普通高等教育"十五"国家级规划教材

（高职高专教育）

高等数学

第二版

侯风波　主编

高等教育出版社

普通高等教育“十五”国家级规划教材
（高职高专教育）

高　等　数　学

第二版

侯风波　主编
张学奇　孟庆才　薛桂兰　乐美龙　编

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材，也是教育部高职高专规划教材。本书第二版是在充分研究当前我国高职高专大众化发展趋势下的教育现状，认真总结、分析、吸收全国高职高专院校高等数学教学改革的经验，在第一版的基础上修改成的。这次修改从高职高专教育人才培养目标出发，在保证本书第一版的特色的前提下，适度降低了难度，调整了例题、习题的配置，加大了每节后思考题与习作题的分量，以保证对基本知识点的训练与掌握，将原分散于各章的 Mathematica 软件包内容集中在一起放在最后一章讲授，以便于教师在教学实践中根据教学条件进行取舍。内容包括函数、极限与连续、导数与微分、一元函数微分学的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、常微分方程、向量与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、级数、数值计算初步、符号计算系统 Mathematica 及其应用。书后附有初等数学常用公式、常用平面曲线及其方程、习题答案与提示。本书特别注意培养学生用数学概念、思想、方法消化吸收工程概念、工程原理的能力，把实际问题转化为数学模型的能力，利用计算机求解数学模型的能力。

与本书配套的辅助教材有《高等数学训练教程(第二版)》,《高等数学练习册》，电子教材有《高等数学电子教案》(赠送)、《高等数学学习系统》和《高等数学助学课件》。

本书可作为高职高专工科各专业通用数学教材，也可作为工程技术人员的高等数学知识更新教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/侯风波主编. —2 版.—北京：高等教育出版社，2003.8 (2004 重印)

ISBN 7-04-012397-5

Ⅰ.高… Ⅱ.侯… Ⅲ.高等数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 022275 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
排　　版	高等教育出版社照排中心		
印　　刷	北京乾洋印刷有限公司		
		版　　次	2000 年 8 月第 1 版
开　　本	787×1092　1/16		2003 年 8 月第 2 版
印　　张	22	印　　次	2004 年 5 月第 2 次印刷
字　　数	530 000	定　　价	29.90 元(含光盘)

出版说明

为加强高职高专教育的教材建设工作，2000年教育部高等教育司颁发了《关于加强高职高专教育教材建设的若干意见》（教高司[2000]19号），提出了“力争经过5年的努力，编写、出版500本左右高职高专教育规划教材”的目标，并将高职高专教育规划教材的建设工作分为两步实施：先用2至3年时间，在继承原有教材建设成果的基础上，充分汲取近年来高职高专院校在探索培养高等技术应用性专门人才和教材建设方面取得的成功经验，解决好高职高专教育教材的有无问题；然后，再用2至3年的时间，在实施《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上，推出一批特色鲜明的高质量的高职高专教育教材。根据这一精神，有关院校和出版社从2000年秋季开始，积极组织编写和出版了一批“教育部高职高专规划教材”。这些高职高专规划教材是依据1999年教育部组织制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》（草案）和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》（草案）编写的，随着这些教材的陆续出版，基本上解决了高职高专教材的有无问题，完成了教育部高职高专规划教材建设工作的第一步。

2002年教育部确定了普通高等教育“十五”国家级教材规划选题，将高职高专教育规划教材纳入其中。“十五”国家级规划教材的建设将以“实施精品战略，抓好重点规划”为指导方针，重点抓好公共基础课、专业基础课和专业主干课教材的建设，特别要注意选择一部分原来基础较好的优秀教材进行修订使其逐步形成精品教材；同时还要扩大教材品种，实现教材系列配套，并处理好教材的统一性与多样化、基本教材与辅助教材、文字教材与软件教材的关系，在此基础上形成特色鲜明、一纲多本、优化配套的高职高专教育教材体系。

普通高等教育“十五”国家级规划教材（高职高专教育）适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院、继续教育学院和民办高校使用。

