线性代数

刘修生 程铭东 主编

华中科技大学出版社

HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

E-mail: hustpp@wuhan.cngb.com

线性代数

主　编　刘修生　程铭东
副主编　夏恩德　杨殿生

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/刘修生　程铭东　主编
武汉:华中科技大学出版社,2002 年 9 月
ISBN 7-5609-2791-2

Ⅰ. 线…
Ⅱ. ①刘…　②程…　③夏…　④杨…
Ⅲ. 线性代数-高等学校:技术学校-教材
Ⅳ. O151.2

线性代数　　　刘修生　程铭东　主编

策划编辑:曾　光　　　封面设计:刘　卉
责任编辑:叶见欣　　　责任监印:熊庆玉
责任校对:张兴田

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87557437

录　排:华中科技大学出版社照排室
印　刷:华中科技大学印刷厂

开本:850×1168　1/32　　印张:5.625　　字数:160 000
版次:2002 年 9 月第 1 版　　印次:2004 年 9 月第 4 次印刷　　定价:9.00 元
ISBN 7-5609-2791-2/O·266

内容简介

本书根据国家教育部审定的高等工科院校《线性代数课程教学基本要求》编写而成. 同时,本书针对目前工科院校的生源实际情况和新形势下的科学技术的发展要求,注意了内容的科学性和行文的通俗性的结合,加强了基础知识的讲解及其应用,注重学生创造性思维的培养,因而本书具有深入浅出、精练实用、针对性强等特点. 根据教学规律和经验,每章后面配有适度的习题,并在书末给出了习题的参考答案.

本书分为四章,内容包括行列式、矩阵、线性方程组、特征值问题与实二次型等,本书适合作为高等工科院校及相当层次的各专业教材,也可供广大自学者作为自修课本.

前　言

时代在进步，世纪已更新，科学技术飞速发展，知识更替日新月异. 随着教学改革的深入，新入学大学生的结构和素质发生了很大变化，为了适应这种形势，“线性代数”课程教学也必须进行改革，迫切需要有一本切合实际的教材. 基于此，我们组织了多位多年从事“线性代数”课程教学的具有丰富教学经验的教师，结合教学实践中积累的有益经验体会和最新的研究成果，编写了此书.

在本书的编写过程中，力求做到科学性和通俗性相结合. 在内容安排、形式体例、行文风格等方面，力求达到既便于教，又利于学的目的.

根据国家教育部审定的高等工科院校《线性代数课程教学基本要求》，在内容安排上，进行了系统编排. 全书共分四章：作为基本知识，行列式与矩阵分列在第一章和第二章，这样安排有助于系统全面地学习理解基本知识和概念；第三章在讨论了向量及向量组的基础上，系统介绍了线性方程组的结构；第四章的特征值问题与二次型，更是注重了学生创造性思维的培养，在提出概念和解决问题的过程中，大量使用了启发性的语言，同时渗透了当今最新的研究成果.

本书力求叙述清晰，语言流畅，通俗易懂. 可作为工科院校各类专业的教材.

本书由刘修生、程铭东任主编，夏恩德、杨殿生任副主编. 全书分四章. 其中第一章由刘修生编写；第二章由夏恩德、杨殿生、吴名安编写；第三章由舒和智、程良炎编写；第四章由程铭东、余敏编写. 最后由刘修生完成全书统稿.

本书的编写，得到了黄石理工学院教务处、公共课部和鄂州大学教务处的大力支持和帮助，谨在此表示衷心的感谢.

此外，还要感谢华中科技大学出版社对本书的关心和支持.

由于编者水平有限，本书难免存在一些缺点和不足，欢迎读者批评指正.

编　　者

2002年5月

目　　录

第一章　行列式 ………………………………………… (1)
1.1　二阶与三阶行列式 ………………………………… (1)
1.1.1　二阶行列式 ………………………………… (1)
1.1.2　三阶行列式 ………………………………… (2)
1.2　n 阶行列式 ………………………………… (4)
1.2.1　全排列及其逆序数 ………………………… (4)
1.2.2　n 阶行列式 ………………………………… (5)
1.3　行列式的性质 ………………………………… (8)
1.4　行列式按行(列)展开 ……………………………… (15)
1.5　克莱姆法则 ………………………………… (21)
习题一 ………………………………………… (26)
第二章　矩阵 ………………………………………… (30)
2.1　矩阵的概念 ………………………………… (30)
2.2　矩阵的运算 ………………………………… (32)
2.2.1　矩阵的加法 ………………………………… (32)
2.2.2　数与矩阵相乘 ………………………………… (33)
2.2.3　矩阵与矩阵相乘 ………………………………… (35)
2.2.4　矩阵的转置 ………………………………… (39)
2.2.5　方阵的幂 ………………………………… (40)
2.2.6　方阵的行列式 ………………………………… (41)
2.3　几种常用的矩阵 ………………………………… (41)
2.3.1　对角矩阵 ………………………………… (41)
2.3.2　数量矩阵 ………………………………… (42)
2.3.3　单位矩阵 ………………………………… (43)

