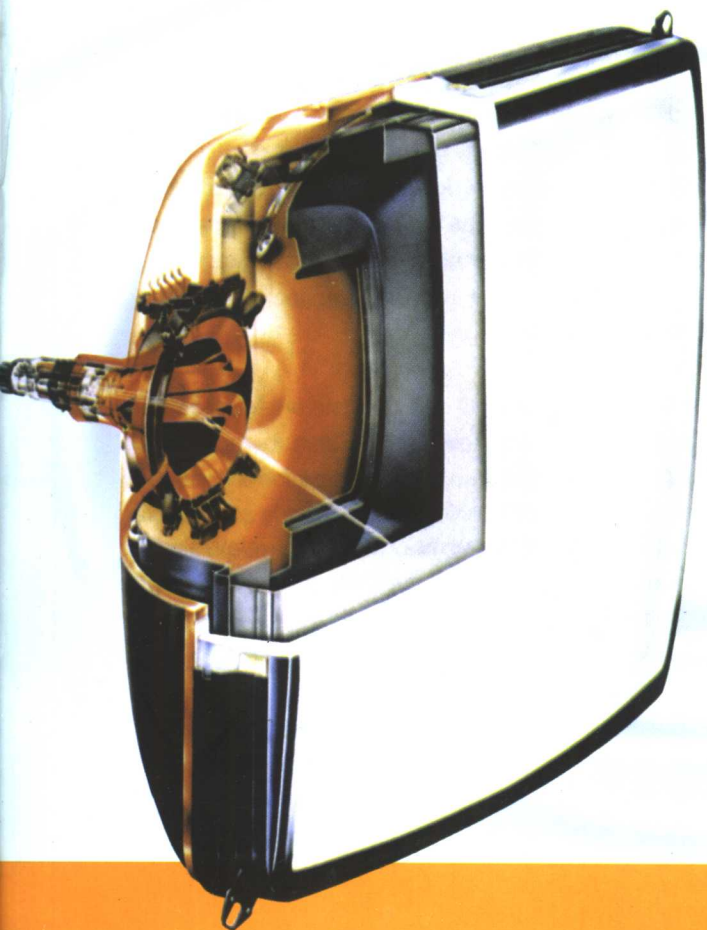


显示技术丛书

XIANSHI JISHU CONGSHU

电磁场理论 及其应用

○ 雷威 张晓兵 王保平 朱卓娅



东南大学 出版社

显示技术丛书

电磁场理论及其应用

雷 威 张晓兵
王保平 朱卓娅

东南大学出版社

• 南京 •

内 容 提 要

本书系统阐述了以麦克斯韦方程为基本骨架的经典电磁理论,并讨论了电磁理论的实际应用。书中首先回顾了经典电磁理论的建立过程以及分析电磁问题所必需的基本数学知识,然后详细讨论了麦克斯韦方程组与时变电磁场的基本特性;在此基础上分析静态场特性、平面电磁波的传播、导行电磁波及电磁波辐射;另外本书还介绍了电磁场的数值计算、电磁兼容、电磁生物效应及电磁理论在军事电子系统中的应用等方面的知识。

本书为电子科学技术与通信科学技术本科教材。若对内容进行适当删减,也可用于相关的大专和业余教育。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场理论及其应用/雷威,张晓兵,王保平,朱卓娅.

—南京:东南大学出版社,2005.6

(显示技术丛书/王保平,童林凤主编)

ISBN 7-81089-456-0

I. 电... II. ①雷...②张...③王...④朱...

III. 电磁场—研究 IV. 0441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 118799 号

东南大学出版社出版发行

(南京四牌楼 2 号 邮编 210096)

出版人:宋增民

江苏省新华书店经销 姜堰市晨光印刷有限公司印刷

开本:700mm×1000mm 1/16 印张:12.75 字数:257 千字

2005 年 6 月第 1 版 2005 年 6 月第 1 次印刷

定价:20.00 元

(凡因印装质量问题,可直接向我社发行部调换。电话:025-83795801)

