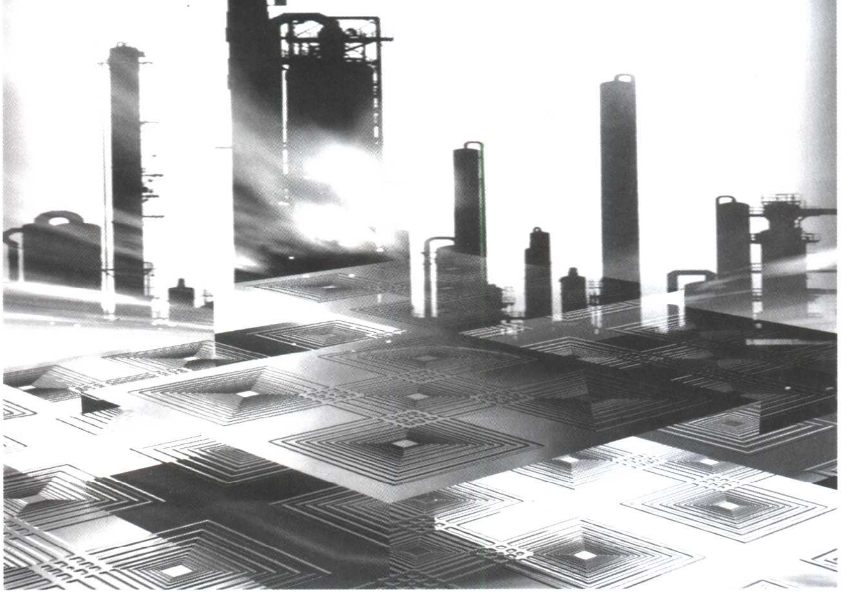
高 静 主编

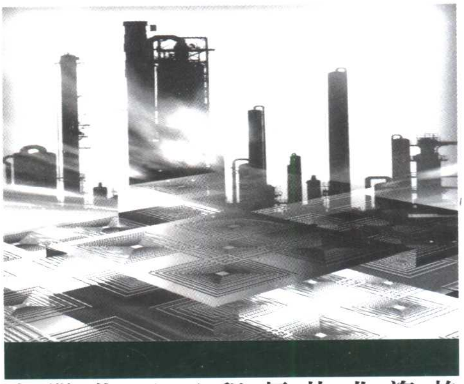
注册化工工程师执业资格考试辅导用书

上 册



Chemical Industry Press

化学工业出版社



注册化工工程师执业资格
考试辅导用书

ISBN 7-5025-5481-5

9 787502 554811 >

ISBN 7-5025-5481-5/TQ · 1976 定价：68.00元

销售分类建议：化工
经济与管理

注册化工工程师执业资格考试辅导用书

上册

高　静　主编

化学工业出版社

·北京·

(京)新登字 039 号

图书在版编目(CIP)数据

注册化工工程师执业资格考试辅导用书. 上册/高静主编.
北京：化学工业出版社，2004. 4
ISBN 7-5025-5481-5

Ⅰ. 注… Ⅱ. 高… Ⅲ. 化学工程-工程师-资格考核-自学参考资料 Ⅳ. TQ02

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 042658 号

注册化工工程师执业资格考试辅导用书

上册

高 静 主编

责任编辑：陈 丽 刘俊之 刘兴春 徐 娟

责任校对：陶燕华

封面设计：蒋艳君

*

化学工业出版社出版发行

（北京市朝阳区惠新里 3 号 邮政编码 100029）

发行电话：(010)64982530

http.//www cip. com. cn

*

新华书店北京发行所经销

北京市昌平振南印刷厂印刷

三河市前程装订厂装订

开本 787mm×1092mm 1/16 印张 32 字数 886 千字

2004 年 6 月第 1 版 2004 年 6 月北京第 1 次印刷

ISBN 7-5025-5481-5/TQ・1976

定 价：68.00 元

前　　言

为适应我国市场经济的发展和加入世贸组织的需求，根据人事部、建设部关于“勘察设计注册工程师制度总体框架及实施规划”[2001] 05号文件的要求，在全国勘察设计化工工程行业建立注册化工工程师职业资格注册制度，化工工程行业涵盖化工、石化、化纤、医药和轻化。根据人事部、建设部 [2003] 36号文件，对长期从事化工工程设计的专业技术人员，符合“考核认定”条件，经测试合格后，即可取得“中华人民共和国注册化工工程师执业资格证书”。