教育部高等教育司

2002年11月30日

第二版前言

高等数学是高职高专院校各专业必修的一门重要的基础课程。它对培养、提高学生的思维素质、创新能力、科学精神、治学态度以及用数学解决实际问题的能力都有着非常重要的作用。高等数学的主要内容是微积分。300多年前，牛顿(Newton)和莱布尼茨(Leibniz)创立了微积分的诸多概念。自那时起微积分无论是在自然科学还是在社会科学，甚至在数学科学自身都发挥了重要的作用，显示出了强大的威力和无穷的魅力。正因为如此，有关微积分的理论研究几个世纪以来吸引了大批数学家为之奋斗，微积分的理论基础已非常坚固，理论体系也已非常完善。微积分的教学也朝着理论体系尽善尽美的方向努力，这就导致了这一课程的定义、规则、技巧越来越多，相比之下其思想、其应用在整个课程中所占的比重越来越少，致使许多学生认为这是一门枯燥无味的课程。可喜的是，现在已有遍布世界各地的许多高等数学教师在致力于改善这一现状。本书就是作者在亲历多年的高等数学教学改革的基础上编写而成的一本高职高专教学用书，第一版出版以后，得到了许多同行教师及学生的使用与厚爱，并于2002年获得了教育部全国普通高等学校优秀教材一等奖，第二版就是在认真研究我国当前高职高专教育大众化发展趋势下的教育现状，充分听取各方面的建议，吸取全国高职高专院校高等数学教学改革经验的基础上，根据《教育部新世纪高职高专教育高等数学课程内容与体系改革与建设》项目的研究成果，按照教育部《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，在第一版的基础上修改而成的。为了广大师生更方便地使用本书，特就有关问题分别向教师和学生谈几个观点。

致教师：

高等数学中每一个重要概念都有其实际背景。从实际问题出发引出概念可激发学生的求知欲，提高教学效果。教师的教学活动表面上以完成教学基本要求(或教学大纲)中所规定的知识点的教学为目标，实质上，结合人才培养目标去思考确定课程的知识、能力、素质的具体培养目标才更有现实意义。高职高专教育以培养应用性人才为教育目标。那么，作为支持高职高专教育应用性人才培养目标的重要基础课程——高等数学课程应该具体培养学生哪些方面的能力？学数学是为了用数学。这是人人都接受的观点。那么，用到哪儿？怎么用？却大相径庭。而诸如高等数学要为学习后继课程服务、要为培养学生的思维能力服务、要为获得新知识服务、要为处理实际工程中的相关问题服务等等均在一定程度上引起了共识。但是，在一定程度上也存在着争议。通过多年的教学研究与实践，我们认识到：高职高专院校的数学教育必须培养如下三方面的能力：一是用数学思想、概念、方法消化吸收工程概念和工程原理的能力；二是把实际问题转化为数学模型的能力；三是求解数学模型的能力。培养用数学思想、概念、方法消化吸收工程概念和工程原理的能力，必须重视数学概念的教学，培养学生把实际问题转化为数学模型的能力，必须重视数学建模训练，培养学生求解数学模型的能力，必须结合数学软件包进行高等数学教学。

另外，数学是最好的思维体操，作为数学教师应有意识地去结合教学内容培养学生的逻辑思维、类比思维、发散思维及联想思维等各种思维能力，帮助他们欣赏数学美，进而，培养学生的创新能力。这些都是我们在教学中努力尝试的。在本书的编写、修订过程中，也试着将这些观点与有关内容适度结合，但做得还远远不够。愿我们在今后的教学实践中共勉。

致学生：

为什么要学习高等数学？高等数学是学习后继课程的基础，是打开科学大门的钥匙，是高科技的核心。数学主要是研究现实世界中数量关系与空间形式的科学。现实世界中，凡是涉及量的大小，量的变化，量与量之间的关系都要用到数学。客观世界中一切实在的物体都有形。因此，宇宙之大，粒子之微，光速之快，……，无处不用到数学。要想实在地学到并掌握专业知识，必须掌握数学。

