国家工科数学课程教学基地建设系列教材

高等数学立体化系列教材

高等数学

下册

华南理工大学数学科学学院

陈凤平　傅一平　杨立洪　主编

洪潮兴　主审

华南理工大学出版社

国家工科数学课程教学基地建设系列教材

高等数学立体化系列教材

高 等 数 学

下册

华南理工大学数学科学学院

陈凤平　傅一平　杨立洪　主编

洪潮兴　主审

华南理工大学出版社

·广州·

内 容 简 介

本书是华南理工大学“国家工科数学课程教学基地”建设的改革教材之一，也是广东省优秀课程“高等数学”系列教材之一. 本书根据原国家教委颁发的《高等工业学校高等数学课程教学基本要求》，本着深化课程体系与教学内容改革的精神编写. 在编写时，注重课程体系结构的优化；对重要数学概念的阐述，突出数学思想与方法；加强对数学应用意识和能力的培养；注重教学的适用性.

本书共分两册. 上册包括函数、极限与连续，一元函数微分学，一元函数积分学与微分方程；下册包括向量代数、空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学与无穷级数. 每节配有习题，每章配有复习题，书末附习题答案.

本书结构严谨，论证清晰，叙述详尽，便于在教学改革中使用；例题典型，富有启发性，可读性强，便于自学. 本书可作为高等理工科院校本科教材，也可供工程技术人员、自学者及报考研究生的读者参考.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（下册）/陈凤平，傅一平，杨立洪主编. —广州：华南理工大学出版社，2005.2
（国家工科数学课程教学基地建设系列教材　高等数学立体化系列教材）
ISBN 7-5623-2189-2

Ⅰ. 高…　Ⅱ. ①陈…②傅…③杨…　Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材　Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 012471 号

总 发 行：华南理工大学出版社（广州五山华南理工大学 17 号楼，邮编 510640）
发行部电话：020-87113487　87111048（传真）
E-mail：scut202@scut.edu.cn　　http://www.scutpress.com
责任编辑：胡　元　赵　鑫
印 刷 者：广东省农垦总局印刷厂
开　　本：787×960　1/16　**印张**：22.25　**字数**：522 千
版　　次：2005 年 2 月第 1 版第 1 次印刷
印　　数：1～4 000 册
定　　价：29.50 元

总　序

自1995年以来，华南理工大学应用数学系（现数学科学学院）的老师们为建设国家工科数学课程教学基地不懈努力，在教育改革中做出了显著的成绩。“国家工科数学课程教学基地建设系列教材”的出版，是教学改革成果的重要组成部分。

21世纪是经济全球化、信息化的时代，数学科学在科学技术中占有核心地位，成为直接的生产力。大学数学课程在高等教育中起着关键的作用，对学生素质的提高特别是创新能力的培养起着越来越重要的作用。

提高大学数学的教学质量，是一项艰巨、重要的任务。大学数学的教学，应该使学生在理解数学思想、数学建模和运算能力等方面，得到最基本的训练。为使学生理解数学思想，必须讲清基本概念，并通过必要的逻辑推理训练使学生理解基本概念和基本定理。通过数学建模的学习，学生可以了解数学的来源，并且学会运用数学。运算能力的培养是提高数学素质的基础。当然，这三方面综合能力的培养是一个有机的整体，根据不同专业的要求和学生的实际情况可以有所侧重。

为了适应新形势，本系列教材力求反映数学与其他学科的最新发展，删减过时的内容，介绍各种数学软件的应用，充分使用多媒体等技术。

本系列教材的出版，反映了我院教师多年来教学改革的成果，也吸取了不少兄弟院校同行的宝贵经验。限于我们的水平，其中疏漏在所难免，恳请国内外专家、同行指正。本系列教材的出版得到华南理工大学校领导与华南理工大学出版社的大力支持，特此表示感谢。

华南理工大学数学科学学院

2004年8月

前　言

华南理工大学自1999年通过教育部本科教学工作优秀评价以来，在较高的起点上进一步推进本科教学改革和建设，正逐步建立和完善研究型本科教学体系.

高等数学课程是我校理科(非数学类)、工科乃至文科以及经济管理类各专业的一门主要基础理论课程，对培养学生的研究型思维、创新能力，提高学生综合素质具有重要的奠基作用.