前 言

电磁场理论阐述了宏观电磁现象的基本规律、基本理论及基本的分析方法,它是通信、电子、电气、电力和电机等应用学科的重要理论基础。同时,电磁场理论在材料科学、生命科学、环境科学、空间技术等新兴学科和边缘学科中也有非常广泛的应用。在很多工科院校中,电磁场理论被归属于专业基础课程。但是,由于与电磁理论相关联的很多电磁现象与专业学科的相关知识紧密联系,因此在某种意义上电磁场理论课程也可以看做是专业课程。

在讨论一个具体电磁问题时,根据应用情况通常可以分为强流和弱流两种类型。例如,在电机工程和电气领域所涉及的电磁问题中,一般电流比较大而且电磁场的变化频率基本上在工频范围,因此将研究重点放在准静态,研究电磁场变化引起的能量损耗,研究电磁场与磁极、线圈等的相互作用。在通信领域更多关心的是利用高频电磁波传播信息的电磁能量,属于弱流问题,此时的研究重点是高频电磁波的发射和传播过程。

随着现代科学技术的发展,学科之间出现了更多的交叉和融合,很难将一个研究领域内有关的电磁问题全部归结为强流或弱流问题。例如,在电子科学与技术学科中,有采用静态场和准静态场进行带电粒子的加速和偏转,也有采用几十到几百兆赫频率的电磁场进行金属部件加热和除气,利用磁场进行磁控溅射,利用高能电子束产生大功率微波输出。另外,电子器件内部以及器件之间的电磁干扰和电磁兼容也是在进行器件设计中所必须考虑的问题。因此,本书的重点在于对电磁场中的基本概念、基本定律、基本定理的阐述以及讨论对一些实际电磁问题的分析方法。

本书的参考学时为 40~50 学时,全书共分为 7 章。书中首先简要回顾经典电磁理论的建立过程,从奥斯特发现通电导线在其周围产生磁场,法拉第的电磁感应实验,麦克斯韦对经典电磁理论的大综合到赫兹证明电磁波的实际存在。整个经典电磁学的发展历史很强烈地体现出了对称与非对称的哲学思想,正是对电与磁相互转换的对称

性的研究中发展并完善了电磁理论。在介绍经典电磁理论前,书中还简单回顾了一些必备的数学知识。这些数学知识在分析电磁问题中将被大量采用,它们包括正交坐标系的相互转换,矢量的加法、减法、叉积及点积,梯度、散度、旋度,高斯定理、散度定理、旋度定理,矢量恒等式等。

麦克斯韦方程、电流连续性方程和洛伦兹力公式是经典电磁学的基本骨架,也是本书的阐述重点。根据麦克斯韦积分方程,可以得到在两个不同媒质分界面上电场强度和磁场强度的边界条件。另外,时变电磁场的有源波动方程、无源波动方程、时谐场的波动方程等也是讲授的重点。

虽然在普通物理课程中已经对静电场、静磁场和恒定电流场等做了比较深入的讨论,但为了保持整个电磁理论的完整性和系统性,本书对静态问题也做了一些有针对性的分析。根据电子工程、电气工程及通信工程等学科的特点,在静态场的讨论中重点放在电介质材料的等效体电荷密度、等效面电荷密度、极化强度、电介质的击穿强度等。磁性材料在信息领域有着非常广泛的应用,因此本书还重点介绍顺磁、逆磁和铁磁性材料的特点,特别是铁磁性材料的 $B-H$ 特性、磁饱和、剩磁、矫顽力及磁滞损耗等。

平面电磁波是电磁波的最简单形式。本书介绍:平面波在无损耗简单媒质中的传播,在有损耗媒质中的传播,在自由空间和理想导体分界面的垂直入射和倾斜入射;平面电磁波在两个及多层无损耗媒质中的垂直入射,在两个无损媒质中的倾斜入射等。在这些内容中强调了色散现象、电磁波的能量传播、电磁波的极化等。涡流问题、电磁屏蔽、集肤效应、邻近效应等都是电子工程和电气工程中经常遇到的电磁问题,本书也对这些问题进行具体的讨论。