在学习高等数学过程中，必须特别注意如下4个问题：(1)要认真听课。同一个问题听老师讲懂要比自己看明白容易得多；(2)要善于记笔记。俗话说，好记性不如懒笔头；(3)要认真规范地做作业。这样不但有助于对所学知识的复习巩固，而且还有助于培养训练严谨认真的工作作风；(4)要善于用数学软件包 Mathematica 在计算机上求解数学模型，以训练用数学解决实际问题的能力。

全书内容包括函数、极限与连续；导数与微分、一元函数微分学应用、不定积分、定积分、定积分的应用、常微分方程、向量与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、级数、数值计算初步、符号计算系统 Mathematica 及其应用。书后附有初等数学常用公式、常用平面曲线及其方程、习题答案与提示。本书配套的辅助教材有《高等数学训练教程(第二版)》、《高等数学练习册》，电子教材有《高等数学电子教案》、《高等数学学习系统》和《高等数学助学课件》。

另外，考虑到读者阅读经济管理类书籍的需要，本书还包含了微积分在经济学中的应用。

本书可作为高职高专工科类及经济管理类各专业高等数学教材，也可作为工程技术人员的高等数学知识更新教材。

本教材的基本教学时数不少于100学时，标有*号的内容要另行安排学时。

参加本书编写的有侯风波(承德石油高等专科学校)、张学奇(承德石油高等专科学校)、孟庆才(河北工程技术高等专科学校)，薛桂兰(山西省工业职业技术学院)、乐美龙(宁波职业技术学院)，全书框架结构、统稿、定稿由侯风波教授承担。

自本书第一版出版发行3年来，有许多高职高专数学教师使用本书作为教材，并对本次修改提出了许多很好的建议。本书的编写和出版，得到了高等教育出版社有关领导的重视，并给予了大力支持与帮助。高级策划蒋青女士为本书的编辑出版付出了辛勤的劳动，并提出了许多好的建议。在此一并致以最诚挚的谢意。非常欢迎使用本书的师生继续给予批评指导，以便在下一次修订中使之进一步完善。

编者

2003年春

第一版前言

本书是教育部高职高专规划教材，是根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，在认真总结全国高职高专数学教改经验的基础上，结合对国际国内同类教材发展趋势的分析而编写的。

通过多年的教学研究与实践，我们认识到：高职高专院校的数学教育必须培养如下三方面的能力：一是用数学思想、概念、方法消化吸收工程概念和工程原理的能力；二是把实际问题转化为数学模型的能力；三是求解数学模型的能力。因此，本书关注数学概念在实际生活中的应用，并结合具体问题进行数学建模训练，特别是将 Mathematica 软件包结合数学内容融于各章中讲授，不但极大地提高了学生利用计算机求解数学模型的能力，而且提高了学生学数学、用数学的积极性。

本书充分体现了上述教学思想，具有 9 大特点：(1)结合数学建模突出"以应用为目的，以必需、够用为度"的教学原则，加强对学生应用意识、兴趣、能力的培养，编入了数学建模和实例；(2)编入了数学软件包——Mathematica，提高学生结合计算机及数学软件包求解数学模型的能力；(3)突出强调数学概念与实际问题的联系；(4)结合具体内容进行数学建模训练，注重双向翻译能力的培养；(5)结合高职高专的特点，适度淡化了深奥的数学理论，强化了几何说明，如去掉了极限的 ε-δ 语言及微分中值定理的证明，代之以几何描述；(6)将分散于微积分各部分的数值计算集中在一起，并适当扩充后用数值分析的观点结合计算机进行处理；(7)不仅优选了微积分在几何、物理方面的应用，而且挖掘了微积分在经济领域中的应用，编入了经济应用实例；(8)增加了向量微积分的内容，扩展了向量的应用；(9)每章末都专设了例题与练习一节，以方便习题课的开设及学生的复习巩固，例题的选择既结合重点、难点，又突出数学的思维方法，并一题多解。

