

高中数学 学习导引

下 册

原子能出版社

Gaozhong Xuexi Daoyin



梁寿山 蒋佩锦 叶克琪 邵琰明 编著

高中数学学习导引

(下册)

梁寿山 蒋佩锦 编著
叶克琪 邵琰明

北京市东城区教育局中学教研室 审订

原子能出版社

高中数学学习导引

(下册)

梁寿山 蒋佩锦 编著
叶克琪 邵琰明

北京市东城区教育局中学教研室 审订

原子能出版社出版

(北京 2108 信箱)

外文印刷厂印刷

(北京顺义牛栏山一中印刷厂排版)

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

☆

开本 787×1092 1/32 ·印张 9.625 ·字数 210 千字

1986 年 12 月北京第一版·1986 年 12 月北京第一次印刷

印数 1—30700 ·统一书号: 7175·739

定价: 1.60 元

目 录

第四编 平面解析几何	(1)
------------------	-------

第一讲 曲线和方程	(1)
-----------------	-------

一、基础知识	(1)
--------------	-------

二、基本训练	(4)
--------------	-------

练习 4-1	(4)
--------------	-------

练习 4-1 答案	(6)
-----------------	-------

三、综合训练	(8)
--------------	-------

习题 4-1	(14)
--------------	--------

四、自我检查题 4-1	(16)
-------------------	--------

第二讲 直线和圆	(13)
----------------	--------

一、基础知识	(13)
--------------	--------

(一) 直线的方程	(13)
-----------------	--------

(二) 圆的方程	(20)
----------------	--------

二、基本训练	(21)
--------------	--------

练习 4-2	(22)
--------------	--------

练习 4-2 答案	(24)
-----------------	--------

三、综合训练	(25)
--------------	--------

习题 4-2	(53)
--------------	--------

四、自我检查题 4-2	(56)
-------------------	--------

第三讲 椭圆、双曲线、抛物线	(58)
----------------------	--------

一、基础知识	(58)
--------------	--------

(一) 椭圆、双曲线、抛物线的定义、标准方程及几何性质	(59)
-----------------------------------	--------

(二) 椭圆、双曲线和抛物线的统一定义	(62)
---------------------------	--------

(三) 圆锥曲线	(62)
----------------	--------

二、基本训练	(63)
练习 4-3	(63)
练习 4-3 答案	(65)
三、综合训练	(68)
习题 4-3	(91)
四、自我检查题 4-3	(94)
第四讲 极坐标与参数方程	(96)
一、基础知识	(96)
(一)极坐标	(96)
(二)参数方程	(100)
二、基本训练	(104)
练习 4-4	(104)
练习 4-4 答案	(108)
三、综合训练	(111)
习题 4-4	(128)
四、自我检查题 4-4	(131)
第五讲 轨迹方程的求法和坐标法证明几何题	(133)
一、基础知识	(133)
(一)轨迹和轨迹方程	(133)
(二)坐标法证几何题	(134)
二、基本训练	(134)
练习 4-5	(134)
练习 4-5 答案	(135)
三、综合训练	(136)
习题 4-5	(155)
四、自我检查题 4-5	(158)
习题及自我检查题答案	(160)
习题 4-1	(160)

自我检查题 4-1	(161)
习题 4-2	(163)
自我检查题 4-2	(165)
习题 4-3	(166)
自我检查题 4-3	(171)
习题 4-4	(173)
自我检查题 4-4	(176)
习题 4-5	(177)
自我检查题 4-5	(179)
第五编 行列式与线性方程组	(181)
第一讲 行列式	(181)
一、基础知识	(181)
(一)二阶行列式及三阶行列式	(181)
(二)行列式的性质	(182)
(三)余子式及代数余子式	(183)
(四)按一行(或一列)展开三阶行列式	(184)
二、基本训练	(185)
练习 5-1	(185)
练习 5-1 答案	(188)
三、综合训练	(189)
习题 5-1	(192)
四、自我检查题 5-1	(194)
第二讲 线性方程组	(196)
一、基础知识	(196)
(一)线性方程和线性方程组	(196)
(二)方程组的一个解及方程组的解集	(196)
(三)方程组的系数行列式	(196)
(四)线性方程组的行列式解法	(197)
二、基本训练	(198)

