高中数学学习导引

下册

Gaozhong Xuexi Daoyin

原子能出版社

梁寿山 蒋佩锦 叶克琪 邵琰明 编著

高中数学学习导引

（下册）

梁寿山　蒋佩锦
叶克琪　邵瑛明　编著

北京市东城区教育局中学教研室　审订

原子能出版社

高中数学学习导引

（下册）

梁寿山　　蒋佩锦
叶克琪　　邵琰明　编著

北京市东城区教育局中学教研室　审订

原子能出版社出版

（北京2108信箱）

外文印刷厂印刷

（北京顺义牛栏山一中印刷厂排版）

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

☆

开本 787×1092 1/32 ·印张 9.625 ·字数 210 千字

1986年 12月北京第一版·1986年 12月北京第一次印刷

印数 1—30700·统一书号： 7175·739

定价：1.60元

目　　录

第四编 平面解析几何

第一讲 曲线和方程

一、基础知识

解析几何是以坐标法为工具，使几何图形与代数式结合起来，为用代数方法研究几何图形的性质奠定基础.

本章的基础知识是在直角坐标系中，各类几何元素量的代数化. 即最简单的几何元素点和一对有序实数建立一一对应关系，又把线段的长度、角度以及图形的面积等几何量通过点的坐标建立起计算公式. 这就为用代数方法研究几何图形作好准备.

本章的重点是曲线和方程的辩证关系. 由于点的坐标和点的一一对应，点的位置变化了，点的坐标也相应地变化，即点的变化规律可以用它的坐标的变化规律来描述. 我们把曲线看作是满足某种条件点的集合，曲线的方程则是曲线上的点的坐标间相互关系的表达式. 这就为用数或式来精确反映图形，以形来深刻解释数或式开辟了途径

本章的主要内容是

1. 轴上有向线段AB的数量

$$AB = x_B - x_A$$

其中 x_A，x_B 分别是A，B两点在 x 轴上的坐标。

2．平面上两点间的距离

平面上两点$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$间的距离

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

3．线段的定比分点

已知点$P_1(x_1, y_1)$和$P_2(x_2, y_2)$，点P分有向线段P_1P_2所成的定比$\lambda = \frac{P_1P}{PP_2}$（$\lambda \neq -1$），则点$P$的坐标是

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

当$\lambda > 0$时，P点在线段P_1P_2上，P为内分点；当$\lambda < 0$且$\lambda \neq 1$时，P点在P_1P_2或P_2P_1的延长线上，P为外分点；当$\lambda = 1$时，P为P_1P_2的中点．它的坐标是

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

4．直线的倾角和斜率

一条直线向上的方向和x轴正方向所成的最小正角，叫做这条直线的倾角，当直线和x轴平行，规定它的倾角为0。于是直线的倾角α的范围是$[0, \pi)$。

一条直线的倾角α的正切叫做这条直线的斜率．一条直线的倾角为$\frac{\pi}{2}$时，它的斜率不存在．已知直线上任意两点$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，它的倾角$\alpha \neq \frac{\pi}{2}$，则直线的斜率$k$的计算公式是

$$k=\operatorname{tg}\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

5．三角形的面积

以$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$为顶点的$\triangle ABC$的面积是

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\text{的绝对值.}$$

6．曲线和方程

如果二元方程$F(x, y)=0$和平面上曲线C之间有如下关系：

（1）曲线C上所有的点的坐标都适合方程$F(x, y)=0$；

（2）坐标适合方程$F(x, y)=0$的点都在曲线C上．

这时，我们称方程$F(x, y)=0$是曲线C的方程，称曲线C是方程$F(x, y)=0$的曲线．

7．曲线和方程的两个基本问题

（1）　由曲线求它的方程（参看第五章轨迹方程的求法）．

（2）　由方程画它的曲线

先根据方程讨论曲线的存在范围、对称性和截距，然后列出x和y的对应值表，描点，顺次光滑连线，得出方程的曲线．

8．两曲线的交点

若两条曲线C_1和C_2的方程分别是$f(x, y)=0$和g

$(x, y)=0$. 则它们交点的坐标必为方程组

$$\begin{cases} f(x, y)=0 \\ g(x, y)=0 \end{cases}$$

的实数解. 并且这个方程组的每一个实数解，都应是 C_1 和 C_2的一个交点的坐标.如果方程组没有实数解 则两条曲线不相交.