全书内容包括数学软件包、函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、常微分方程、向量与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、级数、数值计算初步。书后附有初等数学常用公式、常用平面曲线及其方程、Mathematica 软件包的常用系统函数、空间曲面所围成的立体图形及习题答案与提示。

另外，考虑到读者阅读经济管理类书籍的需要，本书还包含了微积分在经济学中的应用。

本书可作为高等职业学校、高等专科学校、成人高等学校及本科院校举办的二级职业技术学院工科类各专业高等数学教材，也可供经济管理类专业选用，还可作为工程技术人员的高等数学知识更新教材。

本教材的基本教学时数不少于 120 学时，标有 * 号的内容要另行安排学时。

参加本书编写的有侯风波（承德石油高等专科学校）、张学奇（承德石油高等专科学校）、孟庆才（河北工程技术高等专科学校）、汪永高（华北矿业高等专科学校），全书框架结构安排、统稿、定稿由侯风波承担。

教育部高等学校数学与力学教学指导委员会成员、北京航空航天大学教授李心灿和北方工业大学数学学科主任、副教授宋瑞霞承担了本教材的审稿工作，他们认真审阅了本书的全部原稿，并提出了许多有价值的意见。在此，编者对他们表示衷心的感谢。

由于水平所限，时间也比较仓促，本书难免有不足之处，敬请读者斧正。

编者

2000年春

目　录

第一章

函　　数

千姿百态的物质世界无不处在运动、变化和发展之中. 16 世纪,随着社会的发展,为适应社会生产力发展的需要,运动变化就成为自然科学研究的主题,对各种变化过程和过程中的变量间的依赖关系的研究产生了函数概念. 函数是刻画运动变化中变量相依关系的数学模型,其思想是:通过某一事实的信息去推知另一事实. 数学上最重要的函数是那些可根据某一数值而推知另一数值的函数,如果我们知道了圆的半径,则它的面积也就确定了.

微积分是从研究函数开始的. 本章将在中学数学已有函数知识的基础上进一步理解函数概念,并介绍反函数、复合函数及初等函数的主要性质,为微积分的学习打下基础.

第一节　函数及其性质

一、函数的概念

函数的概念在 17 世纪之前一直与公式紧密关联,到了 1873 年,德国数学家狄利克雷(1805—1859)抽象出了直至今日仍为人们易于接受,并且较为合理的函数概念.

1. 函数的定义

定义 1　设有两个变量 x 和 y,若当变量 x 在实数的某一范围 D 内,任意取定一个数值时,变量 y 按照一定的规律 f,有惟一确定的值与之对应,则称 y 是 x 的函数,记作

$$y = f(x), \quad x \in D,$$

其中变量 x 称为自变量,变量 y 称为函数(或因变量). 自变量的取值范围 D 称为函数的定义域.

若对于确定的 $x_0 \in D$,通过对应规律 f,函数 y 有惟一确定的值 y_0 相对应,则称 y_0 为 $y = f(x)$ 在 x_0 处的函数值,记作

$$y_0 = y\big|_{x=x_0} = f(x_0),$$

函数值的集合,称为函数的值域,记作 M.

若函数在某个区间上的每一点都有定义,则称这个函数在该区间上有定义.

2. 函数的两个要素

函数的对应规律和定义域称为函数的两个要素,而函数的值域一般称为派生要素.

(1) 对应规律

例 1　$f(x)=2x^2+3x-1$ 就是一个特定的函数，f 确定的对应规律为：

$$f(\quad)=2(\quad)^2+3(\quad)-1.$$

例 2　设 $y=f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$，求 $f\left(\frac{2}{\pi}\right)$.

解

$$y\Big|_{x=\frac{2}{\pi}}=f\left(\frac{2}{\pi}\right)=\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

例 3　设 $f(x+1)=x^2-3x$，求 $f(x)$.

