◎北京创新教学与考试研究中心成果◎

教材全解丛书

中学教材全解

ZHONGXUEJIAOCAI QUANJIE

总主编：薛金星

初三几何

陕西人民教育出版社

北京创新教学与考试研究中心成果

中学教材全解

初三几何

主编　金凤明

陕西人民教育出版社

(陕）新登字 004 号

中学教材全解

初三几何

陕西人民教育出版社出版发行

（西安市长安路南段 376 号）

各地新华书店经销　　北京市朝阳经纬印刷厂印刷

850×1168 毫米　32 开本　12 印张　250 千字

2000 年 6 月第 1 版　2001 年 7 月第 2 次印刷

ISBN 7—5419—7918—X/G・6840

定价：13.20 元

再版前言

《中学教材全解》系列丛书为北京创新教学与考试研究中心的专项研究成果。我们祝愿《中学教材全解》将伴随您度过中学阶段的美好时光，帮您迈向日夜向往的高等学府。

这套丛书与其它同类书相比具有以下几个鲜明特色：

第一，新。

首先是教材新。本书以最新教改精神为依据，以现行初、高中最新教材为蓝本编写。其次是体例新。紧扣教材，步步推进，设题解题、释疑解难、课后自测、迁移延伸，逐次深入。其三是题型（材料）新。书中选用题型（材料）都是按中考、高考要求精心设计挑选，让读者耳目一新。

第二，细。

首先是对教材讲解细致入微。以语文科为例，小到字的读音、词的辨析，大到阅读训练和作文训练都在本书中有所体现。其次是重点难点详细讲析，既有解题过程又有思路点拨。其三是解题方法细，一题多解，多题一法变通训练，总结规律。

第三，精。

首先是教材内容讲解精。真正体现围绕重点，突破难点，引发思考，启迪思维。根据考点要求，巧设问题，精讲精练，使学生举一反三，触类旁通。其次是练习配置精，注重典型性，避免随意性，注重迁移性，避免孤立性，实现由知识到能力的过渡。

第四，透。

首先是对教纲考纲研究得透。居高临下把握教材，立足于教材，又不拘泥于教材。其次是对学生知识储备研究得透。学习目标科学可行，注重知识“点”与“面”的联系，“效”与“学”的联系。再次是对问题讲解得透，一题多问，一题多解，培养求异思维和创新思维能力。

第五，全。

首先是知识分布全面。真正体现了“一册在手，学习内容全有”的编写指导思想。其次是该书的信息量大。它涵盖了中学文化课教学全部课程和教与学的全部过程，内容丰富，题量充足。再次是适用对象全面。本书着眼于面向全国重点、普通中学的所有学生，丛书内容由浅入深，由易到难，学生多学易练，学习效果显著。

本系列丛书虽然从策划、编写，再到出版精心设计，细致操作，可谓尽心尽力，但疏漏之处在所难免，诚望广大读者批评指正。

薛金星

2001 **年** 8 **月于北师大**

目　录

第六章

解直角三角形

本章综合解说

本章内容分为两大节，第一大节是有关锐角三角函数的基础知识；第二大节是直角三角形中边、角之间的关系，利用这些关系解直角三角形，并利用解直角三角形的有关知识和通过与三角形或四边形有关的实习作业来解决某些简单的实际问题．其主要内容是：锐角三角函数的概念；30°、45°、60°角的各个三角函数值；锐角三角函数的增减性；三角函数关系式及数形结合的有关问题．

本章的重点是：锐角三角函数的概

念和解直角三角形.特殊锐角与其三角函数值之间的对应关系也很重要,即:已知特殊锐角,说出它的四个三角函数值;反过来,已知特殊角的三角函数值,说出这个角的度数.

本章的难点也是锐角三角函数的概念,而且又是学好本章的关键.

本章内容属于三角学,中学数学把三角学内容分成两个部分:第一部分为本章的解直角三角形;第二部分是三角学内容的主体部分,包括解斜三角形、三角函数、反三角函数和三角方程,这将在高中阶段学习,第一部分是第二部分的必要基础,只有学好锐角三角函数和直角三角形解法,才能继续学习三角函数和斜三角形的解法.

一、锐角三角函数

6.1　正弦和余弦

学习目标要求

1. 了解直角三角形中正弦和余弦的概念，能够正确地用 $\sin A$，$\cos A$ 表示直角三角形中两边的比.