本书通过导波方程,分析导波结构的一些基本特性,并对天线的电磁波辐射现象进行简要介绍。很多工科院校都开设了数学物理方法或者类似的课程,在这些课程中,详细讨论了给定边值条件和初始条件后微分方程的求解方法,因此这里不再重复介绍如何用解析方法来求解波动方程。随着数值计算技术和计算机技术的发展,人们越来越多地利用计算机来计算电磁问题,本书介绍利用有限差分和有限单元法来进行时变电磁问题的数值分析。

除了上述内容外,书中还介绍了电磁理论在生物、军事等领域的

应用。随着电子信息技术的发展,电子系统的电磁干扰和电磁兼容问题越发显得重要,因此本书还讨论了有关 EMC/EMI 的一些基本概念和常用的分析方法。

本书由东南大学雷威、张晓兵、王保平和朱卓娅共同编写,顾伟、狄云松、马晓燕和赵宏平同学负责了全书的插图工作。由于编者水平有限,书中不妥和错误之处在所难免,殷切希望使用本教材的师生及其他读者批评指正。

说明:本书物理量符号的使用每章统一。

编 者

2005 年 5 月 于东南大学

目 录

第 1 章 经典电磁理论的建立及电磁场分析的数学基础	(1)
1.1 电磁理论的建立	(1)
1.2 电磁场分析中的数学基础	(2)
第 2 章 麦克斯韦方程组与时变电磁场	(12)
2.1 法拉第电磁感应定律	(12)
2.2 麦克斯韦方程组	(14)
2.3 电磁场边界条件	(18)
2.4 电磁场能量关系——坡印亭定理	(23)
2.5 时变电磁场位函数	(27)
2.6 电路基本定律与电磁场方程组的相互联系	(29)
2.7 准静态电磁场	(31)
习题	(33)
第 3 章 静态场	(35)
3.1 静电场和恒定电流场	(35)
3.2 静磁场	(51)
习题	(67)
第 4 章 平面电磁波	(70)
4.1 时谐电磁场	(70)
4.2 在无损耗媒质中传播的均匀平面电磁波	(73)
4.3 横电磁波(TEM 波)	(77)
4.4 平面电磁波的极化	(79)
4.5 在导电媒质中传播的平面电磁波	(82)
4.6 均匀平面电磁波在理想导体平面边界上的垂直入射	(95)
4.7 均匀平面电磁波在理想导体平面边界上的倾斜入射	(99)
4.8 均匀平面电磁波在电介质平面边界上的垂直入射	(103)
4.9 均匀平面电磁波向多层电介质的垂直入射	(106)
4.10 均匀平面电磁波在电介质分界面上的倾斜入射	(110)
习题	(120)
第 5 章 导行电磁波及电磁波辐射	(124)
5.1 导行电磁波	(124)
5.2 电磁能量的辐射	(138)
5.3 微波电子管	(146)

习题.....	(148)
第 6 章 电磁场的数值计算	(150)
6.1 时变电磁场的惟一性定理	(150)
6.2 有限差分法	(152)
6.3 有限单元法	(160)
习题.....	(170)
第 7 章 电磁兼容、电磁生物效应及电磁场理论在军事电子系统	
中的应用	(171)
7.1 电磁兼容	(171)
7.2 电磁场的生物效应	(183)
7.3 电磁技术在军事电子系统中的应用	(187)
附 录	(190)
参考文献	(194)

第 1 章 经典电磁理论的建立及 电磁场分析的数学基础

电磁学所研究的内容包括静电场和静磁场的特性、带电粒子在电磁场中的运动、时变电磁场、电磁波的传播以及电磁能量的辐射等。如果比较电路理论和电磁场理论,可以看出电路理论所强调的是是一个系统所加载的电压和流过的电流,而电磁场理论则将研究重点放在激励源在其周围空间所产生的场的变化。电磁理论是一门成熟的学科,它是以麦克斯韦大综合作为基础。本章将简要回顾电磁理论的发展和建立的历史,从中可以清晰地了解人们对电磁现象的认知过程。

