量子力学典型题精讲

LIANGZI LIXUE DIANXINGTI JINGJIANG

宋鹤山/主编

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(r)\right]\psi(\boldsymbol{r},t)$$

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

量子力学典型题精讲 / 宋鹤山主编 .— 大连 :大连理工大学出版社,2004.10
ISBN 7-5611-2727-8

Ⅰ. 量… Ⅱ. 宋… Ⅲ. 量子力学—高等学校—解题 Ⅳ. O413.1-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 048417 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市凌水河 邮政编码:116024
电话:0411-84708842 传真:0411-84701466 邮购:0411-84707961
E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:140mm×203mm 印张:6.5 字数:164 千字
印数:1 ~5 000
2004 年 10 月第 1 版 2004 年 10 月第 1 次印刷

责任编辑:吴孝东 责任校对:任大鹏
封面设计:宋 蕾

定价:10.00 元

前　言

在学习物理学的过程中，基本技能的训练是加深理解和巩固所学基础理论的必要手段。物理习题是学生掌握基础理论和提高基本技能的重要环节。通过做习题，不仅可以加深理解和巩固已经掌握的基本概念、基本原理，而且还可以举一反三，拓宽知识面，培养运用所学知识的能力和提高分析、解决问题的能力。

由于量子力学在基本概念、基本原理和数学方法上与经典物理学区别较大，初学者往往感觉到所学概念不易理解，解题无从下手。目前，由于高校课程门类较多，包括量子力学在内的各门课程的教学时数有限，很难安排较多的习题课，这又增加了学生学习量子力学的难度。本书，一是为量子力学的任课教师提供由浅入深的各类典型题目，以便有效地指导学生学习，二是为学习量子力学的本科生、研究生提供难度不太大、题量又适宜，但又有助于掌握量子力学的基本概念、原理和方法，提高基本技能的参考书。对那些准备考研究生的读者来说，本书更是一本不可多得的参考书。作者也考虑过，正在学习量子力学的本科生，如果为了应付完成作业，不假思索地抄写本习题解中的答案，那对他们的学习一定是不利的。作者诚恳地希望读者，一定要先自己动脑去做每个题的基础上再去看习题解答，并反复思考，分析总结，以达到举一反三的效果。

除了国内流行的量子力学教材中的习题之外，我们还在美国、日本以及欧洲等国家一些大学通用量子力学教材的习题和研究生入学考题中，选择一些与我们编写的《量子力学》内容相匹配的题目编入本书，虽然所编入的题目不多，但类型齐全、难度适宜，相信本书会成为广大读者喜爱的参考书。

在本书的编写过程中，研究生李崇，郭彦青，于长水，陈菁，苗向阳等做了提供素材，计算机输入等大量工作，在此对他们表示诚挚的谢意。在编写本书的过程中，尽管我们在题目的取舍、内容的编排和解题的技巧上进行了反复的推敲，但由于作者水平有限和编写时间仓促，书中错误和不当之处在所难免，真诚希望广大读者提出宝贵意见，给予热诚的指正。

作　者
于大连理工大学
2004年8月20日

目 录

第 1 章　经典物理学的"危机"和量子力学的诞生

1. 利用 Planck 的量子假说证明，谐振子的平均能量为

$$\bar{\varepsilon}=\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}$$

证明　根据统计平均值的定义和 Planck 的量子假说，

$$\bar{\varepsilon}=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n e^{-\varepsilon_n/kT}\Big/\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\varepsilon_n/kT}$$

其中，$\varepsilon_n = nh\nu$。令 $e^{-h\nu/kT} = x, y = h\nu/kT$，则

$$\bar{\varepsilon}=\sum_{n=0}^{\infty}nh\nu e^{-ny}\Big/\sum_{n=0}^{\infty}e^{-ny}$$

但由于

$$\sum_{n=0}^{\infty}e^{-ny}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}ne^{-ny}=-\frac{d}{dy}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-ny}=-\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{1-e^{-y}}\right)=\frac{x}{(1-x)^2}$$

因此最后得到

$$\bar{\varepsilon}=\frac{h\nu x/(1-x)^2}{1/(1-x)}=\frac{h\nu e^{-y}}{1-e^{-y}}=\frac{h\nu}{e^y-1}=\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}$$