本书根据原国家教委颁发的《高等工业学校高等数学课程教学基本要求》，本着教育创新、深化改革的精神，在我校"国家工科数学课程教学基地"建设的教改实践中编写出来，具有以下突出特点：

一、注重基本概念阐述，突出数学建模思想与方法，着力于探究式学习能力的培养

为适应我国高等教育大众化的趋势，确实保证教学质量；同时，也为实施研究型教学，给学生提供探究学习的基本素材，本书注重对数学概念的详尽阐述.数学概念的引进，尽量从实际问题入手，尽量借助几何图形的直观性，力争使抽象的数学概念形象化；尽量按辩证唯物论的认识论来引进数学概念，做到由特殊到一般，再由一般回到特殊，力争使抽象的数学概念具体化.数学概念的引进，强调从实际问题的分析中提出数学问题，然后选择恰当的数学方法加以解决，突出数学建模的思维程序.只有使学生深刻、透彻地理解数学的基本概念，方谈得上数学素质的培养、教学的创新，才能确保教学质量这条生命线.

二、突出数学思想方法，启迪创新思维，着力于数学素质与能力的培养

本书在对数学概念详尽阐述的基础上，注重揭示重要数学概念的本质，着重讲解在解决实际问题时有重要应用价值的数学思想和方法.在极限概念中渗透逼近思想，在微分概念中渗透线性化思想，在极值问题中渗透最优化思想，在微积分与微分方程应用中突出微元分析法等.为适应我校培养、造就大批拔尖创新人才的需求，本书由浅入深，形成渐进"台阶"，逐步提高教学基本要求.据此，本书适当选择部分要求略高的教学内容和例题，着重思维方法的训练，使学生在抽象思维、逻辑思维和严谨性方面受到必要的熏陶，这是创新人才所必需的.

在使用本书时，各专业应根据教学要求在内容上作适当的取舍(特别是加上星号(*)的章节)．本书力求做到低起点，然后由浅入深，循序渐进，让读者有较大的发挥空间，最后升华到一定的高度．

三、注重课程体系结构与教学内容的整体优化

在教材编写过程中，我们抓住均匀变化与非均匀变化这对矛盾的转化，并把它作为主线．力求突出微分与积分这对高等数学的重点，把定积分与不定积分合为一章，将它们的计算方法结合在一起讨论，这样使知识结构更具条理性、系统性，理论阐述更为深刻、完整．重视相关内容的内在联系与合理融合，将重积分、第一类曲线积分与第一类曲面积分统一成多元数量值函数积分，并讨论它们的共同性质、统一的物理应用公式；将第二类曲线积分与第二类曲面积分统一成多元向量值函数积分，并把它们和向量场的研究密切结合，同时也与物理学的实际应用形式相一致．教学内容和体系的这种整合优化，符合现代数学的发展趋势．

为突出数学思想与方法，对运算技巧作适当淡化，使内容更贴近教学实际．

本书分上、下两册．下册包括向量代数、空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学与无穷级数．下册由陈凤平、傅一平、杨立洪主编，参加编写的有陈凤平、傅一平、杨立洪、王全迪、黄新耀、郭艾．我们特别感谢主审人洪潮兴教授，他花费了大量的时间和精力，对书稿进行了非常认真细致的审查，提出了许多宝贵的意见和建议，对提高本书的质量起了十分重要的作用．

我们在多年的教学和研究中，采用和参考多种国内外高等数学教材及其他参考书，受益匪浅，在编写本书时也无不受这些优秀教材的启发和指引，在此对这些优秀教材的作者表示感谢．

本书是我校“国家工科数学课程教学基地”建设的改革教材之一，得到华南理工大学教务处、数学科学学院等多方面的关怀和支持，在此向有关方面表示感谢．

本书也是广东省优秀课程“高等数学”立体化系列教材之一，它凝聚了常年在华南理工大学高等数学教学第一线工作的老师们的教学经验，是高等数学教研室老师们集体智慧的结晶．

由于我们水平所限，书中疏漏之处在所难免，敬请同行专家及读者批评指正．

编　者

2005 年 1 月

目　　录

第五章　向量代数与空间解析几何

与平面解析几何类似，空间解析几何是用代数的方法来研究几何的问题.通过在空间建立坐标系，将空间的点用坐标表示，从而使空间几何图形的性质可以表示为点的坐标之间的代数关系.

人们已经看到，平面解析几何的知识对于学习一元函数微积分发挥了重大作用.为了将一元函数推广至多元函数，有必要学习空间解析几何的知识，而且空间解析几何知识对于学习线性代数和物理等课程也是必不可少的.