解　令 $x+1=t$，则 $x=t-1$，所以

$$f(t)=(t-1)^2-3(t-1)=t^2-5t+4,$$

所以

$$f(x)=x^2-5x+4.$$

(2) 定义域

自变量的取值范围称为函数的定义域.

例 4　求函数 $y=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\frac{2x-1}{7}$ 的定义域.

解　这是两个函数之和的定义域，先分别求出每个函数的定义域，然后求其公共部分即可.

使 $\sqrt{x^2-x-6}$ 有定义，必须满足 $x^2-x-6\geqslant 0$，即

$$(x-3)(x+2)\geqslant 0,$$

解得

$$x\geqslant 3 \text{ 或 } x\leqslant -2,$$

即 $\sqrt{x^2-x-6}$ 的定义域为 $(-\infty,-2]\cup[3,+\infty)$；

使 $\arcsin\frac{2x-1}{7}$ 有定义，必须满足 $\left|\frac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1$，即

$$-7\leqslant 2x-1\leqslant 7,$$

解得

$$-3\leqslant x\leqslant 4,$$

即 $\arcsin\frac{2x-1}{7}$ 的定义域为 $[-3,4]$.

于是，所求函数的定义域是　$[-3,-2]\cup[3,4]$.

例 5　下列函数是否相同，为什么？

(1) $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$；

(2) $w=\sqrt{u}$ 与 $y=\sqrt{x}$.

解　(1) $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$ 不是相同的函数，因为定义域不同.

(2) $w=\sqrt{u}$ 与 $y=\sqrt{x}$ 是相同的函数，因为对应规律与定义域均相同.

3. 函数的记号

y 是 x 的函数，可以记作 $y=f(x)$，也可以记作 $y=\varphi(x)$ 或 $y=F(x)$ 等，但同一函数在讨论中应取定一种记法，同一问题中涉及多个函数时，则应取不同的记号分别表示它们各自的对应规律，为方便起见，有时也用记号 $y=y(x)$，$u=u(x)$，$s=s(x)$ 等表示函数. 这种函数的记号也称为函数的解析表达式.

4. 函数的表示法

函数可以用至少三种不同的方法来表示：表格法、图像法和公式法.

例 6 中央电视台每天都播放天气预报,经统计,某地 1999 年 9 月 19 日—29 日每天的最高气温如表 1.1 所示.

表 1.1

日期(9 月)	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
最高气温/℃	28	28	27	25	24	26	27	25	23	22	21

这个表格确实表达了温度是日期的函数,这里不存在任何计算温度的公式(否则就不需要气象局了),但是每一天都会产生出一个惟一的最高气温,对每个日期 t,都有一个与 t 相应的惟一最高气温 N.

例 7 王先生到郊外去观景,他匀速前进,离家不久,他发现一骑车人的自行车坏了,他帮助这个人把自行车修好,随后又上路了. 请把王先生离家的距离关于时间的函数用图形描述出来.

解 王先生离家的距离关于时间的函数图形如图 1-1 所示.

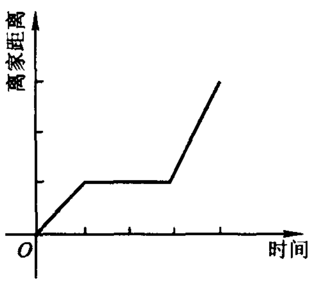


图 1-1

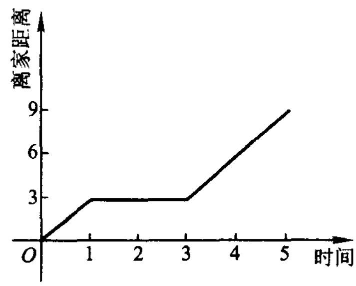


图 1-2

如果给图 1-1 标明具体的数值(如图 1-2),则可由解析表达式表示为

$$f(x)=\begin{cases}3x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 3, & 1<x\leqslant 3,\\ 3x-6, & 3<x\leqslant 5.\end{cases}$$

该函数 $f(x)$ 的定义域为 $D=[0,5]$,但它在定义域内不同的区间上是用不同解析式来表示的,这样的函数称为**分段函数**. 分段函数是定义域上的一个函数,不要理解为多个函数,分段函数需要分段求值,分段作图. 大家可以根据该分段函数重新叙述一件事.