当我们在研究电磁场特性时,电场强度 E 和磁场强度 H 一般都随着时间和空间位置而变化。在讨论电磁场中各个场量之间相互关系时,需要大量地使用矢量运算,因此在这一章中还将简单介绍一些基本的矢量分析知识。

1.1 电磁理论的建立

从历史上来看,人们对电学和磁学的研究在很长一段时间是作为两个独立的分支。人们对于磁的认识似乎远早于对电的认识。因为地球本身存在着固有的磁场,它为磁学的初期发展提供了动因。中国古代四大发明中的指南针就是对地磁场的杰出应用。

人类对电学的早期研究则可以追溯到摩擦起电,然后是富兰克林的天电和地电的统一性实验以及库仑定律等。首先把电和磁联系起来的是丹麦学者奥斯特。由于当时的伏打电池已经可以产生足够强大的电流以克服地磁场的影响,因此奥斯特在实验中发现导线中通过的电流可以使其附近的小磁针产生偏转。该实验的重要性在于它揭示了电(或电流 I) 能够产生磁,把两个原先独立的分支联系起来了,从而使电磁发展史揭开了新的一页。

奥斯特的实验发现了电流能够产生磁场。按照对称性的思想,似乎也应该存在能够产生电场的磁流。为此,当时的学者们做了大量的研究,试图证明这个结论。英国物理学家法拉第为了证明磁也能够产生电,做了大量的实验。经过近 10 年令人沮丧的失败后,在 1831 年 8 月的一天,由于满足了导线切割磁力线运动的条件,法拉第终于发现了电磁感应现象。但是应该注意,在法拉第的实验中,产生感生电流的是变化的磁通量,而不是所谓的磁流。关于法拉第发现的电磁感应现象,一直是作为物理史上最优秀范例之一而被人们津津乐道。自学成才的法拉

第具有直观、简明和单刀直入的科学风格,他是物理史上提出力线和场观点的第一人,而且贯穿始终。

从表面看,在法拉第发现电磁感应之后,电与磁的相互联系已经完成。但事实并非如此。麦克斯韦对电磁现象之间的相互关系提出了新的看法。麦克斯韦依靠其深邃的哲学思考和雄厚的数学基础,潜心研究法拉第的全部实验资料,完成了电磁规律的伟大的理论综合,建立了经典电磁理论。麦克斯韦充分发挥法拉第的力线和场的思想,并完成其优美的数学表述。除此之外,麦克斯韦深入发现和分析了奥斯特电产生磁和法拉第磁产生电的不对称性。并且,进一步运用对称性思想作指导得出结论:既然法拉第发现磁场随时间的变化 $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 可以产生感应电场 $\mathbf{E}$,那么,很可能电通量密度随时间的变化 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 可以产生磁场 $\mathbf{H}$,这就是著名的位移电流思想。

下面来考察麦克斯韦方程组的两个旋度方程:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

从上面的方程中首先可以看出: $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 可转化为磁场 $\mathbf{H}$, $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 又可以转化为电场 $\mathbf{E}$,这种电磁的相互转化产生了电磁振动。

从方程(1.1)中还可看出:时变电磁场时间的变化可转化为地点的变化,而其地点的变化又可转化为时间的变化。正是在对这种时间和地点变化做出深入研究之后,麦克斯韦才大胆预言了电磁波的存在。

麦克斯韦完成全部理论综合后,电磁波的存在并没有马上获得实验验证。因为在当时的实验条件下位移电流太小且不容易被检测出。直到1887年和1888年才由科学家赫兹(Heinrich Rudolf Hertz)先后证实位移电流和电磁波的存在,这时麦克斯韦已去世近10年。