如果两曲线 $f(x,y)=0$，$g(x,y)=0$相交，则将两方程施行同解变换得到的方程所代表的曲线必代表交点所在的曲线.

若方程$F(x, y)=f_1(x,y)f_2(x, y)\cdots f_n(x,y)=0$，则方程 $F(x, y)=0$ 所代表的曲线，是曲线 $f_1(x, y)=0$，$f_2(x, y)=0,\cdots,f_n(x, y)=0$ 在共同取值范围内的全体.

二、 基本训练

通过本章练习，要熟练掌握各类基本几何量的代数表示式，理解方程与曲线的关系.即方程或代数式变形的几何意义，曲线的代数表示.

练 习 4-1

1. 设 P、A、B、C 是同一条直线上的任意四点。
   求证：$PA\cdot BC+PB\cdot CA+PC\cdot AB=0$
2. 确定以下列各点为顶点的三角形的类型：
   (1)　$A(4, 4)$、$B(-4, -4)$，$C(4\sqrt{3},-4\sqrt{3})$；
   (2)　$A(-2, 1)$，$B(4, 8)$，$C(10, 6)$；

（3） $A(-3, 4)$，$B(3, -4)$，$C(1, 7)$；

（4） $A(-3, 4)$，$B(4, 3)$，$C(3, -4)$.

3．将P_1P_2延长至P，使得$4|PP_2|=|PP_1|$，已知$P_1(-1, -6)$，$P_2(3, 0)$，求P点的坐标.

4．已知$A(9, 10)$、$B(3, -4)$，求线段AB的两个三等分点的坐标.

5．求经过下列每两个点的直线的斜率和倾角：

（1） $A(2, -1)$，$B(5, 4)$；

（2）$A(-3, 1)$，$B(-3, 5)$；

（3） $A(0, 0)$，$B(-\sqrt{3}, 1)$；

（4） $A(1, 2)$，$B(-3, 4)$，

6．已知$\triangle ABC$的三顶点$A(2, 2)$，$B(-5, 1)$，$C(3, 5)$

（1） 求它的重心的坐标；

（2） 求它的外心的坐标；

（3） 求它的面积；

（4） 求BC边上的高线长.

7．判断下列三点是否在一条直线上：

（1） $(3, 1)$，$(-2, -9)$，$(8, 11)$；

（2） $(0, 2)$，$(-1, 5)$，$(3, 4)$.

8． 画出下列方程表示的曲线：

（1） $x^2-y^2=0$；

（2） $|2x-1|-|y+1|=0$；

（3） $x^2+y^2=4$ $(x\geqslant 0)$

（4） $x^3-y^3=0$.

9． 求下列各组曲线的交点

（1） $x^2+y^2-5=0$ 和 $2x-y-5=0$；

(2) $x^2+y^2-5=0$ 和 $2x-y-3=0$；

(3) $x^2+y^2-5=0$ 和 $2x-y-7=0$.

10. 已知点$P(-2, 1)$，那么经过P点的所有直线中分别具备什么条件时，才和下列每一条曲线C有一个公共点；有两个相同的公共点；有两个相异的公共点；没有公共点。

(1) 曲线C的方程为 $x^2+y^2=4$；

(2) 曲线C的方程为 $y^2=x+1$.

11. 讨论下列曲线关于坐标轴的对称性和范围.

(1) $x^2-4y^2+8y+12=0$；

(2) $4x^2+9y^2+16x-18y-11=0$.

12. 已知$A(-2, 0)$，$B(4, 0)$，$C(3, 5)$，在$\triangle ABC$内部求一点P，使得$\triangle PAB$、$\triangle PBC$、$\triangle PAC$面积相等.