例 8 作出下面分段函数的图形:

$$f(x)=\begin{cases}0, & -1<x\leqslant 0,\\ x^2, & 0<x\leqslant 1,\\ 3-x, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

解 该分段函数的图形如图 1-3 所示.

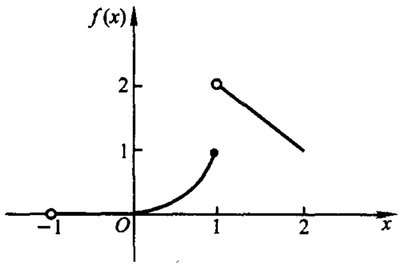


图 1-3

我们给出的函数定义是一种传统的函数模型,到了 19 世纪 70 年代,康托尔的集合论出现之后,函数可明确地定义为集合间的对应关系,更突出了对应规律,是近代函数的模型.

定义 2　设 D 与 M 分别是两个数集,存在对应规律 f,若对 D 中的每一个数 x,通过对应规律 f,集合 M 中都有惟一确定的数 y 与之对应,则称 f 为从 D 到 M 的函数(也称为映射),记作

$$f:D\to M,$$

其中 D 称为函数 f 的定义域,D 中的每一个 x 根据对应规律 f 对应于一个 y,记作 $y=f(x)$,称为函数 f 在 x 的函数值,全体函数值的集合

$$W=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}\subset M$$

称为函数 f 的值域,x 称为 f 的自变量,y 称为因变量,如图 1－4 所示.

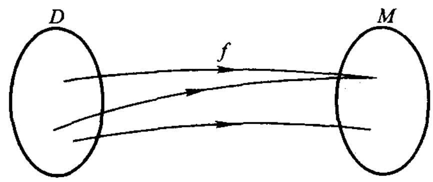


图 1－4

二、函数的几种特性

设函数 $f(x)$ 在某区间 I 上有定义.

1. 有界性

若存在正数 M,使得在区间 I 上 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$ 在 I 上有界.

例 9　$f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界,因为 $|\sin x|\leqslant 1$. 而 $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界.

2. 单调性

若对于区间 I 内任意两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加,区间 I 称为单调增区间;若 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 I 上单调减少,区间 I 称为单调减区间. 单调增区间或单调减区间统称为单调区间.

3. 奇偶性

设 I 为关于原点对称的区间,若对于任意 $x\in I$,都有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数;若 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数.

4. 周期性

若存在不为零的数 T,使得对于任意 $x\in I$,有 $x+T\in I$,且 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为周期函数,通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期.

三、反函数

定义 3　设给定 y 是 x 的函数 $y=f(x)$,如果把 y 当作自变量,x 当作函数,则由关系式 $y=f(x)$ 所确定的函数 $x=\varphi(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数,而 $y=f(x)$ 称为直接函数.

习惯上总是用 x 表示自变量,而用 y 表示函数,因此,往往把 $x=\varphi(y)$ 改写成 $y=\varphi(x)$,称为 $y=f(x)$ 的矫形反函数,记作

$$y=f^{-1}(x),$$

所以,我们常称函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(y)$ 为直接反函数.

思考题

1. 确定一个函数需要有哪几个基本要素?
2. 思考函数的几种特性的几何意义.

3. 直接函数 $y=f(x)$，其直接反函数为 $x=\varphi(y)$，其矫形反函数为 $y=f^{-1}(x)=\varphi(x)$.