1.2 电磁场分析中的数学基础

在电磁学中,有一些物理量,如电荷、电流、能量等,完全由其大小(正负以及它们的单位)所决定,所以这些物理量是标量;另外一些物理量,例如电场强度和磁场强度,则是由它们的大小和方向共同决定,所以它们是矢量。我们在分析电磁问题以及讨论电磁场基本规律时,需要采用大量的矢量分析和变换。因此,本节将简要介绍矢量分析和相关的定律。

本节所讨论的内容包括以下 3 个部分:

(1) 矢量代数

由于电磁场的场量是矢量,因此在研究多个电磁场叠加、分解等问题时,必须采用矢量的加法、减法和乘法。

(2) 正交坐标系及其变换

在不同的坐标系下表示电场强度、磁场强度等矢量时,它们在坐标轴上的分量是不一样的;但是将这些标量和矢量联系起来的电磁学基本规律和定律,则在正交坐标系下都是成立的。因此,我们在研究具体的电磁问题时,经常会遇到坐标系之间的相互变换。例如,对应于某些具体的实际问题,采用合理的坐标系可以使分析过程简化。当我们讨论一个无限长的圆形线圈时,采用极坐标比较简单;而在讨论圆柱或球形电极时,利用圆柱坐标或球坐标则能更好地描述电极的表面形状。

(3) 矢量微积分、 ∇ 算符、梯度、散度和旋度的运算

采用这些矢量和算符的运算,可以将电磁学的基本定律用非常简练的形式表示出来。

1.2.1 矢量代数

1) 矢量的加法和减法

两个矢量相加可由平行四边形法则或首尾相接法则得到。如果将矢量 A 和矢量 B 的和定义为矢量 C

$$C = A + B \quad (1.2)$$

矢量 C 是以 A 和 B 两个矢量为相邻两边的平行四边形的对角线,如图 1.1 所示。

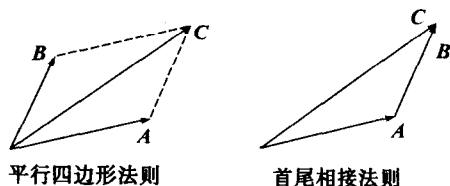


图 1.1 矢量的加法

从矢量加法的运算法则可以看出,矢量加法服从交换律和结合律:

$$\begin{aligned} A + B &= B + A \\ A + (B + C) &= (A + B) + C \end{aligned} \quad (1.3)$$

矢量减法可以借助于下式与矢量加法等效:

$$A - B = A + (-B) \quad (1.4)$$

其中 $-B$ 矢量的大小与 B 矢量相同, 方向与 B 矢量相反。

2) 矢量的乘积

在矢量运算中, 矢量的乘积包含点积和叉积(或标量积和矢量积) 两个不同的定义。其中两个矢量的标量积可以表示为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta_{AB} \quad (1.5)$$

式中 θ_{AB} 是 A 矢量与 B 矢量的夹角, 如图 1.2 所示。

很显然, 两个矢量的标量积的结果是一个标量。两个矢量的标量积服从交换律和分配律:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \\ \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

两个矢量的矢量积可以定义为

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{a}_n |AB \sin \theta_{AB}| \quad (1.7)$$

其中 $\mathbf{a}_n$ 是一个单位矢量, 其方向如图 1.3 所示。

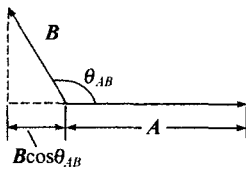


图 1.2 矢量的标量积

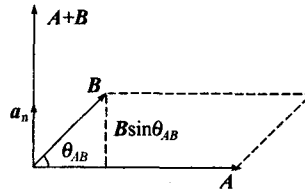


图 1.3 矢量的矢量积

从矢量积的定义可以看出, 对两个矢量进行矢量积, 最后所得到的是一个矢量。因此, 两个矢量的矢量积不符合交换律和结合律, 但是服从分配律:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad (1.8)$$