2. 熟记 30°，45°，60°角的正弦和余弦值，会计算含有这三个特殊锐角的三角函数值的式子，会由一个特殊锐角的正弦和余弦值说出这个角的度数.

3. 初步了解一个锐角的三角函数值与它的余角的三角函数值关系后，会正确地使用"正弦和余弦表"，由已知锐角求出它的正弦或余弦值，由已知正弦或余弦值，求出它对应的锐角. 知道 $\sin 0°$，$\cos 90°$的值都是 0，$\sin 90°$，$\cos 0°$的值都是 1.

教材内容详解

【相关知识回顾】

1. 直角三角形：有一个角是直角的三角形.

2. 直角三角形斜边中线等于斜边一半.

3. 直角三角形中，30°角所对的直角边等于斜边的一半；如果一条直角边等于斜边一半，那么这条直角边所对角为 30°.

4. 勾股定理：Rt△ABC 中，∠C＝90°，∠A、∠B、∠C 所对直角边分别为 a、b、c，则有 $a^2+b^2=c^2$.

即：直角三角形两直角边平方和等于斜边平方.

$\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$

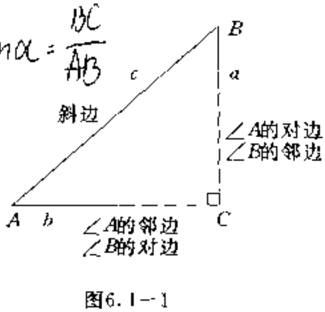

图6.1－1

【新知识点讲解】

知识点 1　正弦和余弦的概念

如图 6.1－1，在△ABC 中，∠C＝90°，我们把锐角 A 的

①对边与斜边的比叫做∠A 的正弦，记作 $\sin A$，

$\sin A=\dfrac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}}=\dfrac{a}{c}$

②邻边与斜边的比叫做$\angle A$的余弦，记作$\cos A$，

$\cos A=\dfrac{\angle A\text{的邻边}}{\text{斜边}}=\dfrac{b}{c}$

说明：①由于直角三角形中斜边大于直角边，且各边长均为正数，所以有结论：

$0<\sin A<1$，$0<\cos A<1$（$\angle A$为锐角）

②$\sin A$、$\cos A$都是整体符号，不能看成$\sin\cdot A$，$\cos\cdot A$

③当$\angle A$固定时，$\angle A$的正弦值、余弦值都是固定的。

④“sinA”和“$\cos A$”等只表示用一个大写字母表示一个角的正、余弦，对于用三个大写字母表示的角，在表示它的正弦和余弦时，角的符号“$\angle$”不能省略，例如“$\angle ADB$的正弦”应写成“$\sin\angle ADB$”而不能写成“$\sin ADB$”。

例如：①已知：α为锐角，且$\sin\alpha=\dfrac{2}{3}$，则$\cos\alpha=$________

分析：已知一个锐角的正弦值，求其余弦值，可直接运用定义，如图6.1-1，设$\angle A=\alpha$，则$\sin\alpha=\dfrac{a}{c}=\dfrac{2}{3}$。设$a=2x$，$c=3x$，由$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{5}x$，所以$\cos\alpha=\cos A=\dfrac{b}{c}=\dfrac{\sqrt{5}x}{3x}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

本题答案为：$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

②判断下列等式是否成立

$\sin10°+\sin20°=\sin30°$

$\cos10°+\cos20°=\cos30°$

分析：$\sin10°$，$\sin20°$是一个统一整体，不能看成$\sin\cdot10°$，$\sin\cdot20°$，故等式$\sin10°+\sin20°=\sin(10°+20°)=\sin30°$不成立，下同。

答：均不成立

③在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，各边长度都扩大2倍，那么锐角A的正弦、余弦值有什么变化？

分析：$\angle A$固定，$\angle A$的三角函数值也固定，与边的长短无关，所以没有变化。

答：锐角A的正、余弦值不变。

知识点 2　特殊角度(0°,30°,45°,60°,90°)的正弦或余弦值.

三角函数	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

说明:①$\sin0°=0,\sin90°=1,\cos0°=1,\cos90°=0$

只须记住结果(通过查表求得)

②30°,45°,60°角的正弦或余弦值要会利用特殊直角三角形来求得.

例如　利用直角三角形,求 60°角的正弦或余弦值.