本章首先引入在工程技术上有着广泛应用的向量的概念，介绍向量的线性运算；然后建立空间直角坐标系，将向量线性运算代数化，同时还讨论向量的乘法，即向量的数量积与向量积；接着以向量为工具讨论空间平面和直线；最后介绍曲面和曲线，在曲面方程中着重讨论二次曲面方程.

第一节　向量及其线性运算

一、向量的概念

由物理学可知，力和速度是既要考虑数值大小、又要考虑方向的量.这类既有数值大小、又有方向的量叫做**向量**.向量可以用有向线段来表示，有向线段的指向表示向量的方向，有向线段的长度表示向量的数值大小，如图 5-1 所示.向量通常用黑体字母或上方加箭头的字母表示，如 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{v},\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a},\vec{v},\vec{F}$，也可以用 $\overrightarrow{AB}$ 来表示以 A 为始点、B 为终点的向量.

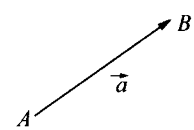

图 5-1

向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小称为**向量的模**，记为 $|\boldsymbol{a}|$.

模为零的向量称为**零向量**，记为 $\boldsymbol{0}$，以后简记为 0.零向量没有确定的方向，也可以看作方向是任意的.

模为 1 的向量称为**单位向量**.

与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相等、方向相反的向量称为 **$\boldsymbol{a}$ 的负向量**，记为 $-\boldsymbol{a}$.

如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，它们的模相等，方向又相同（即在同一直线上或在平行直线上且指向相同），就说这两个向量是相等的，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.根据此规定，两个向量相等并不需要它们在位置上完全重合，只要求这两个向量经过平移后重合，即一个向量经平行移动到空间任何位置，所得向量与原向量均相等.换句话说，向量与它的起点无关，这样的向量称为**自由向量**.本章所讨论的向量都是自由向量.

二、向量的线性运算

1. 向量的加法

通过回忆物理学中力、速度的合成法,可引出下面的定义.

定义 1 **对于向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$,任选一点 A 作向量$\overrightarrow{AB}$等于 $\boldsymbol{a}$,作向量$\overrightarrow{BC}$等于 $\boldsymbol{b}$,把$\overrightarrow{AC}$表示的向量 $\boldsymbol{c}$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$**,如图 5-2 所示.

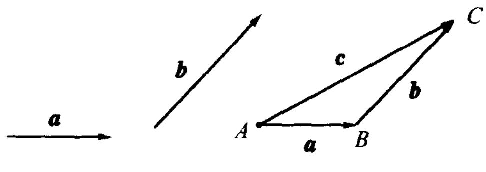

图 5-2

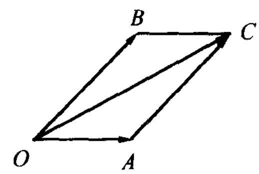

图 5-3

这一规则叫做**向量加法的三角形法则**.

注:从同一始点 O 作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,以 OA,OB 为邻边的平行四边形 $OACB$ 的对角线$\overrightarrow{OC}$也表示向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和(图 5-3),这叫做**向量加法的平行四边形法则**.

向量加法的运算律:

(1)交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

(2)结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

(3)$\boldsymbol{a}+0=\boldsymbol{a}$.

(4)$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=0$.

由向量加法的定义知交换律显然成立.

结合律的证明:作$\overrightarrow{OA}$等于 $\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AB}$等于 $\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{BC}$等于 $\boldsymbol{c}$,如图 5-4 所示,则$\overrightarrow{OB}$等于 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{OC}$等于$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$;又$\overrightarrow{AC}$等于 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,$\overrightarrow{OC}$等于 $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$,因此有$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

如果给出 $n(n\geqslant 3)$个向量,由于向量的加法符合交换律与结合律,于是 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,…,$\boldsymbol{a}_n$($n\geqslant 3$)相加可写成

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n,$$

按向量相加的三角形法则,可得 n 个向量相加的法则如下:以前一向量的终点作为次后一个向量的起点,接连相继作出向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$,再以首个向量的起点为起点,向最后一个向量的终点作向量,这个向量即为所求的和,如图 5-5 所示.

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_5=\overrightarrow{OA_5}$$

规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}),$$

如图 5-6 所示.