1.2.2 正交坐标系及其变换

1) 笛卡儿坐标系

笛卡儿坐标系又称为直角坐标系, 它是我们分析实际电磁问题时最常用的坐标系统。在笛卡儿坐标系中矢量 $\mathbf{A}$ 可以表示为

$$\mathbf{A} = a_x A_x + a_y A_y + a_z A_z \quad (1.9)$$

其中, a_x, a_y, a_z 是沿 x, y, z 的 3 个坐标轴的单位矢量, A_x, A_y, A_z 则是矢量在 3 个坐标轴上的分量, 如图 1.4 所示。

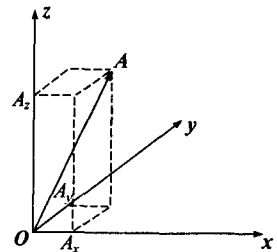


图 1.4 笛卡儿坐标系

在笛卡儿坐标系中,微分长度、微分面积和微分体积的表示式分别为

$$\left. \begin{aligned} dl &= a_x dx + a_y dy + a_z dz \\ ds_x &= a_x dydz, ds_y = a_y dx dz, ds_z = a_z dx dy \\ dV &= dx dy dz \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

2) 圆柱坐标系

如果我们所研究的电磁系统具有轴对称结构,通常采用圆柱坐标系统。在圆柱坐标系中矢量 $\mathbf{A}$ 可以表示为

$$\mathbf{A} = a_r A_r + a_\varphi A_\varphi + a_z A_z \quad (1.11)$$

圆柱坐标系中各单位矢量及分量如图 1.5 所示。



图 1.5 圆柱坐标系

在圆柱坐标系中,微分长度、微分面积和微分体积的表示式分别为

$$\left. \begin{aligned} dl &= a_r dr + a_\varphi r d\varphi + a_z dz \\ ds_r &= a_r r d\varphi dz, ds_\varphi = a_\varphi dr dz, ds_z = a_z r dr d\varphi \\ dV &= r dr d\varphi dz \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

3) 球坐标系

在球坐标系中矢量 $\mathbf{A}$ 可以表示为

$$\mathbf{A} = a_r A_r + a_\theta A_\theta + a_\varphi A_\varphi \quad (1.13)$$

球坐标系中各单位矢量及分量如图 1.6 所示。

在球坐标系中,微分长度、微分面积和微分体积的表示式分别为

$$\left. \begin{aligned} dl &= a_r dr + a_\theta r d\theta + a_\varphi r \sin\theta d\varphi \\ ds_r &= a_r r^2 \sin\theta d\theta d\varphi, ds_\theta = a_\theta r \sin\theta dr d\varphi, ds_\varphi = a_\varphi r dr d\theta \\ dV &= r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

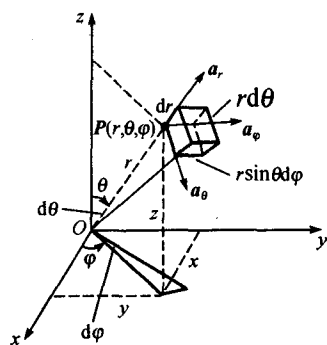
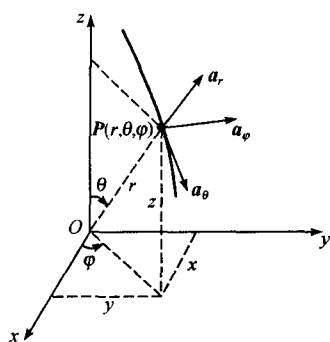


图 1.6 球坐标系

4) 笛卡儿坐标系、圆柱坐标系和球坐标系之间的相互变换

在分析实际的电磁结构中,往往需要同时采用几个不同的坐标系。例如采用不同类型的整体坐标系和局部坐标系,此时需要不同坐标系的相互转换。从圆柱坐标到笛卡儿坐标的变换公式为

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

其逆变换(从笛卡儿坐标到圆柱坐标)为

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \arctan \frac{y}{x} \\ z &= z \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