2.3.4 对称矩阵 …………………………………………………… (44)
2.3.5 行阶梯形矩阵 ………………………………………… (45)
2.4 逆矩阵 …………………………………………………… (45)
2.4.1 逆矩阵的概念 ………………………………………… (45)
2.4.2 逆矩阵的性质及计算公式 …………………………… (47)
2.5 分块矩阵 ………………………………………………… (54)
2.6 矩阵的初等变换及初等矩阵 ………………………… (58)
2.6.1 初等变换 ……………………………………………… (58)
2.6.2 初等矩阵 ……………………………………………… (59)
2.7 矩阵的秩 ………………………………………………… (63)
习题二 ………………………………………………………… (67)
第三章 线性方程组 ……………………………………… (73)
3.1 高斯-约当消元法 ……………………………………… (73)
3.1.1 消元法 ………………………………………………… (73)
3.1.2 线性方程组的解 ……………………………………… (75)
3.2 向量组及其线性相关性 ……………………………… (82)
3.2.1 n维向量 ……………………………………………… (82)
3.2.2 向量组的线性相关性 ………………………………… (84)
3.3 向量组的秩 ……………………………………………… (94)
3.3.1 极大无关组 …………………………………………… (95)
3.3.2 用初等行变换求极大无关组 ………………………… (96)
3.4 向量空间 ………………………………………………… (98)
3.5 线性方程组解的结构 ………………………………… (100)
3.5.1 齐次线性方程组解的结构 …………………………… (100)
3.5.2 非齐次线性方程组解的结构 ………………………… (107)
习题三 ………………………………………………………… (110)
第四章 特征值问题与实二次型 ………………………… (116)
4.1 特征值与特征向量 ……………………………………… (116)
4.1.1 特征值与特征向量的基本概念及其计算 …………… (116)

4.1.2 特征值与特征向量的基本性质 ………………… (120)
4.2 相似矩阵 ……………………………………………… (122)
4.2.1 相似矩阵的概念 ………………………………… (122)
4.2.2 方阵的对角化 …………………………………… (124)
4.3 实对称矩阵的相似矩阵 ………………………… (128)
4.3.1 向量内积 ………………………………………… (128)
4.3.2 正交向量组 ……………………………………… (130)
4.3.3 正交矩阵与正交变换 …………………………… (136)
4.3.4 实对称矩阵的特征值与特征向量 ……………… (138)
4.3.5 实对称矩阵正交相似对角矩阵 ………………… (140)
4.4 二次型及其标准形 ……………………………… (143)
4.5 化二次型为标准形 ……………………………… (148)
4.5.1 用正交变换法化二次型为标准形 ……………… (148)
4.5.2 用配方法化二次型为标准形 …………………… (151)
4.5.3 正定二次型 ……………………………………… (153)
习题四……………………………………………………… (157)
习题参考答案……………………………………………… (160)

第一章　行　列　式

解线性方程组是代数中一个基本问题，并且在实际应用中占有重要的地位. 为了研究线性方程组，需要引入行列式这一有力工具. 本章介绍它的定义、性质及基本计算方法.

1.1　二阶与三阶行列式

行列式的研究源于对线性方程组的研究. 下面通过解二元、三元线性方程组来引出二阶、三阶行列式的定义.