练习 5-2	(198)
练习 5-2 答案	(200)
三、综合训练	(202)
习题 5-2	(205)
四、自我检查题 5-2	(207)
习题及自我检查题答案	(208)
习题 5-1	(208)
自我检查题 5-1	(209)
习题 5-2	(211)
自我检查题 5-2	(212)
第六编 微积分初步	(214)
第一讲 极限	(214)
一、基础知识	(214)
(一) 当 $x \rightarrow \infty$ 时函数的极限	(214)
(二) 当 $x \rightarrow x_0$ 时函数的极限	(214)
(三) 函数的左极限和右极限	(214)
(四) 函数的极限、左极限和右极限的关系	(215)
(五) 函数极限的四则运算法则	(215)
(六) 函数的连续性	(216)
(七) 复合函数的连续性	(217)
(八) 初等函数	(217)
(九) 初等函数的连续性	(217)
(十) 两个重要的极限	(218)
二、基本训练	(218)
练习 6-1	(218)
练习 6-1 答案	(219)
三、综合训练	(220)
习题 6-1	(222)

四、自我检查题 6-1	(224)
第二讲 导数、微分及其应用	(226)
一、基础知识	(223)
(一) 导数的概念	(226)
(二) 求导方法	(229)
(三) 微分概念	(232)
(四) 导数和微分的应用	(234)
二、基本训练	(235)
练习 6-2	(235)
练习 6-2 答案	(237)
三、综合训练	(239)
习题 6-2	(248)
四、自我检查题 6-2	(247)
第三讲 不定积分、定积分及其应用	(249)
一、基础知识	(249)
(一) 不定积分	(249)
(二) 定积分	(254)
二、基本训练	(259)
练习 6-3	(259)
练习 6-3 答案	(261)
三、综合训练	(263)
习题 6-3	(267)
四、自我检查题 6-3	(269)
习题及自我检查题答案	(271)
习题 6-1	(271)
自我检查题 6-1	(272)
习题 6-2	(274)
自我检查题 6-2	(274)

习题 6-3	(276)
自我检查题 6-3	(277)
第七编 概 率	(278)
一、基础知识	(278)
(一) 随机事件及其概率的意义	(278)
(二) 等可能事件及其概率的意义	(279)
(三) 互斥事件、对立事件	(279)
(四) 相互独立事件及其同时发生的概率	(280)
(五) 独立重复试验	(280)
二、基本训练	(281)
练习 7-1	(281)
练习 7-1 答案	(283)
三、综合训练	(284)
习题 7-1	(292)
四、自我检查题 7-1	(293)
习题及自我检查题答案	(296)
习题 7-1	(296)
自我检查题 7-1	(297)

第四编 平面解析几何

第一讲 曲线和方程

一、基础知识

解析几何是以坐标法为工具，使几何图形与代数式结合起来，为用代数方法研究几何图形的性质奠定基础。

本章的基础知识是在直角坐标系中，各类几何元素量的代数化。即最简单的几何元素点和一对有序实数建立一一对应关系，又把线段的长度、角度以及图形的面积等几何量通过点的坐标建立起计算公式。这就为用代数方法研究几何图形作好准备。

本章的重点是曲线和方程的辩证关系。由于点的坐标和点的一一对应，点的位置变化了，点的坐标也相应地变化，即点的变化规律可以用它的坐标的变化规律来描述。我们把曲线看作是满足某种条件点的集合，曲线的方程则是曲线上的点的坐标间相互关系的表达式。这就为用数或式来精确反映图形，以形来深刻解释数或式开辟了途径。

本章的主要内容是

1. 轴上有向线段 AB 的数量

$$AB = x_B - x_A$$

其中 x_A , x_B 分别是 A , B 两点在 x 轴上的坐标.

2. 平面上两点间的距离

平面上两点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ 间的距离

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

3. 线段的定比分点

已知点 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$, 点 P 分有向线段 P_1P_2 所成的定比 $\lambda = \frac{P_1P}{PP_2}$ ($\lambda \neq -1$), 则点 P 的坐标是

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

当 $\lambda > 0$ 时, P 点在线段 P_1P_2 上, P 为内分点; 当 $\lambda < 0$ 且 $\lambda \neq -1$ 时, P 点在 P_1P_2 或 P_2P_1 的延长线上, P 为外分点; 当 $\lambda = 1$ 时, P 为 P_1P_2 的中点. 它的坐标是

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

4. 直线的倾角和斜率

一条直线向上的方向和 x 轴正方向所成的最小正角, 叫做这条直线的倾角, 当直线和 x 轴平行, 规定它的倾角为 0 . 于是直线的倾角 α 的范围是 $[0, \pi)$.