从球坐标到笛卡儿坐标的变换公式为

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

其逆变换(从笛卡儿坐标到球坐标)为

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta &= \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ \varphi &= \arctan \frac{y}{x} \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

5) 正交坐标系

如果在一个三维坐标系中,坐标轴的基本矢量相互垂直,该坐标系是一个正交坐标系。显然,笛卡儿坐标、圆柱坐标和球坐标都是正交坐标系。

在正交坐标系中,任何一个矢量 $\mathbf{A}$ 可以写成它在 3 个正交方向的分量和,即

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_{u1} A_{u1} + \mathbf{a}_{u2} A_{u2} + \mathbf{a}_{u3} A_{u3} \quad (1.19)$$

其中 $\mathbf{a}_{u1}$ 、 $\mathbf{a}_{u2}$ 、 $\mathbf{a}_{u3}$ 是坐标系的基本矢量, A_{u1} 、 A_{u2} 、 A_{u3} 是矢量 $\mathbf{A}$ 在 3 个坐标轴上的分量。

在一个正交坐标系中,一个沿任意方向的微分长度增量可以表示为

$$d\mathbf{l} = \mathbf{a}_{u1} (h_1 du_1) + \mathbf{a}_{u2} (h_2 du_2) + \mathbf{a}_{u3} (h_3 du_3) \quad (1.20)$$

式中 h_1 、 h_2 、 h_3 为度量系数。微分面积和微分体积也可以表示为

$$\left. \begin{aligned} ds_1 &= \mathbf{a}_{u1} (h_2 h_3 du_2 du_3) \\ ds_2 &= \mathbf{a}_{u2} (h_1 h_3 du_1 du_3) \\ ds_3 &= \mathbf{a}_{u3} (h_1 h_2 du_1 du_2) \\ dV &= h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3 \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

表 1.1 给出了笛卡儿坐标、圆柱坐标和球坐标的基本矢量、度量系数、微分体积等。

表 1.1 3 个基本正交坐标系

坐标系名称		笛卡儿坐标	圆柱坐标	球坐标
基本 矢量	$\mathbf{a}_{u1}$	$\mathbf{a}_x$	$\mathbf{a}_r$	$\mathbf{a}_r$
	$\mathbf{a}_{u2}$	$\mathbf{a}_y$	$\mathbf{a}_\varphi$	$\mathbf{a}_\theta$
	$\mathbf{a}_{u3}$	$\mathbf{a}_z$	$\mathbf{a}_z$	$\mathbf{a}_\varphi$
度量 系数	h_1	1	1	1
	h_2	1	r	r
	h_3	1	1	$r \sin \theta$
微分 体积	dV	$dx dy dz$	$r dr d\varphi dz$	$r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$

1.2.3 ∇ 算符、梯度、散度和旋度的运算

1) 梯度

在电磁学中,电场强度、磁场强度等物理量都是空间位置和时间的函数。当 4 个变量中任何一个发生变化时,电磁场也会产生相应的改变。我们通常采用梯度表征给定时刻下标量场的空间变化率。我们把表示一个标量 ϕ 最大空间增长

率的大小和方向的矢量定义为该标量的梯度,如图 1.7 所示。

$$\text{grad}\varphi \triangleq \mathbf{a}_n \frac{d\phi}{dn} \quad (1.22)$$

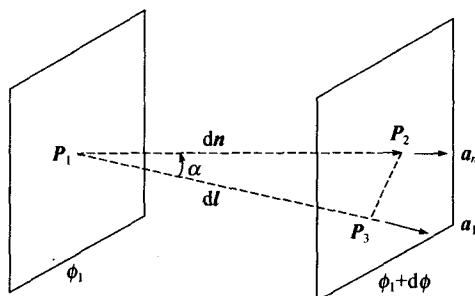


图 1.7 一个标量的梯度

为了使表示更加简洁,习惯采用 ∇ 算符。因此,标量 ϕ 的梯度表示为

$$\nabla \phi = \mathbf{a}_n \frac{d\phi}{dn} \quad (1.23)$$

在广义正交坐标系中 ∇ 的定义为

$$\nabla \equiv \left(\mathbf{a}_{u1} \frac{\partial}{h_1 \partial u_1} + \mathbf{a}_{u2} \frac{\partial}{h_2 \partial u_2} + \mathbf{a}_{u3} \frac{\partial}{h_3 \partial u_3} \right) \quad (1.24)$$