(1) $x=\varphi(y)$与 $y=\varphi(x)$是否为同一函数？

(2) $y=f(x)$，$x=\varphi(y)$，$y=f^{-1}(x)$在同一坐标系中的几何表现是什么？

习作题

1. 设自变量 $x\in\{1,2,3,4\}$，判断下列数学结构哪些是函数？哪些不是函数？为什么？

(1) $$f:\begin{array}{cccc}1&2&3&4\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 0&2&1&-1\end{array};$$

(2) $$\varphi:\begin{array}{cccc}1&2&3&4\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 1&1&1&1\end{array};$$

(3) $$y:\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&1\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 2&3&0&1&4\end{array};$$

(4) $$h:\begin{array}{ccc}1&2&3\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 1&2&3\end{array}.$$

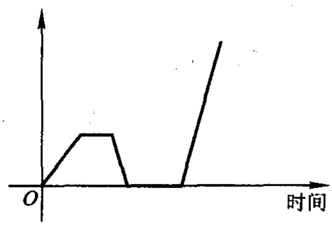


图 1－5

2. 一位旅客住在旅馆里，图 1－5 描述了他的一次行动. 请你根据图形给纵坐标赋予某一个物理量后，再叙述他的这次行动. 你能给图 1－5 标上具体的数值，精确描述这位旅客的这次行动并且用一个函数解析式表达出来吗？

3. 在下列各对函数中，是相同函数的是(　　)

(1) $y=\ln x^7$ 与 $y=7\ln x$；　　(2) $y=\ln\sqrt{x}$与 $y=\frac{1}{2}\ln x$；

(3) $y=\cos x$ 与 $y=\sqrt{1-\sin^2 x}$；　　(4) $y=\frac{1}{x+1}$与 $y=\frac{x-1}{x^2-1}$；

(5) $y=\ln x^8$ 与 $y=8\ln x$.

第二节　初 等 函 数

微积分的研究对象，主要为初等函数，而初等函数是由基本初等函数组成的.

一、基本初等函数

常数函数　$y=C$　(C 为常数)；

幂函数　$y=x^\mu$　(μ 为常数)；

指数函数　$y=a^x$　($a>0,a\neq1,a$ 为常数)；

对数函数　$y=\log_a x$　($a>0,a\neq1,a$ 为常数)；

三角函数　$y=\sin x$，　$y=\cos x$，　$y=\tan x$，　$y=\cot x$，　$y=\sec x$，　$y=\csc x$；

反三角函数　$y=\arcsin x$，　$y=\arccos x$，　$y=\arctan x$，　$y=\operatorname{arccot} x$.

这六种函数统称为基本初等函数，这些函数的性质、图形在中学已经学过，今后会经常用到它们.

二、复合函数

设 $y=f(u)$，其中 $u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的值全部或部分落在 $f(u)$ 的定义域内，则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数，而 u 称为中间变量.

设 $f_u=f(u)$ 的定义域为 D_u，值域为 M_u，$\varphi_x=\varphi(x)$ 的定义域为 D_x，值域为 M_x，如图 1－6 所示. 即，$D_u\cap M_x\neq\phi$，则 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 可复合成函数 $y=f[\varphi(x)]$.

例 1 函数 $y=\sin^2 x$ 是由 $y=u^2$，$u=\sin x$ 复合而成的复合函数，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，它也是 $u=\sin x$ 的定义域；函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$，$u=1-x^2$ 复合而成的，其定义域为 $[-1,1]$，它是 $u=1-x^2$ 的定义域的一部分；$y=\arcsin u$，$u=2+x^2$ 是不能复合成一个函数的.

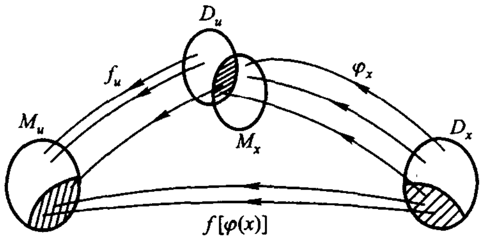


图 1－6

例 2 分析下列复合函数的结构：

(1) $y=\sqrt{\cot\dfrac{x}{2}}$；　　(2) $y=\mathrm{e}^{\sin\sqrt{x^2+1}}$.