1.1.1　二阶行列式

例 1　解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & ① \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & ② \end{cases}$$

时，可用加减消元法来解这个方程组，即

①$\times a_{22}-$②$\times a_{12}$，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \tag{1.1}$$

②$\times a_{11}-$①$\times a_{21}$，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \tag{1.2}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，由①式、②式和(1.1)式就可以得到方程组的解：

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{1.3}$$

从(1.3)式可以看出，x_1，x_2 的分母相同，且恰好为二元线性方程组的系数代数和. 数学上，为了研究问题的方便起见，把代数

和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$称为二阶行列式，并记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

即
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.4}$$

按照上述定义可知，上述二元线性方程组的解的表达式(1.3)式可用行列式表示成如下简洁形式：

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

1.1.2 三阶行列式

例 2 解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

时，我们可以引入三阶行列式这一工具. 用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32},$$

又称为三阶行列式，即

$$\begin{aligned} D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned} \tag{1.5}$$

用三阶行列式表示代数和时,也可以用画线的方法来帮助记忆,如图 1-1 所示. 其中各实线联结的三个元素的乘积前面加上正号,各虚线联结的三个元素的乘积前面加上负号,由此所得到的 6 个数的和,正好就是(1.5)式的右端.

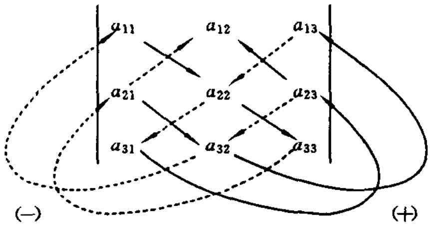

图 1-1

这样三元线性方程组的解可用三阶行列式表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \tag{1.6}$$

式中,
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$$

要讨论由 n 个方程、n 个未知数组成的线性方程组时,就需要

将行列式概念推广到 n 阶上去.

1.2 n 阶行列式

我们从(1.5)式三阶行列式表达式中可以看出,等号右端有三项带正号,另外三项带负号.那么,如何来确定哪些项带正号,哪些项带负号呢? 为此,先要引入排列的有关概念.

1.2.1 全排列及其逆序数

定义 1.1 由 n 个数字 $1,2,\cdots,n$ 所组成的一个全排列,称为一个 n 级排列.

常用 $(j_1,j_2,\cdots,j_n)$ 表示一个 n 级排列,其中,j_1 是该排列的第 1 个数,j_2 是该排列的第 2 个数,…,j_n 是该排列的第 n 个数.例如,(3,2,1)是一个 3 级排列,(4,3,2,1,5)是一个 5 级排列.请注意,(1,2,4,5)不是一个 4 级排列,这是因为任何一个 4 级排列只能出现 1,2,3,4 这 4 个数字.

n 级排列的种数总共有 $n!$ 种.例如,3 级排列的种数共有 $3!=6$ 种,它们是(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1).

在所有 n 级排列中,$(1,2,\cdots,n)$ 是唯一的按自然数顺序排列的,称它为自然排列或标准排列.

定义 1.2 在一个 n 级排列 $(j_1,j_2,\cdots,j_n)$ 中,如果有较大的数 j_t 排在较小的数 j_s 前面 $(j_s<j_t)$,则称 j_t 与 j_s 构成一个逆序.一个 n 级排列中逆序的总数,称为该排列的**逆序数**.n 级排列 $(j_1,j_2,\cdots,j_n)$ 的逆序数记为 $\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)$,并且称逆序数为奇数的 n 级排列为**奇排列**,称逆序数为偶数的 n 级排列为**偶排列**.

例如,在排列(2,3,1,5,4)中,2 在 1 前面,3 在 1 前面,5 在 4 前面,共有 3 个逆序,即逆序数

$$\tau(2,3,1,5,4)=3$$

因而为奇排列.

显然，自然排列$(1,2,3,\cdots,n)$的逆序数为零，它是偶排列.

一般地，一个 n 级排列的逆序数可按下面公式进行计算.

$\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)=j_1$ 后面比 j_1 小的数字 j_t 的个数$+j_2$ 后面比 j_2 小的数字 j_t 的个数$+\cdots+j_{n-1}$后面比 j_{n-1}小的数字 j_t 的个数

1.2.2 n 阶行列式

为了给出 n 阶行列式的定义，我们先来分析三阶行列式，由它的定义式(1.5)式的结构规律容易看出，(1.5)式的右端是形如

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

的 6 个乘积项的代数和，每一个这样的乘积都是 D 中 3 个取自不同的行和不同的列的 3 个元素的乘积，这 3 个元素的行标(第 1 个下标)已经排成自然排列(1,2,3)，这是人为规定的，因为乘法满足交换律. 在它们的行标已排定成自然排列后，列标所组成的每一个 3 级排列(j_1,j_2,j_3)就对应一个这样的乘积项，3 级全排列的种数总共有 6 种，它正好对应(1.5)式右端的 6 个乘积项. 所以，(1.5)式的右端是由所有的取自 D 的不同行不同列的 3 个元素的乘积所作成的代数和，这是定义式(1.5)式结构特征的一个方面. 另一方面，每个乘积项前面都带有一定的符号，这符号是由什么规律确定的呢？从表 1.1 可以看出，每个乘积项所带符号与该乘积项 3 个元素的列标所成排列之间的关系.