因此,在正交坐标系中标量 ϕ 的梯度为

$$\nabla \phi = \left(\mathbf{a}_{u1} \frac{\partial \phi}{h_1 \partial u_1} + \mathbf{a}_{u2} \frac{\partial \phi}{h_2 \partial u_2} + \mathbf{a}_{u3} \frac{\partial \phi}{h_3 \partial u_3} \right) \quad (1.25)$$

根据笛卡儿坐标、圆柱坐标及球坐标的度量系数,可以方便地得到在笛卡儿坐标、圆柱坐标及球坐标中梯度的具体表示形式分别为

$$\left. \begin{aligned} \nabla \phi &= \mathbf{a}_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial \phi}{\partial z} && \text{(直角坐标系)} \\ \nabla \phi &= \mathbf{a}_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \mathbf{a}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} + \mathbf{a}_z \frac{\partial \phi}{\partial z} && \text{(圆柱坐标系)} \\ \nabla \phi &= \mathbf{a}_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \mathbf{a}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \mathbf{a}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} && \text{(球坐标系)} \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

2) 散度及散度定理

当研究电磁场特性的时候,采用带方向的场线来形象表征矢量场的分布。矢量场的大小用该点附近场线的密度表示。我们把矢量场 $\mathbf{A}$ 在某一点处的散度 $\text{div}\mathbf{A}$ 定义为:当包含该点在内的体积趋于零时,单位体积的净流散通量。

$$\operatorname{div} \mathbf{A} \triangleq \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}}{\Delta V} \quad (1.27)$$

习惯上采用记号 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 表示 $\operatorname{div} \mathbf{A}$ 。在正交坐标系下, 矢量 $\mathbf{A}$ 的散度为

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 A_3) \right] \quad (1.28)$$

根据笛卡儿坐标、圆柱坐标、球坐标的度量系数及式(1.28), 我们可以方便地得到在笛卡儿坐标、圆柱坐标及球坐标中散度的具体表示形式:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} && (\text{直角坐标}) \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} && (\text{圆柱坐标}) \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} && (\text{球坐标}) \end{aligned} \right\} \quad (1.29)$$

在前面的讨论中, 我们将矢量场的散度定义为单位体积的净流散通量。因此, 可以直观地想象矢量场散度的体积分应该等于该矢量穿过包围该体积的封闭面的总流散通量

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.30)$$

式(1.30)称为散度定理或高斯定理, 其数学推导可见文献[1]。在式(1.30)中还要求矢量场 $\mathbf{A}$ 及其一阶导数在体积 V 和表面 s 上切线方向连续。散度定理是矢量分析中的一个重要恒等式, 它将矢量散度的体积分和该矢量在封闭曲面上的面积分相互联系。在后面的章节中, 我们将用它来证明一些电磁学的定理和电磁关系。

3) 旋度及旋度定理

前面讨论过矢量穿过一个包围某体积的封闭表面的净流散通量表示该体积内的流量源强度。与此类似, 矢量场绕一闭合路径的标量线积分表示该矢量场绕此路径的环量。矢量场 $\mathbf{A}$ 的旋度是一个矢量, 其大小为当面积趋近于零时, 单位面积上 $\mathbf{A}$ 的最大净环量; 其方向为当面积的取向使得净环量为最大时, 该面积的法线方向。矢量场 $\mathbf{A}$ 的旋度记为 $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ 或 $\nabla \times \mathbf{A}$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \left[\mathbf{a}_n \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right]_{\max} \quad (1.31)$$

在正交坐标系中, 矢量 $\mathbf{A}$ 的旋度可以表示为