2. 设一个质量为 m 的粒子在阱宽为 a 的一维无限深方势阱

$$V(x)=\begin{cases}\infty, & x<0, x>a\\ 0, & 0<x<a\end{cases}$$

中运动，如图 1-1 所示。试用 de Broglie 的驻波条件，求粒子能量的可能值。

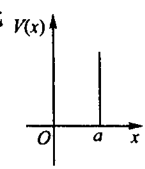

图 1-1

解　根据 de Broglie 的驻波条件

$$a=\frac{\lambda}{2}n,\quad n=1,2,3,\cdots$$

和利用 de Broglie 的假定

$$\lambda=\frac{h}{p}$$

得到动量

$$p=\frac{h}{\lambda}=\frac{nh}{2a}=\frac{2n\pi\hbar}{2a}=\frac{n\pi\hbar}{a}$$

因此，能量的可能取值是

$$E_n=\frac{p^2}{2m}=\frac{\hbar^2\pi^2n^2}{2ma^2},\quad n=1,2,3,\cdots$$

3. 设一质量为 m 的粒子限制在长、宽、高分别为 a、b、c 的箱内运动，试用驻波条件求粒子能量的可能值。

解 根据 de Broglie 的驻波条件（参考第 2 题），粒子在 x、y、z 三个方向分别满足

$$a=\frac{\lambda_x}{2}n_x,\quad b=\frac{\lambda_y}{2}n_y,\quad c=\frac{\lambda_z}{2}n_z$$

从而

$$p_x=\frac{\pi\hbar n_x}{a},\quad p_y=\frac{\pi\hbar n_y}{b},\quad p_z=\frac{\pi\hbar n_z}{c}$$

因此，粒子的能量

$$E=\frac{p^2}{2m}=\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2m}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_x^2}{a^2}+\frac{n_y^2}{b^2}+\frac{n_z^2}{c^2}\right),(n_x,n_y,n_z=1,2,3,\cdots)$$

4. 设质量为 m 的粒子在一维谐振子势 $V(x)=\frac{1}{2}m\omega^2x^2$ 中运动，试用量子化条件求粒子能量 E 的可能取值。

解 谐振子的总能量

$$E=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

谐振子运动方程的解为

$$x=x_0\sin\omega t$$

所以

$$p=m\dot{x}=m\omega x_0\cos\omega t$$

根据角动量量子化条件 $\oint p\mathrm{d}x = nh$（代入上面的 x,p 并对一个周期求积分）得

$$\oint p\mathrm{d}x = \int_0^T m\omega x_0\cos\omega t\cdot x_0\omega\cos\omega t\mathrm{d}t$$

$$= mx_0^2\omega^2\int_0^T\cos^2\omega t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}mx_0^2\omega^2 T = nh$$

因此

$$\frac{1}{2}mx_0^2\omega^2 = \frac{nh}{T} = nh\nu,\quad \left(\nu = \frac{1}{T}, n = 1,2,3,\cdots\right)$$

由此得到

$$E = \frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

$$=\frac{1}{2}mx_0^2\omega^2(\cos^2\omega t+\sin^2\omega t)$$

$$=\frac{1}{2}mx_0^2\omega^2=nh\nu=n\hbar\omega,\quad (\omega=2\pi\nu)$$

5. 设一个平面转子的转动惯量为 I，求转子能量的可能取值。

解　平面转子（绕 z 轴旋转）的能量

$$E=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2,\quad (\varphi\text{为转角})$$