表 1.1

乘积项	列标所成排列	排列的奇偶性	带符号的乘积项
$a_{11}a_{22}a_{33}$	(1,2,3)	偶	$+a_{11}a_{22}a_{33}$
$a_{12}a_{23}a_{31}$	(2,3,1)	偶	$+a_{12}a_{23}a_{31}$
$a_{13}a_{21}a_{32}$	(3,1,2)	偶	$+a_{13}a_{21}a_{32}$
$a_{13}a_{22}a_{31}$	(3,2,1)	奇	$-a_{13}a_{22}a_{31}$
$a_{11}a_{23}a_{32}$	(1,3,2)	奇	$-a_{11}a_{23}a_{32}$
$a_{12}a_{21}a_{33}$	(2,1,3)	奇	$-a_{12}a_{21}a_{33}$

由表 1.1 容易看出，对于乘积项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，当(j_1,j_2,j_3)是偶排列时，它前面带正号；当(j_1,j_2,j_3)是奇排列时，它前面带负号.即 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 前面带的符号为$(-1)^{\tau(j_1,j_2,j_3)}$，因此三阶行列式的定义式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1,j_2,j_3)} (-1)^{\tau(j_1,j_2,j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

式中，$\sum\limits_{(j_1,j_2,j_3)}$ 是对所有 3 级排列(j_1,j_2,j_3)求和.

仿此，我们给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.3 用 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n **阶行列式**，其中横排称为行，纵排称为列. 它表示所有可能取自不同的行不同的列的 n 个元素乘积的代数和，各项符号的规定是：当这一项中元素的行标按自然数顺序排列后，如果对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，是奇排列则取负号. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)} (-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.7}$$

式中，$\sum\limits_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)}$ 是对所有 n 级排列求和，即$(j_1,j_2,\cdots,j_n)$要取遍所有的 n 级排列(共 $n!$ 个).

定义 1.3 中的 n 阶行列式可简记为$|a_{ij}|$. 一阶行列式$|a|$就是 a.

例 3 计算下三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的值.

解 记行列式的一般项为

$$(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

D 中有很多项为零,现在考察有哪些项不为零.一般项中第一个元素 a_{1j_1}取自第一行,而第一行除 a_{11}外其它元素全为零,故只须考虑 $j_1=1$;a_{2j_2}取自第二行,而第二行除 a_{21}及 a_{22}外其它元素全为零,故只须考虑 $j_2=1$ 及 $j_2=2$,但由于在排列$(j_1,j_2,\cdots,j_n)$中,若 $j_1=1$,j_2 就不能取 1,故只须考虑 $j_2=2$.这样类推下去,可得 $j_3=3$,$j_4=4$,$\cdots$,$j_n=n$.因此,D 中除去 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$这一项外,其它乘积项全都为零,从而

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\tau(1,2,\cdots,n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

同理可得上三角形行列式的值为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

特别地,对角行列式的值为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

行列式中从左上角到右下角的对角线称为主对角线.

上(下)三角形行列式的值,均等于主对角线上元素的乘积.这一结论在以后计算行列式中会经常使用.

例 4 计算 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ \lambda_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

的值.

解 考虑 D 的一般项

$$(-1)^{\tau(j_1,j_2,j_3,j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$$

注意,a_{1j_1}是取自第一行的元素,当 $j_1\neq 4$ 时,$a_{1j_1}=0$.从而对应项为零,因此,只须考虑 $j_1=4$ 对应的项;a_{2j_2}是取自第二行的元素,由于 $j_1=4$,故 $j_2\neq 4$,又当 $j_2\neq 3$ 时,$a_{2j_2}=0$,从而对应项为零,因此,只须考虑 $j_2=3$.同理,只须考虑 $j_3=2$,$j_4=1$ 所对应的项.这说明,D 中可能不为零的项只有一项:

$$(-1)^{\tau(4,3,2,1)}a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}=(-1)^6\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$$

即
$$D=\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$$

1.3 行列式的性质

用定义计算一般的行列式,是十分复杂,甚至是不可能的事情.因此,需要研究行列式的性质,并用性质简化行列式的计算.