容易看出,对于任意向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,都有

$$|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

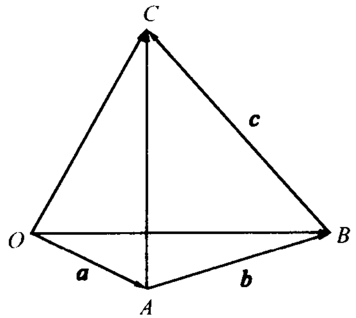

图 5-4

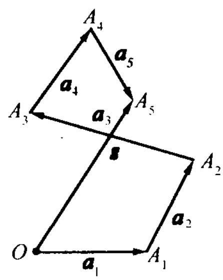

图 5-5

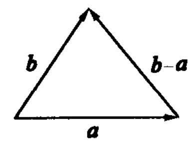

图 5-6

这个不等式称为三角形不等式,它是用向量的形式表示三角形的一边不大于另两边的和.

2. 向量与数的乘法

定义 2 实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积(数乘)是一个向量,记为 $\lambda\boldsymbol{a}$,它的模与方向规定如下:

(1) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$.

(2)当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同;当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反;当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量.

向量与数的乘法满足下列运算律:

对于任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和任意实数 λ,总有

(1) $1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$.

(2) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

(3) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

(4) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

它们可以用定义 1 及定义 2 验证,这里从略.

对于非零向量 $\boldsymbol{a}$,取 $\lambda=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}$,则向量 $\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量,记为 $\boldsymbol{a}^{\circ}$. 即有

$$\boldsymbol{a}^{\circ}=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}.$$

由定义 2 知,如果 $\lambda\boldsymbol{a}=0$,则 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=0$. 由于向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行,因此常用向量与数的乘积来说明两个向量的平行关系. 即有

定理 1 设向量 $\boldsymbol{a}\neq 0$,那么向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是:存在惟一的实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证 条件的充分性是显然的,下面证明条件的必要性.

若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向,则 $\boldsymbol{b}^{\circ}=\boldsymbol{a}^{\circ}$,从而有

$$\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{b}^{\circ}=|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}^{\circ}=|\boldsymbol{b}|\cdot(|\boldsymbol{a}|^{-1}\boldsymbol{a})=(|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|^{-1})\boldsymbol{a},$$

取 $\lambda=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|^{-1}$,即得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向,证明类似. 下面再证明 λ 的惟一性.

假如 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}=\mu\boldsymbol{a}$,则$(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=0$,因为 $\boldsymbol{a}\neq0$,所以 $\lambda-\mu=0$,即 $\lambda=\mu$.

例 1 如图 5-7 所示,已知$\triangle ABC$ 及一点 O,试证:点 O 是$\triangle ABC$ 的重心的充要条件是$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=0$.

证 【必要性】 设点 O 是$\triangle ABC$ 的重心,P,Q,R 分别是三边 BC,CA,AB 的中点,则

$$\overrightarrow{OA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PA}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BA})=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}.$$

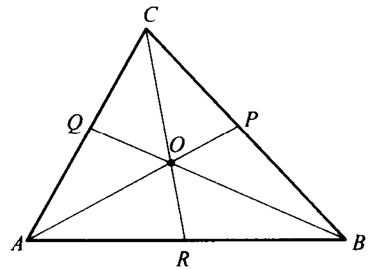

图 5-7

同理得到

$$\overrightarrow{OB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CB},$$
$$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

于是有

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA})+\frac{2}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC})$$
$$=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC}=0.$$

【充分性】 设$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=0$,而$\triangle ABC$ 的重心为点 O^*,则由必要性知$\overrightarrow{O^*A}+\overrightarrow{O^*B}+\overrightarrow{O^*C}=0$.但是

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OO^*}+\overrightarrow{O^*A},\quad \overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OO^*}+\overrightarrow{O^*B},\quad \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OO^*}+\overrightarrow{O^*C},$$

因此

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\,\overrightarrow{OO^*}+\overrightarrow{O^*A}+\overrightarrow{O^*B}+\overrightarrow{O^*C},$$

即有

$$\overrightarrow{OO^*}=0.$$

故点 O 与点 O^* 重合.

三、数轴上的向量

由于单位向量既确定了方向,又确定了单位长度,因此,只要给定一个点及一个单位向量就可确定一数轴.记 Ox 轴上的单位向量为 $\boldsymbol{e}$,原点为 O,则不论点 M(对应坐标为 u)在数轴何处,如图 5-8 所示,由定理 1 知数轴上的向量$\overrightarrow{OM}$可以惟一地表示为$\overrightarrow{OM}=\lambda\boldsymbol{e}$.