为了帮助广大专业技术人员准备“注册化工工程师执业资格”的考试，受化学工业出版社的委托，特组织编写本套复习指导书，以方便参考人员系统地做好考前复习准备工作，提高应试的能力。

本书完全是按照“注册化工工程师考试大纲”编写的，同时又具有以下特点：

(1) 本书是一本较系统、较全面的复习资料，包括基础课、专业基础课、专业课三大部分，共涉及21门课程，包含了考试大纲要求的全部课程；

(2) 每部分包括基本知识、例题、习题，并配有习题答案；

(3) 为帮助考生检验复习的程度，书中给出了三套模拟试题及标准答案；

(4) 每部分的习题和模拟试题的题型完全是按照正式考试的题型编写。

全书由高静主编，具体分工为：高等数学由金少华编写，普通物理由刘金伟、王俊平编写，普通化学由杨春、苣晓燕编写，理论力学由郭全梅编写，材料力学由邢素芳编写，流体力学由张少峰编写，计算机应用基础由柴欣编写，电工与电子技术由李华、毛一之编写，工程经济由陈立文、陈敬武编写，物理化学由张西惠编写，化工原理由刘继东编写，化工过程控制由刘鸿雁编写，化工设计基础由王淑芳编写，化工污染控制基础由黄志红编写，化工热力学由高静编写，物料及能量平衡由王桂荣编写，化学反应动力学由王桂云编写，化工工艺设计和化工工艺系统设计由崔洪武、钨长城编写，工程经济分析和化工工程项目管理由陈敬武、陈立文编写。

由于本书编写时间较短，加之水平有限、经验不足，书中难免有不妥之处，恳请广大读者批评指导。

编者

2004年4月

目　　录

1 高等数学

1.1 空间解析几何

1.1.1 向量代数

1.1.1.1 向量的定义

向量是既有大小又有方向的量。

(1) 向量的几何表示　有向线段（与起点无关，称为自由向量）。

(2) 向量的坐标表示　$\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，其中 a_x、a_y、a_z 分别为向量$\vec{a}$在三个坐标轴上的投影。以 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为起点，$M(x,y,z)$ 为终点的向量$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$。

(3) 向量的分解表示　$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$，其中$\vec{i}=(1,0,0)$，$\vec{j}=(0,1,0)$，$\vec{k}=(0,0,1)$。

1.1.1.2 向量的模与方向余弦

设$\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，则该向量的模 $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$，方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|},\quad \cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|},\quad \cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

式中，α、β、γ 分别为$\vec{a}$与 x 轴、y 轴、z 轴正向的夹角（称为$\vec{a}$的方向角），且

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

1.1.1.3 向量的加法与数乘运算

向量的加法有平行四边形法则和三角形法则。

(1) 运算的代数表示　设$\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z)$$

$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$$

(2) 线性运算律

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}\qquad(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}\qquad\lambda(u\vec{a})=(\lambda u)\vec{a}$$

(3) 基本定理　设$\vec{a}$为非零向量，则

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\Longleftrightarrow\exists\lambda\in R,\text{使得}\vec{b}=\lambda\vec{a}$$

或　设$\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)\neq\vec{0}$，$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\Longleftrightarrow\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}$$

利用数乘，任何向量$\vec{a}$可表示为$\vec{a}=|\vec{a}|\vec{e_a}$，其中$\vec{e_a}$表示与$\vec{a}$同方向的单位向量。

1.1.1.4 数量积（点积，内积）

(1) 定义 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

(2) 性质 $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2 \quad \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c},(\lambda\vec{a})\cdot(\mu\vec{b})=(\lambda\mu)(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