另一方面，角动量的 z 分量 $l_z=mvr=mr^2\dot{\varphi}$，　$(v=r\dot{\varphi})$，因此

$$E=\frac{1}{2}I\,\frac{l_z^2}{m^2r^4}=\frac{l_z^2}{2I},\quad (I=mr^2)$$

根据量子化条件 $l_z=n\hbar$，最后得到

$$E=\frac{\hbar^2n^2}{2I},\quad n=\pm1,\pm2,\cdots$$

6. 一个正电子通过物质时，被原子捕获并与原子中的电子一道湮没产生两个光子：

$$e^{+}+e^{-}\rightarrow 2\gamma$$

求所产生光子的 de Broglie 波长，已知：$m_e=9.1\times10^{-31}$ kg。

解　在 e^{+}，e^{-}的质心系里，根据动量守恒定律，两个光子的动量大小相等（方向相反）：

$$p_1=p_2\equiv p,\quad p=\frac{h}{\lambda}$$

所以波长

$$\lambda_1=\lambda_2\equiv\lambda$$

根据能量守恒定律

$$2m_ec^2=2h\nu$$

所以

$$\nu=\frac{m_ec^2}{h}$$

从而，de Broglie 波长

$$\lambda=\frac{c}{\nu}=\frac{h}{m_ec}\approx0.022\,\text{Å}$$

7. π^{+}介子可衰变为 μ^{+}轻子和中微子 ν_μ（其质量 $m_\nu=0$），

$$\pi^{+}\rightarrow\mu^{+}+\nu_\mu$$

求 μ^{+}轻子和中微子 ν_μ 的 de Broglie 波长（考虑相对论效应）。

解　在 π^{+}介子的静止坐标系中，μ^{+}和 ν_μ 的动量大小相等、方向相反。设其动量为 p，则按能量守恒定律

$$m_\pi c^2=\sqrt{m_\mu^2c^4+p_\mu^2c^2}+p_\nu c,\quad (p_\mu=p_\nu=p)$$

$$m_\mu^2c^4+p^2c^2=m_\pi^2c^4+p^2c^2-2m_\pi c^3p$$

由此可解出

$$p=\frac{(m_\pi^2-m_\mu^2)c}{2m_\pi}$$

所以，μ^{+}和 ν_μ 的 de Broglie 波长

$$\lambda_\mu=\frac{h}{p}=\frac{2m_\pi h}{(m_\pi^2-m_\mu^2)c}=\lambda_\nu$$

8. 由角动量量子化条件 $J=n\hbar$ 推导出氢原子的“轨道半径” r_n 与能量 E_n。

解　因为

$$J=mvr=n\hbar$$

所以

$$v=\frac{n\hbar}{mr} \tag{1}$$

电子在核 Coulomb 势中的能量

$$E=\frac{1}{2}mv^2-\frac{e^2}{r} \tag{2}$$

对圆轨道

$$\frac{e^2}{r^2}=\frac{mv^2}{r}$$

所以

$$v^2=\frac{e^2}{mr} \tag{3}$$

将式(1)代入式(3)得轨道半径

$$r_n=\frac{n^2\hbar^2}{me^2},\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

再把 r_n 和 v 代入式(2)得

$$E_n=-\frac{me^4}{2\hbar^2n^2}$$

9. 一质量为 m 的粒子禁闭在边长为 a 的立方体内，求粒子从基态跃迁到第一激发态所需能量值。

解　立方体内粒子的能量

$$E_{n_1,n_2,n_3}=\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}(n_1^2+n_2^2+n_3^2)\quad n_1,n_2,n_3=1,2,3,\cdots$$

基态能量为

$$E_{111}=\frac{3\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$$

第一激发态（三重简并）的能量为

$$E_{211}=E_{121}=E_{112}=\frac{6\hbar^2\pi^2}{2ma^2}=\frac{3\hbar^2\pi^2}{ma^2}$$

因此,由基态到第一激发态的激发能

$$E=E_{211}-E_{111}=\frac{3\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$$

10. 在氯化钠晶体内有些负离子空穴,每个空穴束缚一个电子,因此可将这些电子看成束缚在边长为晶格常数 a 的立方体内的粒子。设在室温下电子处于基态,求处于基态的电子吸收电磁波跃迁到第一激发态时,所吸收电磁波的波长。

解　空穴中电子的能量

$$E_{n_1,n_2,n_3}=\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}(n_1^2+n_2^2+n_3^2),n_1,n_2,n_3=1,2,3,\cdots$$

基态和第一激发态的能级能量分别为

$$E_{111}=\frac{3\hbar^2\pi^2}{2ma^2},\quad E_{211}=E_{121}=E_{112}=\frac{3\hbar^2\pi^2}{ma^2}$$

因此,所吸收电磁波的频率满足

$$E=E_{211}-E_{111}=h\nu$$

电磁波的波长

$$\lambda=\frac{c}{\nu}=\frac{hc}{E}=\frac{2ma^2hc}{3\hbar^2\pi^2}=\frac{4ma^2c}{3\hbar\pi}$$

第 2 章　波函数与 Schrödinger 方程

1. 求证：如果 $\psi_1(x,t)$ 和 $\psi_2(x,t)$ 是同一个 Schrödinger 方程的两个解，则 $\psi(x,t)=c_1\psi_1(x,t)+c_2\psi_2(x,t)$ 也是该 Schrödinger 方程的解。

证明　设体系的 Hamilton 量为 $\hat{H}$，则因为 $\psi_1(x,t)$ 和 $\psi_2(x,t)$ 是同一个 Schrödinger 方程的解，它们分别满足方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi_1(x,t)}{\partial t}=\hat{H}\psi_1(x,t)$$