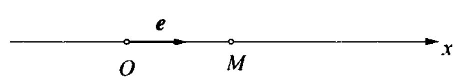

图 5-8

又因 $|u|=|\lambda|=\left|\overrightarrow{OM}\right|$,且当 $\lambda>0$ 时,$\overrightarrow{OM}$与 $\boldsymbol{e}$ 同方向,故 $u>0$,即 $\lambda=u$;而当 $\lambda<0$ 时,$\overrightarrow{OM}$与 $\boldsymbol{e}$ 反方向,从而 $u<0$,也是 $\lambda=u$;当点 M 与点 O 重合,$\overrightarrow{OM}=0=0\boldsymbol{e}$.

综上所述,不论 M 在数轴上何处,都有

$$\overrightarrow{OM}=u\boldsymbol{e}.$$

这样就建立了数轴 Ox 上的向量 $\overrightarrow{OM}$ 与点 M 的坐标 u 之间的一一对应关系.

进一步，如果 M_1, M_2 是 Ox 轴上坐标依次为 u_1, u_2 的两个点，那么数轴上的向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 可以惟一地表示为

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(u_2-u_1)\boldsymbol{e}.$$

事实上，因为 $\overrightarrow{OM_1}=u_1\boldsymbol{e}$，$\overrightarrow{OM_2}=u_2\boldsymbol{e}$，而 $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}$，于是 $\overrightarrow{M_1M_2}=u_2\boldsymbol{e}-u_1\boldsymbol{e}=(u_2-u_1)\boldsymbol{e}$.

这表明在数轴上有可能使复杂的向量的几何运算转化为简单的代数运算.

习题 5-1

1. 用向量法证明梯形两腰中点连线平行于上、下底且等于它们长度和的一半.
2. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$. 试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.
3. 在△ABC 中，点 D,E 分别在边 BC 与 CA 上，且 $BD=\frac{1}{3}BC$，$CE=\frac{1}{3}CA$，AD 与 BE 交于 R. 试证：$RD=\frac{1}{7}AD$，$RE=\frac{4}{7}BE$.
4. 把△ABC 的 BC 边五等分，设分点依次为 D_1,D_2,D_3,D_4，再把各分点与点 A 连接. 试以 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$ 表示向量 $\overrightarrow{D_1A}$，$\overrightarrow{D_2A}$，$\overrightarrow{D_3A}$ 和 $\overrightarrow{D_4A}$.

第二节　点的坐标与向量的坐标

向量法的优点在于比较直观，但是向量的几何运算不如数的代数运算简洁. 在第一节中已经看到数轴上的向量的几何运算可以转化为简单的代数运算，本节利用坐标方法把空间中的向量的几何运算代数化.

一、空间直角坐标系

过空间一个定点 O，作三条互相垂直的数轴，这三条轴分别叫做 x **轴**(横轴)、y **轴**(纵轴)和 z **轴**(竖轴). 它们适合：

(1)都以 O 为原点；

(2)有相同的单位长；

(3)Ox,Oy,Oz 轴的正向成右手系，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从 x 轴正向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴正向时，大拇指的指向就是 z 轴的正向，如图 5-9 所示.

这样的三条坐标轴就组成了一个**空间直角坐标系**，称为 $O-xyz$ 坐标系. 点 O 叫做**坐标原点**(简称原点).

三条坐标轴中的任意两条确定的平面称为**坐标面**. x 轴与 y 轴所确定的坐标面叫做 xOy **面**，y 轴与 z 轴和 z 轴与 x 轴所确定的坐标面，分别叫做 yOz **面**和 zOx **面**. 习惯上将

xOy 面置于水平面的位置.三个坐标面将空间分成八个部分,每一部分叫做一个**卦限**.以正的 x 轴、正的 y 轴及正的 z 轴为棱的卦限叫做第一卦限;以负的 x 轴、正的 y 轴及正的 z 轴为棱的卦限叫做第二卦限;以负的 x 轴、负的 y 轴及正的 z 轴为棱的卦限叫做第三卦限;以正的 x 轴、负的 y 轴及正的 z 轴为棱的卦限叫做第四卦限.而第一、二、三、四卦限的下面依次为第五、六、七、八卦限.这八个卦限分别用字母Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ表示,如图 5-10 所示.

