非线性奇异控制系统

王文涛 著

冶金工业出版社

非线性奇异控制系统

王文涛 著

北 京
冶 金 工 业 出 版 社
2005

内容提要

本书主要介绍非线性奇异系统研究的最新理论成果及其应用，包括非线性奇异系统的工程背景、结构特征和数学准备知识；非线性奇异系统的正则性与正则化问题；非线性奇异系统的解耦控制；非线性奇异系统的零动态及其应用；非线性奇异系统的受控不变分布和非线性奇异系统的能控性子分布。

本书可作为线性和非线性系统方向的硕士、博士研究生的教材，也可作为该方向研究者的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

非线性奇异控制系统/王文涛著．—北京：冶金工业出版社，2005.9

ISBN 7-5024-3746-0

Ⅰ．非…　Ⅱ．王…　Ⅲ．非线性控制系统　Ⅳ．TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 033971 号

出版人　曹胜利（北京沙滩嵩祝院北巷 39 号，邮编 100009）
责任编辑　郭庚辰（13693126653）　美术编辑　李　心
责任校对　王永欣　李文彦　责任印制　牛晓波
北京兴华印刷厂印刷；冶金工业出版社发行；各地新华书店经销
2005 年 9 月第 1 版，2005 年 9 月第 1 次印刷
850mm × 1168mm　1/32；6.625 印张；180 千字；204 页；1-2000 册
15.00 元
冶金工业出版社发行部　电话：(010)64044283　传真：(010)64027893
冶金书店　地址：北京东四西大街 46 号(100711)　电话：(010)65289081

前言

自20世纪70年代，D. G. Luenberger等人先后在经济系统、电力系统、化工过程等发现奇异系统的特征以来，奇异系统的研究受到诸多学者的重视。特别是以受限机械运动控制为主要形式的机器人的发展，为奇异系统的研究提供了广泛的工程背景。多年来，围绕线性奇异系统（广义系统）取得了一系列研究成果。但是，非线性奇异系统的研究进展缓慢，仅在可解性和数值解方面有一些成果。进入20世纪80年代后期，受非线性系统几何理论的推动，非线性奇异系统的研究取得较大进展，包括线性化、反馈控制、输入输出解耦、干扰解耦以及输出跟踪等方面都取得多项成果。但是，控制系统几何理论的核心内容——分布理论在非线性奇异系统研究中体现甚少。近十年，在这方面的研究有些进展。

本书主要介绍非线性奇异系统研究的最新理论成果及其应用，包括非线性奇异系统的工程背景，非线性奇异系统的结构特征，研究非线性奇异系统的数学准备知识；非线性奇异系统的正则性与正则化问题，正则化算法；非线性奇异系统的输入输出解耦；非线性奇异系统的干扰解耦；用一定的篇幅论述了非线性奇异系统的零动态问题，包括零动态概念、零动态算法，并论证了该算法的一些性质，特别是反馈不变性质，也给出零动态应用的一些结果，特别是系统的零动态与其稳定性的关系。最后两章论述了非线性奇异系统的受控不变分布和能控性子分布的问题，给出了系统受控不变分布和能控性子分布的概念，论述了两个分布的一些性质，主要是反馈不变性质和代数约束的独立性质，也论述了两个分布对改进系统控制的作用。

本书可作为线性和非线性系统方向的硕士、博士研究生的参考教材，也可供从事该方向研究的同志参考。

由于水平有限，书中的不妥之处，恳请读者批评指正。

作　者

2004年12月

目　录

1 准备知识

1.1 系统的描述

20 世纪 70 年代，Luenberger 在研究经济问题时给出了 Leontief 动态投入产出模型，其数学表达式为

$$\boldsymbol{B}_t x_{t+1} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_t + \boldsymbol{B}_t) x_t - y_t \tag{1.1}$$

式中 $\boldsymbol{B}_t$ 为投资矩阵，$\boldsymbol{A}_t$ 为直接消耗矩阵，x_t 为产量向量，y_t 为最终净需求向量。如果不考虑各部门流动基金、大修理等因素，$\boldsymbol{B}_t$ 通常为奇异矩阵。因此，式（1.1）被称为奇异系统（Singular system）模型。后来，许多学者陆续发现在动力系统、化工过程、电子网络系统等都有奇异系统模型。特别是以机器人控制模型为主的受限机械系统成为奇异系统的典型代表。这样，奇异系统逐渐成为控制系统的一类，受到诸多学者的重视。