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi_2(x,t)}{\partial t}=\hat{H}\psi_2(x,t)$$

因此，

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}&=\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\{c_1\psi_1(x,t)+c_2\psi_2(x,t)\}}{\partial t}\\&=c_1\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi_1(x,t)}{\partial t}+c_2\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi_2(x,t)}{\partial t}\\&=c_1\hat{H}\psi_1(x,t)+c_2\hat{H}\psi_2(x,t)\\&=\hat{H}\{c_1\psi_1(x,t)+c_2\psi_2(x,t)\}=\hat{H}\psi(x,t)\end{aligned}$$

可见，$\psi(x,t)$ 也是该 Schrödinger 方程的解。

2. 平面转子的能量 $E=\frac{l_z^2}{2I}$（见第 1 章习题），对应的能量算符（Hamilton 算符）为

$$\hat{H}=\frac{\hat{l}_z^2}{2I},\quad \hat{l}_z=-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

求平面转子的波函数。

解　设平面转子的波函数为 $\psi(\varphi)$，则 Schrödinger 方程为

$$\hat{H}\psi(\varphi)=E\psi(\varphi) \quad 或 \quad -\frac{\hbar^2}{2I}\frac{d^2\psi(\varphi)}{d\varphi^2}=E\psi(\varphi)$$

设 $2IE/\hbar^2=k^2$，则上式变为

$$\frac{d^2\psi}{d\varphi^2}+k^2\psi=0$$

此方程的两个特解为 $\psi(\varphi)\sim e^{\pm ik\varphi}$。由周期性条件

$$\psi(\varphi)=\psi(\varphi+2\pi)$$

即

$$e^{2\pi ik}=1$$

所以

$$k=n, \quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

从而得到

$$\psi(\varphi)=Ce^{in\varphi} \quad （正转，n 取正数；反转，n 取负数）$$

归一化：

$$|C|^2\int_0^{2\pi}\psi^*\psi d\varphi=1$$

由此可得

$$C=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

因此，最后得到归一化的波函数

$$\psi(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{in\varphi} \quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

能量本征值

$$E_n=\frac{\hbar^2k^2}{2I}=\frac{\hbar^2n^2}{2I}, \quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

3. 设质量为 m 的粒子束缚在势场 $V(r)$ 中运动。

(1)求证：粒子的能量平均值为 $\overline{E}=W$，其中

$$W\doteq\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^*\cdot\nabla\psi+\psi^*V\psi \quad （能量密度）。$$

(2)证明能量守恒公式

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{s}=0$$

其中，

$$\boldsymbol{s}=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\nabla\psi+\frac{\partial\psi}{\partial t}\nabla\psi^*\right)\quad(\text{能流密度})。$$

证明　(1)在势场 $V(r)$ 中运动粒子的 Hamilton 为

$$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(r)$$

因此，能量平均值

$$\begin{aligned}\overline{E}&=\int\psi^*\ \hat{H}\psi\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}=\int\psi^*\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\right]\psi\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}+\int\psi^*V\psi\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\\&=-\frac{\hbar^2}{2m}\int\psi^*\ \nabla^2\psi\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}+\int\psi^*V\psi\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\\&=\int\left[\frac{\hbar^2}{2m}(-\nabla\cdot(\psi^*\nabla\psi)+\nabla\psi^*\ \cdot\nabla\psi)+\psi^*V\psi\right]\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\end{aligned}$$

利用高斯定理，上式右边第一项中的散度可化为

$$\iiint\nabla\cdot(\psi^*\nabla\psi)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}=\oiint(\psi^*\nabla\psi)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

根据束缚态边界条件 $\psi|_{x=\pm\infty}=0$，上式变为零。因此最后得

$$\overline{E}=\int\left(\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^*\ \cdot\nabla\psi+\psi^*V\psi\right)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}=\int W\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}$$

(2)
$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial t}&=\frac{\hbar^2}{2m}\left[\nabla\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)\nabla\psi+\nabla\psi^*\nabla\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\right]+\\&\quad\frac{\partial\psi^*}{\partial t}V\psi+\psi^*V\frac{\partial\psi}{\partial t}\\&=\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\cdot\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\nabla\psi+\frac{\partial\psi}{\partial t}\nabla\psi^*\right)-\\&\quad\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\nabla^2\psi+\frac{\partial\psi}{\partial t}\nabla^2\psi^*\right)+\frac{\partial\psi^*}{\partial t}V\psi+\psi^*V\frac{\partial\psi}{\partial t}\end{aligned}$$

$$=-\nabla\cdot s+\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V\right)\psi+$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V\right)\psi^*$$

$$=-\nabla\cdot s+\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\hat{H}\psi+\frac{\partial\psi}{\partial t}\hat{H}\psi^*$$

$$=-\nabla\cdot s+\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t}-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial\psi^*}{\partial t}=-\nabla\cdot s$$