(3) 夹角 $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Longleftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \text{ 或 } a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$$

$\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影 $Prj_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$

1.1.1.5 向量积

(1) 定义 $\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})\cdot\vec{e_c}$，其中$\vec{e_c}$是同时垂直于$\vec{a}$、$\vec{b}$的单位向量，并且$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{e_c}$符合右手法则。

(2) 坐标表达式 设$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$，$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$，则

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

(3) 性质 $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0} \quad \vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c} \qquad (\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}_x(\lambda\vec{b})$$

(4) 几何意义 $|\vec{a}\times\vec{b}|$等于以$\vec{a}$、$\vec{b}$为边的平行四边形面积。

1.1.1.6 混合积

(1) 定义 $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$

(2) 坐标表达式 设$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$，$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$，$\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$，则

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$$

(3) 性质

① $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=[\vec{b}\vec{c}\vec{a}]=[\vec{c}\vec{a}\vec{b}]$

② $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$共面$\Longleftrightarrow[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=0$或存在一组不全为零的数$\lambda$、$\mu$、$\omega$，使得$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\omega\vec{c}=\vec{0}$。

(4) 几何意义 $|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$等于以$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$为棱的平行六面体的体积。

1.1.2 平面

(1) 点法式方程 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$，平面的法向量$\vec{n}=(A,B,C)$。

(2) 一般方程　$Ax+By+Cz+D=0$，平面的法向量$\vec{n}=(A,B,C)$。

(3) 两平面间的关系　设Π_1：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$，Π_2：$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，则

① $\Pi_1 /\!/ \Pi_2 \Longleftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$；

② $\Pi_1 \perp \Pi_2 \Longleftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$；

③ Π_1 与 Π_2 的夹角θ由下式确定。

$$\cos\theta=\frac{|A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

(4) 点到平面的距离　设有平面Π：$Ax+By+Cz+D=0$及Π外一点$P(x_0,y_0,z_0)$，则P到Π的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

1.1.3 直线

(1) 一般方程　$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$

其中，直线的方向向量为$\vec{S}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\A_1&B_1&C_1\\A_2&B_2&C_2\end{vmatrix}$。

(2) 点向式（对称式）方程　$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$，其中$\vec{S}=(m,n,p)$为直线的方向向量。

(3) 参数方程

$$\begin{cases}x=x_0+mt\\y=y_0+nt\\z=z_0+pt\end{cases}$$

其中$\vec{S}=(m,n,p)$为直线的方向向量。

(4) 两直线间的关系　设

L_1：$\dfrac{x-x_0}{m_1}=\dfrac{y-y_0}{n_1}=\dfrac{z-z_0}{p_1}$；$L_2$：$\dfrac{x-x_0'}{m_2}=\dfrac{y-y_0'}{n_2}=\dfrac{z-z_0'}{p_2}$

则

① $L_1 /\!/ L_2 \Longleftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$；

② $L_1 \perp L_2 \Longleftrightarrow m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2+p_1\cdot p_2=0$；

③ L_1 与 L_2 的夹角θ由下式确定。

$$\cos\theta=\frac{|m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2+p_1\cdot p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

④ L_1 与 L_2 共面$\Longleftrightarrow\begin{vmatrix}x_2-x_1&y_2-y_1&z_2-z_1\\m_1&n_1&p_1\\m_2&n_2&p_2\end{vmatrix}=0$，其中点$(x_1,y_1,z_1)\in L_1$，点$(x_2,y_2,z_2)\in L_2$。

(5) 直线与平面的关系　设L：$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$，$\Pi$：$Ax+By+Cz+D=0$，则

① $L /\!/ \Pi \Longleftrightarrow mA+nB+pC=0$；

② $L \perp \Pi \Longleftrightarrow \frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$；

③ L 与 Π 的夹角 φ 由下式确定。

$$\sin\varphi=\frac{|mA+nB+pC|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