奇异系统通常由以下微分方程描述

$$F(x, \dot{x}, u, t) = 0 \tag{1.2}$$

式中 x 称为状态向量，$\dot{x}$ 是状态向量对时间的导数，u 表示控制输入，一般也为向量，t 为时间。

如果雅各比矩阵（Jacobian matrix）$\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}$ 是奇异的，但有常秩，系统（1.2）可转化为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, u, t) \\ 0 &= f_2(x_1, x_2, u, t) \end{aligned} \tag{1.3}$$

如果不显含时间 t，即系统的形式为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, u) \\ 0 &= f_2(x_1, x_2, u) \end{aligned} \tag{1.4}$$

(1.3) 或 (1.4) 又称为微分代数系统 (Differential-algebraic system)(广义系统 Descriptor system、半状态空间系统 Semi-state system)。

根据系统的结构特征，奇异系统有以下几种主要类型:

(1) 线性时不变奇异系统，一般形式为

$$\boldsymbol{E}\dot{x} = \boldsymbol{A}x + \boldsymbol{B}u$$
$$y = \boldsymbol{C}x + \boldsymbol{D}u$$

式中 $\boldsymbol{E}$ 为定常奇异矩阵，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 分别为有适当阶数的定常矩阵。

(2) 线性时变奇异系统，一般形式为

$$\boldsymbol{E}(t)\dot{x} = \boldsymbol{A}(t)x + \boldsymbol{B}(t)u$$
$$y = \boldsymbol{C}(t)x + \boldsymbol{D}(t)u$$

式中 $\boldsymbol{E}(t)$ 为奇异矩阵, $\boldsymbol{A}(t)$,$\boldsymbol{B}(t)$,$\boldsymbol{C}(t)$ 和 $\boldsymbol{D}(t)$ 分别为有适当阶数的矩阵。

(3) 非线性奇异系统，主要形式有

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u, t)$$
$$0 = f_2(x_1, x_2, u, t)$$

或

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u)$$
$$0 = f_2(x_1, x_2, u)$$

对于非线性奇异系统，其一般形式为 (1.3)，更特殊一点的称为仿射的非线性奇异系统，其形式为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x) + p_1(x)z + g_1(x)u \\ 0 &= f_2(x) + p_2(x)z + g_2(x)u \\ y &= h(x) + r(x)z + s(x)u \end{aligned} \tag{1.5}$$

其中 x 是微分变量，z 称为代数变量，u 为输入，y 为输出;

$f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 分别为 n 维和 s 维光滑的向量值函数，$p_i(x)$ 与 $g_i(x), i=1,2$，分别为有适当阶数的光滑的矩阵值函数；$h(x) \in R^m$，$r(x)$ 与 $s(x)$ 也为有适当阶数的矩阵值函数。

系统（1.5）的特点是关于代数变量 z 和输入变量 u 为线性的。通过适当的坐标变换和变量分组等，受限机器人系统等许多系统都可化为（1.5）的形式。更特殊的有

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= f_1(x) + p_1(x)z + g_1(x)u \\
0 &= f_2(x) + p_2(x)z + g_2(x)u \\
y &= h(x)
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

本书主要讨论形式为（1.6）的仿射非线性奇异一些基础理论与综合控制问题。

1.2 几何基础知识

为了方便叙述，我们借助一般的仿射非线性系统为例，引入一些数学基础概念与记号等。考虑下面的非线性系统

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x)u \\
y_i &= h_i(x) \qquad 1 \leqslant i \leqslant p
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

构造非线性系统（1.7）的 $f, g_1, \cdots, g_m$ 为 R^n 的开集 U 到 R^n 的映射，当 $x \in U$ 为一个点时，$f(x), g_1(x), \cdots, g_m(x)$ 表示一些 n 维向量，其分量都为实变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的实值函数，即

$$
f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \cdots, x_n) \\ f_2(x_1, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \cdots, x_n) \end{pmatrix}, \quad g_i(x) = \begin{pmatrix} g_{1i}(x_1, \cdots, x_n) \\ g_{2i}(x_1, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ g_{ni}(x_1, \cdots, x_n) \end{pmatrix} \tag{1.8}
$$