解 (1) $y=\sqrt{u}$，$u=\cot v$，$v=\dfrac{x}{2}$；

(2) $y=\mathrm{e}^u$，$u=\sin v$，$v=\sqrt{t}$，$t=x^2+1$.

例 3 设 $f(x)=x^2$，$g(x)=2^x$，求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

解 $f[g(x)]=[g(x)]^2=(2^x)^2=4^x$，$g[f(x)]=2^{f(x)}=2^{x^2}$.

三、初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合步骤所构成，且可用一个解析式表示的函数，叫做初等函数，否则就是非初等函数.

例 4 下列函数统称为双曲函数：

双曲正弦函数　　$\operatorname{sh} x=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$；

双曲余弦函数　　$\operatorname{ch} x=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$；

双曲正切函数　　$\operatorname{th} x=\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

它们都是初等函数，在工程上是常用的. 但是分段函数一般不是初等函数.

今后我们讨论的函数，绝大多数都是初等函数.

思考题

任意两个函数是否都可以复合成一个复合函数？你是否可以用例子说明？

习作题

1. 设 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)$，求 $f(\tan x)$ 的定义域.

2. 设 $f(x)=\frac{1}{1-x}$,求 $f[f(x)]$,$f\{f[f(x)]\}$.

*第三节　数学模型方法简述

函数关系可以说是一种变量相依关系的数学模型. 数学模型方法是处理科学理论问题的一种经典方法,也是处理各类实际问题的一般方法. 掌握数学模型方法是非常必要的. 在此,对数学模型方法作一简述.

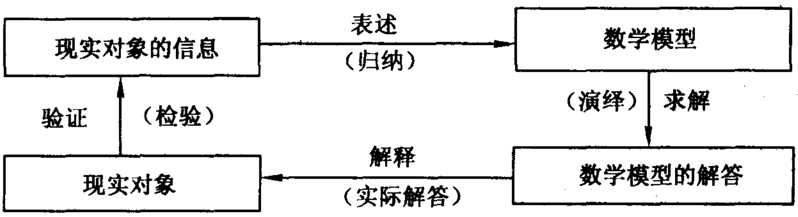
数学模型方法(Mathematical Modeling),称为 MM 方法. 它是针对所考察的问题构造出相应的数学模型,通过对数学模型的研究,使问题得以解决的一种数学方法.

一、数学模型的含义

数学模型是针对现实世界的某一特定对象,为了一个特定的目的,根据特有的内在规律,作出必要的简化和假设,运用适当的数学工具,采用形式化语言,概括或近似地表述出来的一种数学结构. 它或者能解释特定对象的现实性态,或者能预测对象的未来状态,或者能提供处理对象的最优决策或控制. 数学模型既源于现实又高于现实,不是实际原型,而是一种模拟,在数值上可以作为公式应用,可以推广到与原物相近的一类问题,可以作为某事物的数学语言,可译成算法语言,编写程序进入计算机.

二、数学模型的建立过程

建立一个实际问题的数学模型,需要一定的洞察力和想像力,筛选、抛弃次要因素,突出主要因素,作出适当的抽象和简化. 全过程一般分为表述、求解、解释、验证几个阶段,并且通过这些阶段完成从现实对象到数学模型,再从数学模型到现实对象的循环. 可用流程图表示如下:



表述　根据建立数学模型的目的和掌握的信息,将实际问题翻译成数学问题,用数学语言确切地表述出来.

这是一个关键的过程,需要对实际问题进行分析,甚至要作调查研究,查找资料,对问题进行简化、假设、数学抽象,运用有关的数学概念、数学符号和数学表达式去表现客观对象及其关系. 如果现有的数学工具不够用时,可根据实际情况,大胆创造新的数学概念和方法去表现模型.

求解　选择适当的方法,求得数学模型的解答.

解释　数学解答翻译回现实对象,给实际问题的解答.

验证　检验解答的正确性.

例如,哥尼斯堡有一条普雷格尔河,这条河有两个支流,在城中心汇合成大河,河中间有一小