（6）平面束方程

过直线 L：$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$的平面束方程为（$A_1x+B_1y+C_1z+D_1$）$+\lambda$（$A_2x+B_2y+C_2z+D_2$）$=0$，其中 λ 为参数。

1.1.4 柱面

柱面　只含 x、y 而缺 z 的三元方程 $F(x,y)=0$，在空间直角坐标系中表示母线平行于 z 轴的柱面，其准线是

$$\begin{cases}F(x,y)=0\\z=0\end{cases}$$

类似地，只含 x、z 而缺 y 的方程 $G(x,z)=0$ 和只含 y、z 而缺 x 的方程 $H(y,z)=0$ 分别表示母线平行于 y 轴和 x 轴的柱面。

1.1.5 旋转曲面

（1）旋转曲面　平面曲线 C：$\begin{cases}f(y,z)=0\\x=0\end{cases}$绕 z 轴旋转而成的曲面方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$；绕 y 轴旋转而成的曲面方程为 $f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$。

（2）锥面　直线 L 绕另一条与 L 相交的直线旋转一周，所得旋转曲面叫作圆锥面。两直线的交点叫作圆锥面的顶点；两直线的夹角 $\alpha(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$ 叫作圆锥面的半顶角。$z^2=k^2(x^2+y^2)$ 是顶点在原点、对称轴为 z 轴的圆锥面，$\alpha=\arctan\frac{1}{k}$是圆锥面的半顶角。

1.1.6 二次曲面

（1）二次曲面　由三元二次方程所表示的曲面。

（2）椭球面　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$（$a$、$b$、$c>0$）

（3）抛物面　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\pm z$（椭圆抛物面）

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm z$（双曲抛物面或鞍面）

（4）双曲面　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$（单叶双曲面）

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$（双叶双曲面）

1.1.7 空间曲线

1.1.7.1 空间曲线及其方程

空间曲线 Γ 的一般方程为

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}\tag{1-1}$$

曲线 Γ 的参数方程为

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$$

1.1.7.2 空间曲线 Γ 在坐标面上的投影曲线

以 Γ 为准线，母线垂直于 xoy 面的柱面叫作 Γ 对 xoy 面的投影柱面。投影柱面与 xoy 面的交线叫作 Γ 在 xoy 面上的投影曲线。

由方程组（1-1）消去 z，所得柱面 $H(x,y)=0$ 必包含了曲线 Γ，于是该柱面与 xoy 面的交线为

$$\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$

必包含了 Γ 在 xoy 面上的投影曲线。

类似地，消去方程组（1-1）中的变量 x 或 y，得 $R(y,z)=0$ 或 $T(x,z)=0$，再分别与 $x=0$ 或 $y=0$ 联立，就得到包含 Γ 在 yoz 面或 zox 面上的投影曲线的曲线方程。

$$\begin{cases} R(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} T(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$$

1.1.8 例题分析

【例 1-1-1】 已知三点 $A(-1,2,3)$，$B(1,1,1)$，C（0，0，5）。求（1）$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ 在 y 轴上的分向量；（2）三角形 ABC 是什么三角形。

解 （1）$\overrightarrow{AB}=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$，$\overrightarrow{BC}=-\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$，因为 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\vec{i}-3\vec{j}$，所以 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ 在 y 轴上的分向量为 $-3\vec{j}$。

（2）因为 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}=3$

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3$$

$$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{1^2+1^2+4^2}=\sqrt{18}$$

所以 $|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{BC}|^2$，故 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形。

【例 1-1-2】 设 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 均为单位向量，且满足 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，求 $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$。

解 因为
$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$$

所以
$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=0$$

由此得
$$\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{a}\cdot\vec{c}+2\vec{b}\cdot\vec{c}=0$$

因为
$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$$

所以
$$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=-\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2)=-\frac{3}{2}$$

【例 1-1-3】 试证明向量 $\vec{a}=-\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$，$\vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$，$\vec{c}=-3\vec{i}+12\vec{j}+6\vec{k}$ 在同一平面上，并将 $\vec{c}$ 用 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的线性组合来表示。