如图 6.1－2,$\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,$\angle B=60°$,求 $\sin B$,$\cos B$.

解:设 BC 长为 a,

$\because \mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,$\angle B=60°$.

$\therefore \angle A=90°-\angle B=30°$

$\therefore AB=2BC=2a$,

$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{3}a$

$\therefore \sin B=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$　$\cos B=\frac{BC}{AB}=\frac{1}{2}$

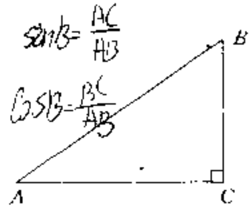

图6.1－2

知识点 3　正、余弦之间的关系式:

1)$\sin A=\cos(90°-A)$　$\cos A=\sin(90°-A)$　　2)$\sin^2A+\cos^2A=1$

说明:①关系式 1)在本章中用处仅限于查表和计算,而不是证明.

②关系式 2)出现于教材第 19 页习题 6.1B 中,但可作为公式直接使用.

例如:①计算 $\sin53°\cos37°+\cos53°\sin37°$的值.　　(山西省 98 中考题)

分析:本题的锐角 53°,37°不是特殊角,并且不能查表,故有特殊方法.通过观察不难发现 53°与 37°这两个角互余,则有 $\sin53°=\sin(90°-37°)=\cos37°$ 同理 $\cos53°=\sin37°$,所以原式变为 $\cos^237°+\sin^237°$(或 $\sin53°+\cos^253°$)由 $\sin^2A+\cos^2A=1$ 知:原式$=1$

解:$\because \sin53°=\sin(90°-37°)=\cos37°$

$\cos53°=\cos(90°-37°)=\sin37°$

$\therefore \sin53°\cos37°+\cos53°\sin37°=\cos^237°+\sin^237°=1$

说明:公式 $\sin^2A+\cos^2A=1$ 的应用很方泛,大家必须熟记它.

②已知:$\angle A$ 为锐角,并且 $\sin A=\frac{8}{17}$,求 $\cos A$ 的值.

例如：②已知：$\angle A$ 为锐角，并且 $\sin A=\frac{8}{17}$，求 $\cos A$ 的值.

分析：本题可有二种思路，其一可根据 $\sin A=\frac{8}{17}$ 构造一个 $Rt\triangle ABC$，其中 $\angle C=90°$，$a=8k$，$c=17k$，进而根据勾股定理、余弦的定义求出 $\cos A$；其二可根据 $\sin^2A+\cos^2A=1$ 直接求出 $\cos A$.

解法一：构造 $Rt\triangle ABC$，如图示 6.1－3

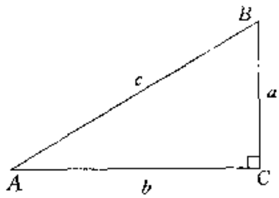

图6.1－3

$\because \sin A=\frac{8}{17}$　　$\therefore \frac{a}{c}=\frac{8}{17}$

设 $a=8k$，$c=17k(k>0)$

则 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{(17k)^2-(8k)^2}$

$=15k$

$\therefore \cos A=\frac{b}{c}=\frac{15k}{17k}=\frac{15}{17}$

解法二：$\because \sin^2A+\cos^2A=1$

$\therefore \cos^2A=1-\sin^2A$

又 $\because \angle A$ 是锐角　　$\therefore \cos A>0$

$\cos A=\sqrt{1-\sin^2A}=\sqrt{1-\left(\frac{8}{17}\right)^2}=\frac{15}{17}$

说明：①上述两种解法不同，但结果一致，其中第二种解法更直接，我们提倡用解法二来解这类题.

②这里由于 $\angle A$ 不是特殊的角，故解法一用三角函数的定义去求，但又由于三边长未知，故用设元的技巧解法.

知识点 4　当角度在 0°～90°之间变化时，正弦、余弦值的变化情况（增减性）

当角度在 0°～90°之间变化时，

①正弦值随着角度的增大（或减小）而增大（或减小）

②余弦值随着角度的增大（或减小）而减小（或增大）

说明：此结论一般用于不同角度的正、余弦值的大小比较以及查表时修正值的加减.