练习 4－1 答案

1. 在直线上任选一点，比方P为原点建立直线坐标系，利用$AB=x_B-x_A$来计算.

2. (1) 等边三角形； (2) 钝角三角形； (3) 直角三角形； (4) 等腰直角三角形.

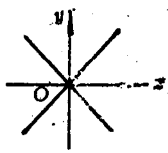
3. $(4\frac{1}{3}, 2)$. 4. $(7, 5\frac{1}{3})$， $(5, \frac{2}{3})$.

5. (1) $k_{AB}=\frac{5}{3}$，倾角$\alpha=\mathrm{arctg}\frac{5}{3}$； (2) k_{AB}不存在，倾角$\alpha=\frac{\pi}{2}$； (3) $k_{AB}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，倾角$\alpha=\frac{5\pi}{6}$；

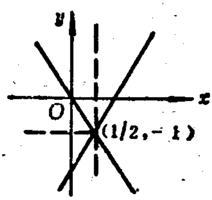
(4) $k_{AB}=-\frac{1}{2}$，倾角$\alpha=\pi-\mathrm{arctg}\frac{1}{2}$.

6．（1）$\left(0,\ 2\frac{2}{3}\right)$；（2）$(-2,\ 5)$；（3）10；（4）$\sqrt{5}$．　7．（1）在一条直线上；（2）不在一条直线上．

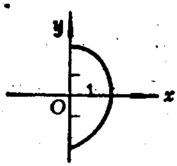
8．



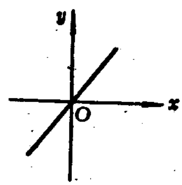
（1）



（2）



（3）



（4）

9．（1）$(2,\ -1)$；　（2）$(2,\ 1)$和$\left(\frac{2}{5}, -2\frac{1}{5}\right)$；

（3）无公共点．

10．（1）过$(-2,\ 1)$的直线中，没有直线和c只有一个公共点；直线$x+2=0$，$3x-4y+10=0$和c有两个相重合的公共点；经过$(-2,\ 1)$且斜率小于3/4的直线都和c有两个不同的交点，斜率大于$\frac{3}{4}$时无交点．

（2）过$(-2,\ 1)$的直线斜率为k，$k=0$时，有

一个公共点，$k=\frac{-1\pm\sqrt{2}}{2}$时有两个重合的公共点，

$\frac{-1-\sqrt{2}}{2}<k<\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$时，有两个相异的公共点，

$k<\frac{-1-\sqrt{2}}{2}$或$k>\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$时，无公共点。

11．（1） 关于y轴对称，$y\leqslant-1$和$y\geqslant3$．

（2） 和坐标轴不对称，$-5\leqslant x\leqslant1$，$-1\leqslant y\leqslant3$．

12．$\left(\frac{5}{3},\ \frac{5}{3}\right)$．

三、 综合训练

例1 $\triangle ABC$的顶点为$A(-16,\ 0)$ $B(9,\ 0)$，$C(0,\ 12)$求$\angle ACB$内角平分线的长．

分析：设$\angle ACB$内角平分线为CD，则D分AB为定比，可由$|AC|:|BC|$及A、B坐标计算D的坐标．

解：如图4－1－1

$|AC|=\sqrt{16^2+12^2}=20$，

$|BC|=\sqrt{12^2+9^2}=15$．

在$\triangle ABC$中，由于CD平分$\angle ACB$，则

$$\frac{|AD|}{|DB|}=\frac{|AC|}{|CB|}=\frac{20}{15}=\frac{4}{3}$$

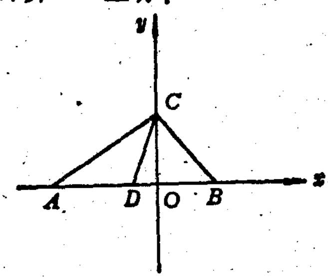


图 4-1-1