证明 因为 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}-1&3&2\\2&-3&-4\\-3&12&6\end{vmatrix}=0$

所以$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$在同一平面上。

设$\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$，将$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$代入得

$$\begin{aligned}-3\vec{i}+12\vec{j}+6\vec{k}&=\lambda(-\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k})+\mu(2\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k})\\&=(-\lambda+2\mu)\vec{i}+(3\lambda-3\mu)\vec{j}+(2\lambda-4\mu)\vec{k}\end{aligned}$$

比较等式两边有

$$\begin{cases}-\lambda+2\mu=-3\\3\lambda-2\mu=12\\2\lambda-4\mu=6\end{cases}$$

解得 $\lambda=5$，$\mu=1$，则$\vec{c}=5\vec{a}+\vec{b}$即为所求。

【例 1-1-4】 求过原点及点 (6，−3，2) 且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直的平面方程。

解 原点与点 $(6,-3,2)$ 连线的方向向量为$\vec{S}=(6,-3,2)$，平面 $4x-y+2z=8$ 的法向量为$\vec{n}=(4,-1,2)$。由题设，所求平面的法向量可取为

$$\vec{S}\times\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\6&-3&2\\4&-1&2\end{vmatrix}=-2(2\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k})$$

故所求平面方程为 $2(x-0)+2(y-0)-3(z-0)=0$，即

$$2x+2y-3z=0$$

【例 1-1-5】 求过点 $P(-1,0,4)$ 且平行于平面 Π：$3x-4y+z-10=0$，又与直线 L_1：$\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$相交的直线方程。

解 设所求直线 L 与 L_1 的交点为 $M(x_0,y_0,z_0)$，则 $x_0=-1+t$，$y_0=3+t$，$z_0=2t$，$\overrightarrow{PM}=(t,3+t,2t-4)$，$\overrightarrow{PM}$平行于平面 Π，因此$(t,3+t,2t-4)\cdot(3,-4,1)=0$，得 $t=16$，从而$\overrightarrow{PM}=(16,19,28)$，故所求直线方程为

$$\frac{x+1}{16}=\frac{y}{19}=\frac{z-4}{28}$$

【例 1-1-6】 已知直线 L：$\begin{cases}x-y=3\\3x-y+z=1\end{cases}$及点 $P_0(1,0,-1)$，求 P_0 到直线 L 的距离。

解 L 的参数方程为 $x=x$，$y=x-3$，$z=-2x-2$，L 的方向向量为 $(1,1,-2)$。

过点 P_0 且与 L 垂直相交的平面方程为

$$x+y-2z-3=0$$

L 与上述平面的交点为 $P_1\left(\frac{1}{3},-\frac{8}{3},-\frac{8}{3}\right)$，故所求距离为 $d=|\overrightarrow{P_0P_1}|=\frac{1}{3}\sqrt{93}$。

【例 1-1-7】 求直线 l：$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$在平面 Π：$x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 l_0 的方程，并求 l_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程。

解 设经过 l 且垂直于 Π 的平面方程为 Π_1：

$$A(x-1)+By+C(z-1)=0$$

则由条件可知 $A-B+2C=0$，$A+B-C=0$，

由此解得 $A:B:C=-1:3:2$。

于是 Π_1 的方程为

$$x-3y-2z+1=0$$

从而 l_0 的方程为：$\begin{cases}x-y+2z-1=0\\x-3y-2z+1=0\end{cases}$ 即$\begin{cases}x=2y\\z=-\dfrac{1}{2}(y-1)\end{cases}$

于是 l_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程为

$$x^2+z^2=4y^2+\frac{1}{4}(y-1)^2$$

即

$$4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0$$

【例 1-1-8】 求球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $x+z=1$ 的交线在 xoy 面上的投影曲线的方程。

解 先求包含所给球面与平面的交线，且母线平行于 z 轴的投影柱面方程，为此由方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9\\x+z=1\end{cases}$$