例如 1）比较大小：①$\sin 53°$ 与 $\sin 63°$　②$\sin 53°$ 与 $\cos 53°$

分析：一个锐角正弦值随角度增大而增大. 故有 $\sin 53°<\sin 63°$，②题可把 $\sin 53°$ 转化为 $\cos 37°$ 或把 $\cos 53$ 转化为 $\sin 37°$ 后进行比较.

解：①$\sin 53°<\sin 63°$

②∵$\sin53°=\sin(90°-37°)=\cos37°$　$\cos37°>\cos53°$

∴$\sin53°>\cos53°$

注：同角度的正、余弦值比较大小时

若$45°<\angle A<90°$，则 $\sin A>\cos A$

$\angle A=45°$，则 $\sin A=\cos A$

$0°<\angle A<45°$，则 $\sin A<\cos A$

2)已知：$\cos59°54'=0.5015$，且在"正弦和余弦表"中同一行的修正值是

分	1′	2′	3′
修正值	3	5	8

，则 $\cos59°56'$ 比 $\cos59°54'$ 的值　(　　)

(A)大 5　(B)小 5　(C)大 0.0005　(D)小 0.0005

分析：$\angle A$ 为锐角时，$0<\cos A<1$，故 A、B 答案不对，一个锐角余弦值随角度增大而减小，故 C 不对，

答：选 D.

综合例题讲解

例 1　已知：如图 6.1－4，在△ABC 中，$\angle A=30°$，$\angle B=45°$，$AC=4$，求 BC 的长.　(北京市海淀区 98 中考题)

分析：题中有 30°，45°特殊角，故想到把它们放到直角三角形中去.利用三角函数来解题.

解：过 C 作 $CD\perp AB$ 于 D

∴$\sin30°=\dfrac{CD}{AC}$

∵$AC=4$

∴$CD=4\sin30°=4\times\dfrac{1}{2}=2$

在 Rt△CDB 中，$BC=\dfrac{CD}{\sin45°}$

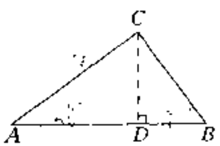

图6.1－4

∴$BC=\dfrac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{2}$

说明：在作高线构造直角三角形时，一般不过特殊角的顶点作垂线，这样便于利用特殊角解题.

例 2　求值：$\sin^2 10°+\sin^2 20°+\sin^2 30°+\cdots+\sin^2 90°$.

分析：10°，20°等角度并非特殊角度，单独不可求，需与其它项联立，题目中有多对角度互余，利用正、余弦之间的两组关系式可求.

解：原式 $=\sin^2 10°+\sin^2 20°+\sin^2 30°+\sin^2 40°+\sin^2(90°-40)+\sin^2(90°-30°)+\sin^2(90°-20°)+\sin^2(90°-10°)+\sin^2 90°$

$=\sin^2 10°+\sin^2 20°+\sin^2 30°+\sin^2 40°+\cos^2 40°+\cos^2 30°+\cos^2 20°+\cos^2 10°+\sin^2 90°$

$=(\sin^2 10°+\cos^2 10°)+(\sin^2 20°+\cos^2 20°)+(\sin^2 30°+\cos^2 30°)+(\sin^2 40°+\cos^2 40°)+\sin^2 90°$

$=1+1+1+1+1=5$

说明：解此类问题时，需熟记正、余弦有关公式.

考点剖析

1. 中考要求：

1)正、余弦的概念；

2)熟记 0°、30°、45°、60°、90°角的正、余弦值，会计算含有这五个特殊角度的正、余弦值的式子.

3)掌握互余两角的正、余弦的关系.

2. 命题方向和题型设置

三角函数是代数与几何的衔接点之一，是三角学的基础，同时也是中考的必考内容之一，正、余弦的有关问题，多见于计算题.

例 3　当 $a=\sin 45°$，$b=\sin 60°$时，求

$\dfrac{a^2+ab}{a^2+2ab+b^2}-(a^2-ab+b^2)\div\dfrac{a^3+b^3}{b}$的值.　　（安徽 97 中考题）

分析：式子较复杂，可先运用代数中乘法公式化简.

解：原式 $=\dfrac{a(a+b)}{(a+b)^2}-(a^2-ab+b^2)\cdot\dfrac{b}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}$

$=\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{b}{a+b}$

$=\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{\sin 45°-\sin 60°}{\sin 45°+\sin 60°}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

$=2\sqrt{6}-5$

说明：此类问题先化简，再求值.