构成系统（1.7）输出的 $h_1,\cdots,h_p$ 是在 U 上定义的实值函数，$h_1(x),\cdots,h_p(x)$ 为其在一点 $x\in U$ 的函数值，通常表示为

$$h_i(x)=h_i(x_1,\cdots,x_n) \tag{1.9}$$

在以后的讨论中，我们始终假设映射 $f,g_1,\cdots,g_m$ 及函数 $h_1,\cdots,h_p$ 是光滑的，也就是在（1.8）和（1.9）中实值函数是 $x_1,\cdots,x_n$ 的任意次连续可微函数，偶尔也需要假设这些函数在其定义的区域上是解析的。

对开集上的每一点 $x\in U$，光滑映射 $f,g_1,\cdots,g_m$ 定义一些 n 维向量，即 $f(x),g_1(x),\cdots,g_m(x)$，这些向量为定义在 U 上的向量场（vector fields）。在许多情况下，需要给出余向量场（covector fields）或对偶向量场，当向量场属于向量空间 V 时，其对偶向量场为对偶空间（dual space）V^* 中的向量。

在下面的讨论中，将光滑的余向量场看作 $1\times n$ 光滑向量（行向量）是很自然的，即向量空间 V 中向量记为

$$v=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

时，对偶空间 V^* 中的余向量通常记为

$$\omega^*=[\omega_1\omega_2\cdots\omega_n]$$

其中 $\omega_i,1\leqslant i\leqslant n$,为 R^n 上的光滑函数，即

$$\omega^*=[\omega_1(x_1,\cdots,x_n)\omega_2(x_1,\cdots,x_n)\cdots\omega_n(x_1,\cdots,x_n)]$$

向量 v 与余向量 ω^* 的运算（内积，inner product）定义为

$$\omega^*v=\sum_{i=1}^{n}\omega_iv_i$$

向量 v 与余向量 ω^* 的内积通常记为 $\langle\omega^*,v\rangle$，即

$$\langle\omega^*,v\rangle=\sum_{i=1}^{n}\omega_iv_i$$

设 λ 为在 R^n 的开集 U 上定义的实值函数，则 λ 的微分（differential）或梯度（gradient）是一类常见的余向量场，记为 $d\lambda$，即

$$d\lambda(x) = \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}\ \frac{\partial\lambda}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial\lambda}{\partial x_n}\right) \tag{1.10}$$

式（1.10）的右边也称为函数 λ 的雅各比矩阵，写成更简洁的记号为

$$d\lambda(x) = \frac{\partial\lambda}{\partial x} \tag{1.11}$$

对于给定的余向量场 ω，如果存在实值函数 λ，使得

$$\omega = d\lambda(x)$$

则余向量场 ω 被称为一个恰当微分（exact differential）。

下面给出三个典型的微分算子（differential operation），包括向量场和余向量场。这些算子在非线性控制系统的分析中会经常使用。第一个算子是包含实值函数 λ 和向量场 f，当然都是定义在 R^n 的开集 U 上，运算产生一个新的函数，等于余向量场 $d\lambda$ 与 f 的内积，即

$$\langle d\lambda(x), f(x)\rangle = \frac{\partial\lambda}{\partial x}f(x) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}f_i(x)$$

这个函数有时也被称为函数 λ 沿向量场 f 的导数（derivative of λ along f），经常被记为 $L_f\lambda$，即对每一点 $x \in U$

$$L_f\lambda(x) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}f_i(x)$$

重复使用这个算子是可以的。例如，函数 λ 沿向量场 f 求导数后再沿向量场 g 求导数，得一个新的函数

$$L_gL_f\lambda(x) = \frac{\partial(L_f\lambda)}{\partial x}g(x)$$

如果 λ 已经沿 f 求了 $k-1$ 次导数，记为 $L_f^{k-1}\lambda$，则 λ 沿 f 的 k 次导数为

$$L_f^k\lambda(x) = \frac{\partial(L_f^{k-1}\lambda)}{\partial x}f(x)$$

为了方便，我们规定 $L_f^0\lambda(x) = \lambda(x)$。

第二种算子涉及到两个向量场 f 和 g，运算产生一个新的向量场，记为 $[f,g]$，对于每一点 $x\in U$ 定义

$$[f,g](x) = \frac{\partial g}{\partial x}f(x) - \frac{\partial f}{\partial x}g(x)$$