消去变量 z，得 $x^2+y^2+(1-x)^2=9$

即 $2x^2+y^2-2x=8$，此即为投影柱面的方程。

将其与 xoy 面的方程 $z=0$ 联立，即得所求投影曲线的方程为

$$\begin{cases}2x^2+y^2-2x=8\\z=0\end{cases}$$

【例 1-1-9】 平面 Ⅱ 通过 L_1：$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$，且平行于 L_2：$\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-1}$，求平面 Ⅱ 的方程。

解 设平面 Ⅱ 的方程为：$Ax+By+Cz+D=0$，由 Ⅱ 过 L_1 知 $M_0(0,0,1)$ 在 Ⅱ 上，因为 Ⅱ 平行于 L_1、L_2 且过 M_0，所以

$$\begin{cases}2A-B+2C=0\\B-C=0\\C+D=0\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}A=\dfrac{D}{2}\\B=C=-D\end{cases}$$

因此平面 Ⅱ 的方程为

$$\frac{D}{2}x-Dy-Dz+D=0$$

即

$$x-2y-2z+2=0$$

【例 1-1-10】 已知 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 为非零向量，且 $|\vec{b}|=1$，$(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{4}$，求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|\vec{a}+x\vec{b}|-|\vec{a}|}{x}$。

解 $$\lim_{x\to0}\frac{|\vec{a}+x\vec{b}|-|\vec{a}|}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(|\vec{a}+x\vec{b}|-|\vec{a}|)(|\vec{a}+x\vec{b}|+|\vec{a}|)}{x(|\vec{a}+x\vec{b}|+|\vec{a}|)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{|\vec{a}+x\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2}{x(|\vec{a}+x\vec{b}|+|\vec{a}|)}=\lim_{x\to 0}\frac{\vec{a}\cdot\vec{a}+2x\vec{a}\cdot\vec{b}+x^2\vec{b}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{a}}{x(|\vec{a}+x\vec{b}|+|\vec{a}|)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\vec{a}\cdot\vec{b}+x\vec{b}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}+x\vec{b}|+|\vec{a}|}=\frac{2\vec{a}\cdot\vec{b}}{2|\vec{a}|}=|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

习　　题

1. 下列说法正确的是（　　）。

A. 任何向量都有确定的大小和方向　　B. 任何向量除以自己的模都是单位向量

C. 只有模为零的向量才是零向量　　D. 0 乘以任何向量都是零

2. 设$\vec{a}$，$\vec{b}$为非零向量且$\vec{a}\perp\vec{b}$，则必有（　　）。

A. $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$　　B. $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$

C. $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$　　D. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}-\vec{b}$

3. 设$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$是基本单位向量，下列正确的等式是（　　）。

A. $\vec{i}\times\vec{k}=\vec{j}$　　B. $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{k}$　　C. $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}$　　D. $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{i}\times\vec{i}$

4. 设$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$均为非零向量，且$\vec{a}=\vec{b}\times\vec{c}$，$\vec{b}=\vec{c}\times\vec{a}$，$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$，则$|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|=$（　　）。

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

5. 平行于 xoz 平面，而且过点（2,5,3）的平面方程为（　　）。

A. $y-5=0$　　B. $x+5=0$　　C. $y+5=0$　　D. $x=5$

6. 直线$\frac{x+2}{-2}=\frac{y+4}{-7}=\frac{z}{3}$与平面 $4x-2y-2z=3$ 的关系是（　　）。

A. 平行，但直线不在平面上　　B. 直线在平面上　　C. 垂直相交　　D. 相交但不垂直

7. 直线$\begin{cases}x+2y-z=7\\-2x+y+z=7\end{cases}$与$\begin{cases}3x+6y-3z=8\\2x-y-z=0\end{cases}$的位置关系为（　　）。