一条直线的倾角 α 的正切叫做这条直线的斜率. 一条直线的倾角为 $\frac{\pi}{2}$ 时, 它的斜率不存在. 已知直线上任意两点

$P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, 它的倾角 $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, 则直线的斜率 k 的计算公式是

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

5. 三角形的面积

以 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ 为顶点的 $\triangle ABC$ 的面积是

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ 的绝对值.}$$

6. 曲线和方程

如果二元方程 $F(x, y) = 0$ 和平面上曲线 C 之间有如下关系:

(1) 曲线 C 上所有的点的坐标都适合方程 $F(x, y) = 0$;

(2) 坐标适合方程 $F(x, y) = 0$ 的点都在曲线 C 上.

这时, 我们称方程 $F(x, y) = 0$ 是曲线 C 的方程, 称曲线 C 是方程 $F(x, y) = 0$ 的曲线.

7. 曲线和方程的两个基本问题

(1) 由曲线求它的方程 (参看第五章轨迹方程的求法).

(2) 由方程画它的曲线

先根据方程讨论曲线的存在范围、对称性和截距, 然后列出 x 和 y 的对应值表, 描点, 顺次光滑连线, 得出方程的曲线.

8. 两曲线的交点

若两条曲线 C_1 和 C_2 的方程分别是 $f(x, y) = 0$ 和 g

$(x, y) = 0$. 则它们交点的坐标必为方程组

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

的实数解. 并且这个方程组的每一个实数解, 都应是 C_1 和 C_2 的一个交点的坐标. 如果方程组没有实数解, 则两条曲线不相交.

如果两曲线 $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ 相交, 则将两方程施行同解变换得到的方程所代表的曲线必代表交点所在的曲线.

若方程 $F(x, y) = f_1(x, y)f_2(x, y)\cdots f_n(x, y) = 0$, 则方程 $F(x, y) = 0$ 所代表的曲线, 是曲线 $f_1(x, y) = 0, f_2(x, y) = 0, \dots, f_n(x, y) = 0$ 在共同取值范围内的全体.

二、基本训练

通过本章练习, 要熟练掌握各类基本几何量的代数表示式, 理解方程与曲线的关系, 即方程或代数式变形的几何意义, 曲线的代数表示.

练习 4-1

1. 设 P, A, B, C 是同一条直线上的任意四点.

求证: $PA \cdot BC + PB \cdot CA + PC \cdot AB = 0$

2. 确定以下列各点为顶点的三角形的类型:

(1) $A(4, 4), B(-4, -4), C(4\sqrt{3}, -4\sqrt{3})$;

(2) $A(-2, 1), B(4, 8), C(10, 6)$;

- (3) $A(-3, 4), B(3, -4), C(1, 7)$;
 (4) $A(-3, 4), B(4, 3), C(3, -4)$.
3. 将 P_1P_2 延长至 P , 使得 $4|PP_2| = |PP_1|$, 已知 $P_1(-1, -6), P_2(3, 0)$, 求 P 点的坐标.
4. 已知 $A(9, 10), B(3, -4)$, 求线段 AB 的两个三等分点的坐标.
5. 求经过下列每两个点的直线的斜率和倾角:
 (1) $A(2, -1), B(5, 4)$;
 (2) $A(-3, 1), B(-3, 5)$;
 (3) $A(0, 0), B(-\sqrt{3}, 1)$;
 (4) $A(1, 2), B(-3, 4)$.
6. 已知 $\triangle ABC$ 的三顶点 $A(2, 2), B(-5, 1), C(3, 5)$
 (1) 求它的重心的坐标;
 (2) 求它的外心的坐标;
 (3) 求它的面积;
 (4) 求 BC 边上的高线长.
7. 判断下列三点是否在一条直线上:
 (1) $(3, 1), (-2, -9), (8, 11)$;
 (2) $(0, 2), (-1, 5), (3, 4)$.
8. 画出下列方程表示的曲线:
 (1) $x^2 - y^2 = 0$;
 (2) $|2x - 1| - |y + 1| = 0$;
 (3) $x^2 + y^2 = 4 \quad (x \geq 0)$
 (4) $x^3 - y^3 = 0$.
9. 求下列各组曲线的交点
 (1) $x^2 + y^2 - 5 = 0$ 和 $2x - y - 5 = 0$;

$$(2) \quad x^2 + y^2 - 5 = 0 \quad \text{和} \quad 2x - y - 3 = 0;$$

$$(3) \quad x^2 + y^2 - 5 = 0 \quad \text{和} \quad 2x - y - 7 = 0.$$

10. 已知点 $P(-2, 1)$, 那么经过 P 点的所有直线中分别具备什么条件时, 才和下列每一条曲线 C 有一个公共点; 有两个相同的公共点; 有两个相异的公共点; 没有公共点.