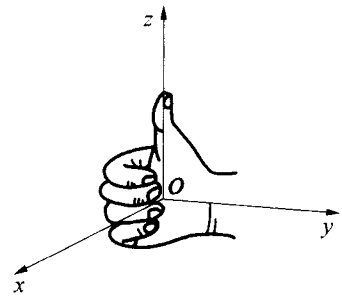

图 5-9

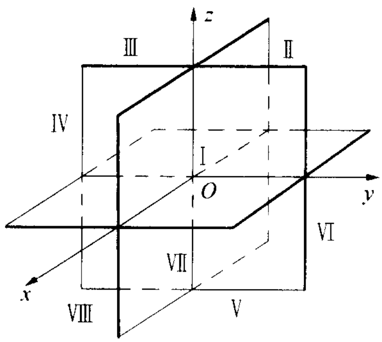

图 5-10

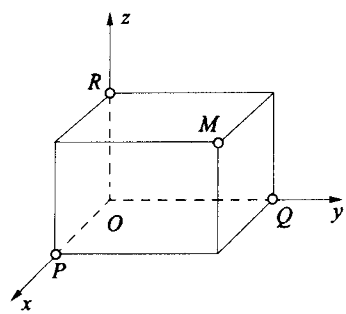

图 5-11

设 M 为空间一定点,过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴,它们与 x 轴、y 轴、z 轴的交点依次为 P,Q,R.点 P,Q,R 分别称为点 M 在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影点.这三点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标依次为 x,y,z,于是空间的一点 M 就惟一地确定了一个有序数组 x,y,z.

反过来,对于给定的有序数组 x,y,z,可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P,在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q,在 z 轴上取坐标为 z 的点 R,然后过点 P,Q,R 分别作垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的三个平面,这三个平面的交点 M 便是由有序数组 x,y,z 确定的惟一的点,如图 5-11 所示.

这样就建立了空间的点 M 和有序数组 x,y,z 之间的一一对应关系.这组数 x,y,z 称为点 M 的**空间直角坐标**,并依次称 x,y,z 为点 M 的**横坐标**、**纵坐标**和**竖坐标**.把点 M 记为 $M(x,y,z)$.

二、向量的坐标

在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中,分别以 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 记与 x 轴、y 轴、z 轴的正向同方向的单位向量.任给向量 $\boldsymbol{a}$,有对应点 M,使得 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$.以 OM 为对角线、三条坐标轴为棱作长方

体 $RHMK-OPNQ$，如图 5－12 所示，则点 M 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影点分别为 P,Q 和 R. 设 P,Q,R 在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标分别为 a_x，a_y,a_z（即点 M 的坐标为 (a_x,a_y,a_z)），则由数轴上的向量的表示知，$\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ},\overrightarrow{OR}$ 可以惟一地表示为

$$\overrightarrow{OP}=a_x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{OQ}=a_y\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{OR}=a_z\boldsymbol{k}.$$

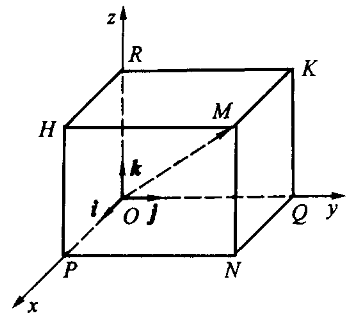

图 5－12

而按向量的加法有

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR},$$

因此
$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}.$$

上式称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**坐标分解式**，$a_x\boldsymbol{i},a_y\boldsymbol{j},a_z\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 沿三个坐标轴方向的**分向量**.

给定向量 $\boldsymbol{a}$，由 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}$ 就确定了点 M 及数轴上的向量 $\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ},\overrightarrow{OR}$（三个分向量），进而确定了有序数组 a_x,a_y,a_z；反之，给定了有序数组 a_x,a_y,a_z，由 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ 就确定了向量 $\boldsymbol{a}$. 于是，向量 $\boldsymbol{a}$ 与有序数组 a_x,a_y,a_z 之间有一一对应关系. 把有序数组 a_x,a_y,a_z 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，记为 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$.

空间任意一点 $M(x,y,z)$，都对应一个向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$（点 O 为原点），称为点 M 的**向径**. 由向量坐标的定义知，$\boldsymbol{r}=\{x,y,z\}$.

三、向量线性运算的坐标表示

引入了向量的坐标后，就可以把向量的几何运算化为向量坐标的代数运算.

设
$$\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\},\quad \boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}.$$
即
$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}.$$
由向量的加法运算与向量的数乘运算规律，有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k},$$
$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k},$$
即
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z\},$$
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\{a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z\},$$
$$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}.$$

有了向量的坐标表示，可以从第一节的定理 1 得到，当向量 $\boldsymbol{a}\neq 0$ 时，向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于向量 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件为向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 对应的坐标成比例，即

$$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}{}^{*} \tag{1}$$

注 *：为了整齐易记，我们约定，如果连比式有一个分母等于 0，应理解为它的分子也为 0.