A. 平行　　B. 垂直　　C. 相交但不垂直　　D. 以上都不对

8. 点 M（1,2,1）到平面 $x+2y+2z-10=0$ 的距离是（　　）。

A. 1　　B. ±1　　C. −1　　D. $\frac{1}{3}$

9. 已知动点与 yoz 平面的距离为 4，且与定点（5,2,−1）的距离为 3，则动点轨迹是（　　）。

A. 圆柱面　　B. 平面 $x=4$ 上的圆　　C. 平面 $x=4$ 上的椭圆　　D. 椭圆柱面

10. 下列各曲线绕 y 轴旋转而成椭球面 $3x^2+2y^2+3z^2=1$ 的曲线是（　　）。

A. $3x^2+2y^2=1$　　B. $2y^2+3z^2=1$

C. xoy 平面上的 $3x^2+2y^2=1$　　D. zox 平面上的 $3x^2+3z^2=1$

11. 方程 $16x^2+4y^2-z^2=64$ 表示（　　）。

A. 锥面　　B. 单叶双曲面　　C. 双叶双曲面　　D. 椭圆抛物面

12. 母线平行于 x 轴且通过曲线$\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16\\x^2-y^2+z^2=0\end{cases}$的柱面方程是（　　）。

A. 椭圆柱面 $3x^2+2z^2=16$　　B. 椭圆柱面 $x^2+2y^2=16$

C. 双曲柱面 $3y^2-z^2=16$　　D. 抛物柱面 $3x^2-z=16$

13. 设直线 L：$\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$ 及平面 Π：$4x-2y+z-2=0$，则直线 L（　　）。

A. 平行于 Π　　B. 在 Π 上　　C. 垂直于 Π　　D. 与 Π 斜交

14. 平面 $2x+y+z-5=0$ 与平面 $x-y+2z+2=0$ 之间的夹角为（　　）。

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{6}$　　D. $\arccos\frac{1}{6}$

15. 设 $|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=1$，$(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})=\frac{\pi}{6}$，则向量 $\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}-\vec{b}$ 间的夹角为（　　）。

A. $\arccos\frac{1}{7}$　　B. $\arccos\frac{1}{\sqrt{7}}$　　C. $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$　　D. $\arccos\frac{2}{7}\sqrt{7}$

16. 点 $M(1,2,-1)$ 到直线 L：$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{3}$ 的距离为（　　）。

A. $\frac{3}{7}\sqrt{42}$　　B. $\frac{5}{7}\sqrt{42}$　　C. $\frac{2}{7}\sqrt{42}$　　D. $\frac{4}{7}\sqrt{42}$

17. 设 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2$，则 $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$ 为（　　）。

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 4.1

18. 点 $(-1,2,0)$ 在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影点的坐标为（　　）。

A. $(0,0,1)$　　B. $(\frac{1}{3},\frac{2}{3},2\frac{2}{3})$　　C. $(-\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$　　D. $(1,-1,0)$

19. 点 $(2,3,1)$ 在直线 $\frac{x+7}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+2}{3}$ 上的投影点的坐标为（　　）。

A. $(-5,2,4)$　　B. $(0,12,19)$　　C. $(-6,0,1)$　　D. $(-4,4,7)$

20. 直线 $\begin{cases}2x-4y+z=0\\3x-y-2z-9=0\end{cases}$ 在坐标面上的投影直线为（　　）。

A. $\begin{cases}10y-7z=18\\x=0\end{cases}$　　B. $\begin{cases}7y-10z=19\\x=0\end{cases}$　　C. $\begin{cases}8y-9z=17\\x=0\end{cases}$　　D. $\begin{cases}9y-8z=17\\x=0\end{cases}$

习题答案

1. C　2. C　3. C　4. D　5. A　6. A　7. A　8. A　9. B　10. C　11. B　12. C　13. C　14. A　15. D　16. A　17. B　18. C　19. A　20. A

1.2　微　分　学

1.2.1　极限

1.2.1.1　数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的定义

数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的定义是：$\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$。

1.2.1.2　函数在有限点处的极限

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的定义是：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$。

1.2.1.3　函数在点 x_0 处的左、右极限

(1) $f(x)$ 在点 x_0 处的左极限记作 $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$ 或 $f(x_0-0)$，$f(x_0-0)=A$ 的定义是：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$。