$$(1) \quad \text{曲线 } C \text{ 的方程为 } x^2 + y^2 = 4;$$

$$(2) \quad \text{曲线 } C \text{ 的方程为 } y^2 = x + 1.$$

11. 讨论下列曲线关于坐标轴的对称性和范围.

$$(1) \quad x^2 - 4y^2 + 8y + 12 = 0;$$

$$(2) \quad 4x^2 + 9y^2 + 16x - 18y - 11 = 0.$$

12. 已知 $A(-2, 0)$, $B(4, 0)$, $C(3, 5)$, 在 $\triangle ABC$ 内部求一点 P , 使得 $\triangle PAB$ 、 $\triangle PBC$ 、 $\triangle PAC$ 面积相等.

练习 4-1 答案

1. 在直线上任选一点, 比方 P 为原点建立直线坐标系, 利用 $AB = x_B - x_A$ 来计算.

2. (1) 等边三角形; (2) 钝角三角形; (3) 直角三角形; (4) 等腰直角三角形.

$$3. (4\frac{1}{3}, 2). \quad 4. (7, 5\frac{1}{3}), \quad (5, \frac{2}{3}).$$

$$5. (1) k_{AB} = \frac{5}{3}, \text{ 倾角 } \alpha = \arctg \frac{5}{3}; \quad (2) k_{AB} \text{ 不存在,}$$

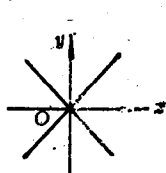
$$\text{倾角 } \alpha = \frac{\pi}{2}; \quad (3) k_{AB} = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 倾角 } \alpha = \frac{5\pi}{6};$$

$$(4) k_{AB} = -\frac{1}{2}, \text{ 倾角 } \alpha = \pi - \arctg \frac{1}{2}.$$

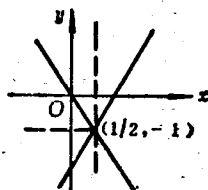
6. (1) $(0, 2\frac{2}{3})$; (2) $(-2, 5)$; (3) 10;

(4) $\sqrt{5}$. 7. (1) 在一条直线上; (2) 不在一条直线上.

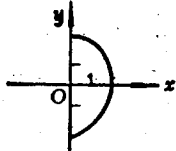
8.



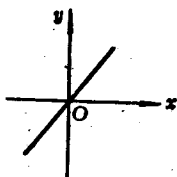
(1)



(2)



(3)



(4)

9. (1) $(2, -1)$; (2) $(2, 1)$ 和 $(\frac{2}{5}, -2\frac{1}{5})$;

(3) 无公共点.

10. (1) 过 $(-2, 1)$ 的直线中, 没有直线和 c 只有一个公共点; 直线 $x+2=0$, $3x-4y+10=0$ 和 c 有两个相重合的公共点; 经过 $(-2, 1)$ 且斜率小于 $\frac{3}{4}$ 的直线都和 c 有两个不同的交点, 斜率大于 $\frac{3}{4}$ 时无交点.

(2) 过 $(-2, 1)$ 的直线斜率为 k , $k=0$ 时, 有

一个公共点, $k = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$ 时有两个重合的公共点,

$\frac{-1 - \sqrt{2}}{2} < k < \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}$ 时, 有两个相异的公共点,

$k < \frac{-1 - \sqrt{2}}{2}$ 或 $k > \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}$ 时, 无公共点.

11. (1) 关于 y 轴对称, $y \leq -1$ 和 $y \geq 3$.

(2) 和坐标轴不对称, $-5 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 3$.

12. $(\frac{5}{3}, \frac{5}{3})$.

三、综合训练

例1 $\triangle ABC$ 的顶点为 $A(-16, 0)$ $B(9, 0)$, $C(0, 12)$ 求 $\angle ACB$ 内角平分线的长.

分析: 设 $\angle ACB$ 内角平分线为 CD , 则 D 分 AB 为定比, 可由 $|AC| : |BC|$ 及 A 、 B 坐标计算 D 的坐标.

解: 如图 4-1-1

$$|AC| = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20,$$

$$|BC| = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15.$$

在 $\triangle ABC$ 中, 由于 CD 平分 $\angle ACB$, 则

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|CB|} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$$

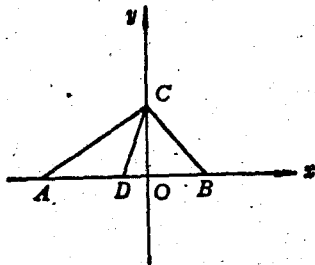


图 4-1-1