所以

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\nabla\cdot s=0$$

4. 求证:在 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{r},t)=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(r)\right]\psi(\boldsymbol{r},t)\tag{1}$$

中,只有当势函数 $V(r)$ 为实函数时,连续性方程 $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot j=0$ 才能得以满足。

证明 取上面 Schrödinger 方程的复共轭,则

$$-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^*(\boldsymbol{r},t)=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V^*(r)\right]\psi^*(\boldsymbol{r},t)\tag{2}$$

$\psi^*(\boldsymbol{r},t)\times(1)-\psi(\boldsymbol{r},t)\times(2)$ 得

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*(\boldsymbol{r},t)\psi(\boldsymbol{r},t))$$

$$=\frac{\hbar^2}{2m}[\psi(\boldsymbol{r},t)\nabla^2\psi^*(\boldsymbol{r},t)-\psi^*(\boldsymbol{r},t)\nabla^2\psi(\boldsymbol{r},t)]+$$

$$[V(r)-V^*(r)]\psi^*(\boldsymbol{r},t)\psi(\boldsymbol{r},t)$$

即

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\boldsymbol{r},t)=-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}\nabla\cdot[\psi(\boldsymbol{r},t)\nabla\psi^*(\boldsymbol{r},t)-\psi^*(\boldsymbol{r},t)\nabla\psi(\boldsymbol{r},t)]-$$

$$\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[V(r)-V^*(r)]\psi^*(\boldsymbol{r},t)\psi(\boldsymbol{r},t)$$

或者

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{j}=\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[V^*(r)-V(r)]\psi^*(\boldsymbol{r},t)\psi(\boldsymbol{r},t)$$

几率要守恒，必须满足连续性方程$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0$。由上式可见，只有当上式中的势函数 $V(r)$为实数时连续性方程才得以满足。

5. 设 ψ_1 和 ψ_2 是 Schrödinger 方程的两个解，试证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\psi_1^*(\boldsymbol{r},t)\psi_2(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}=0$$

证明 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\psi_1^*(\boldsymbol{r},t)\psi_2(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}$

$$=\int\left[\psi_1^*(\boldsymbol{r},t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_2(\boldsymbol{r},t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_1^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\psi_2(\boldsymbol{r},t)\right]\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}$$

$$=-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int[\psi_1^*\hat{H}\psi_2-\psi_2\hat{H}\psi_1^*]\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}$$

因为

$$\begin{aligned}&\psi_1^*\hat{H}\psi_2-\psi_2\hat{H}\psi_1^*\\&=-\frac{\hbar^2}{2m}(\psi_1^*\nabla^2\psi_2-\psi_2\nabla^2\psi_1^*)+\psi_1^*V\psi_2-\psi_2V\psi_1^*\\&=-\frac{\hbar^2}{2m}(\psi_1^*\nabla^2\psi_2-\psi_2\nabla^2\psi_1^*)\\&=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\cdot(\psi_1^*\nabla\psi_2-\psi_2\nabla\psi_1^*)\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\psi_1^*\psi_2\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}&=\frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}\iiint_{-\infty}^{\infty}\nabla\cdot(\psi_1^*\nabla\psi_2-\psi_2\nabla\psi_1^*)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\\&=\frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}\oiint(\psi_1^*\nabla\psi_2-\psi_2\nabla\psi_1^*)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}\end{aligned}$$

由于在无穷远处，曲面上的 $\psi_1|_{r\to\infty}\to 0$，$\psi_2|_{r\to\infty}\to 0$，上面的曲面积分为零。所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\psi_1^*\psi_2\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}=0$$

6. 设一个一维自由粒子的初态 $\psi(x,0)=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}p_0x}$，求 $\psi(x,t)$。

解　由于初态 $\psi(x,0)$ 是一个动量的本征态，具有确定的动量，因而具有确定的能量

$$E=\frac{p_0^2}{2m}\quad（定态）$$

因此

$$\psi(x,t)=\psi_E(x)f(t)=\psi(x,0)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Et}=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left(p_0x-\frac{p_0^2}{2m}t\right)}$$