其中

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

分别表示映射 f 和 g 的雅各比矩阵。

这样定义的向量场称为向量场 f 和 g 的李乘积（Lie's product）或李括号（Lie's bracket）。从定义可看出，向量场 g 与向量场 f 进行重复的李括号运算是可以的，如 $[f,[f\cdots[f,g]]]$。为了避免记号的混乱，对于 $k\geqslant1$，我们记

$$\mathrm{ad}_f^k g(x) = [f,\mathrm{ad}_f^{k-1}g](x)$$

注意，$\mathrm{ad}_f^0 g(x) = g(x)$，$\mathrm{ad}_f^1 g(x) = [f,g](x)$。

向量场与向量场的李括号满足下面三个基本性质：

（1）线性性质。如果 f_1,f_2,g_1,g_2 是向量场，r_1，r_2 为实数，则

$$[r_1 f_1 + r_2 f_2, g_1] = r_1[f_1, g_1] + r_2[f_2, g_1]$$

$$[f_1, r_1 g_1 + r_2 g_2] = r_1[f_1, g_1] + r_2[f_1, g_2]$$

（2）反对称性质。即

$$[f,g] = -[g,f]$$

（3）满足雅各比恒等式（Jacobi identity）。如果 f,g,p 都是向量场，则

$$[f,[g,p]] + [g,[p,f]] + [p,[f,g]] = 0$$

性质（1），（2）与（3）的证明很容易，留给读者做练习。

第三种算子涉及向量场 f 与余向量场 ω，运算结果产生一个新的余向量场，记为 $L_f\,\omega$，对于每一点 $x \in U$，定义为

$$L_f\omega(x) = f^{\mathrm{T}}(x)\left(\frac{\partial \omega^{\mathrm{T}}}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} + \omega(x)\frac{\partial f}{\partial x}$$

这里上标“T”表示转置（transposition）。余向量场 $L_f\omega$ 称为余向量场 ω 沿向量场 f 的导数（derivative of ω along f）。

这些算子在以后的讨论中会经常用到，它们有一些运算规则，一些属于某算子，一些属于算子之间，这里给出这些规则，留给读者去证明。

（1）如果 α 为实值函数，f 为向量场而 λ 为实值函数，则

$$L_{\alpha f}\lambda(x) = (L_f\lambda(x))\alpha(x) \tag{1.12}$$

（2）如果 α，β 为实值函数，f，g 为向量场，则

$$[\alpha f, \beta g](x) = \alpha(x)\beta(x)[f,g](x) + (L_f\beta(x))\alpha(x)g(x) - (L_g\alpha(x))\beta(x)f(x) \tag{1.13}$$

（3）如果 f,g 为向量场，λ 为实值函数，则

$$L_{[f,g]}\lambda(x) = L_f L_g\lambda(x) - L_g L_f\lambda(x) \tag{1.14}$$

（4）如果 α，β 为实值函数，f 为向量场而 ω 为余向量场，

则

$$L_{\alpha f}\beta\omega(x) = \alpha(x)\beta(x)(L_f\omega(x)) + \beta(x)\langle\omega(x), f(x)\rangle \mathrm{d}\alpha(x)$$
$$+ (L_f\beta(x))\alpha(x)\omega(x) \tag{1.15}$$

（5）如果 f 为向量场，λ 为实值函数，则

$$L_f \mathrm{d}\lambda(x) = \mathrm{d}L_f\lambda(x) \tag{1.16}$$

（6）如果 f, g 为向量场，ω 为余向量场，则

$$L_f\langle\omega, g\rangle(x) = \langle L_f\omega(x), g(x)\rangle + \langle\omega(x), [f,g](x)\rangle \tag{1.17}$$

作为练习，我们验证，比如式（1.12），由定义

$$L_{\alpha f}\lambda(x) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}\right)(\alpha(x)f_i(x))$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}f_i(x)\right)\alpha(x)$$
$$= (L_f\lambda(x))\alpha(x)$$

对于（1.15），有

$$[L_{\alpha f}\beta\omega]_i = \sum_{j=1}^{n}\alpha f_j\frac{\partial\beta\omega_i}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n}\beta\omega_j\frac{\partial\alpha f_j}{\partial x_i}$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\alpha f_j\beta\frac{\partial\omega_i}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n}\alpha f_j\omega_i\frac{\partial\beta}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n}\beta\omega_j\alpha\frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n}\beta\omega_j f_j\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}$$
$$= [\alpha\beta(L_f\omega)]_i + [\alpha(L_f\beta)\omega]_i + [\beta\langle\omega, f\rangle\mathrm{d}\alpha]_i$$

这里再介绍一些关于坐标变换（change of coordinates）的问题。在非线性控制系统的分析中，为了阐明系统的某些性质，如能控性、能观性、稳定性与解耦问题等，经常需要引进坐标变换。

对于线性系统

$$\dot{x} = \boldsymbol{A}x + \boldsymbol{B}u$$

$$y = \boldsymbol{C}x$$

一般考虑线性变换

$$z = \boldsymbol{T}x$$

其中 $\boldsymbol{T}$ 为 $n \times n$ 非奇异矩阵。经变换后，系统化为

$$\dot{z} = \overline{\boldsymbol{A}}z + \overline{\boldsymbol{B}}u$$

$$y = \overline{\boldsymbol{C}}z$$

其中

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{TAT}^{-1}, \quad \overline{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{TB}, \quad \overline{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{CT}^{-1}$$

如果系统为非线性系统，则多考虑非线性坐标变换。非线性坐标变换一般表示为

$$z = \boldsymbol{\Phi}(x)$$

其中 $\boldsymbol{\Phi}(x)$ 为 n 个变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的 R^n 值函数，即

$$\boldsymbol{\Phi}(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1,\cdots,x_n) \\ \varphi_2(x_1,\cdots,x_n) \\ \vdots \\ \varphi_n(x_1,\cdots,x_n) \end{pmatrix}$$

并具有下列性质：

（1）$\boldsymbol{\Phi}(x)$ 是可逆的，即存在反函数 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(z)$ 使得对于一切 $x \in R^n$，有

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\boldsymbol{\Phi}(x)) = x$$

（2）$\boldsymbol{\Phi}(x)$ 与 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(z)$ 都为光滑映射，即具有各阶连续偏导数。

满足（1）与（2）的坐标变换称为 R^n 上的整体微分同胚

(global diffeomorphism)。条件（1）是保证变换有逆变换 $\Phi^{-1}(z)$并能显露出原状态 x，即

$$\Phi^{-1}(z)=x$$

条件（2）是保证在新坐标下的系统仍然是光滑的。

有时定义一个整体坐标变换是困难的，而且检查性质（1）与（2）也很难。在多数情况下，仅在某给定点的某邻域里定义一个坐标变换，这种坐标变换称为局部微分同胚（local diffeomorphism），而且对于局部微分同胚的条件也较容易检验，事实上，有下面的结论。

定理 1.1 假设 $\Phi(x)$ 是定义在 R^n 的某开子集 U 上的光滑函数，又假设 $\Phi(x)$ 的雅各比矩阵在点 $x=x^0$ 处非奇异，则在 U 的某个包含 x^0 开子集 $U^0\subset U$ 内，$\Phi(x)$ 定义一个局部微分同胚。

例 1.1 考虑函数

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}=\Phi(x_1,x_2)=\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ \sin x_2 \end{pmatrix}$$

注意到函数 $\Phi(x_1,x_2)$ 在整个 R^2 上有定义，其雅各比矩阵为

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \cos x_2 \end{bmatrix}$$

在 $x^0=(0,0)$ 处的秩为 2。可验证在开子集

$$U^0=\left\{(x_1,x_2):\ |x_2|<\frac{\pi}{2}\right\}$$

内，$\Phi(x_1,x_2)$ 为一对一映射（injective），故定义一个局部微分同胚。

下面分析经过坐标变换 $z=\Phi(x)$ 后，非线性控制系统的一些改变。首先

$$z(t)=\Phi(x(t))$$

两边对时间 t 求导数，得

$$\dot{z}(t)=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\times\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\Phi}{\partial x}[f(x(t))+g(x(t))u(t)]$$