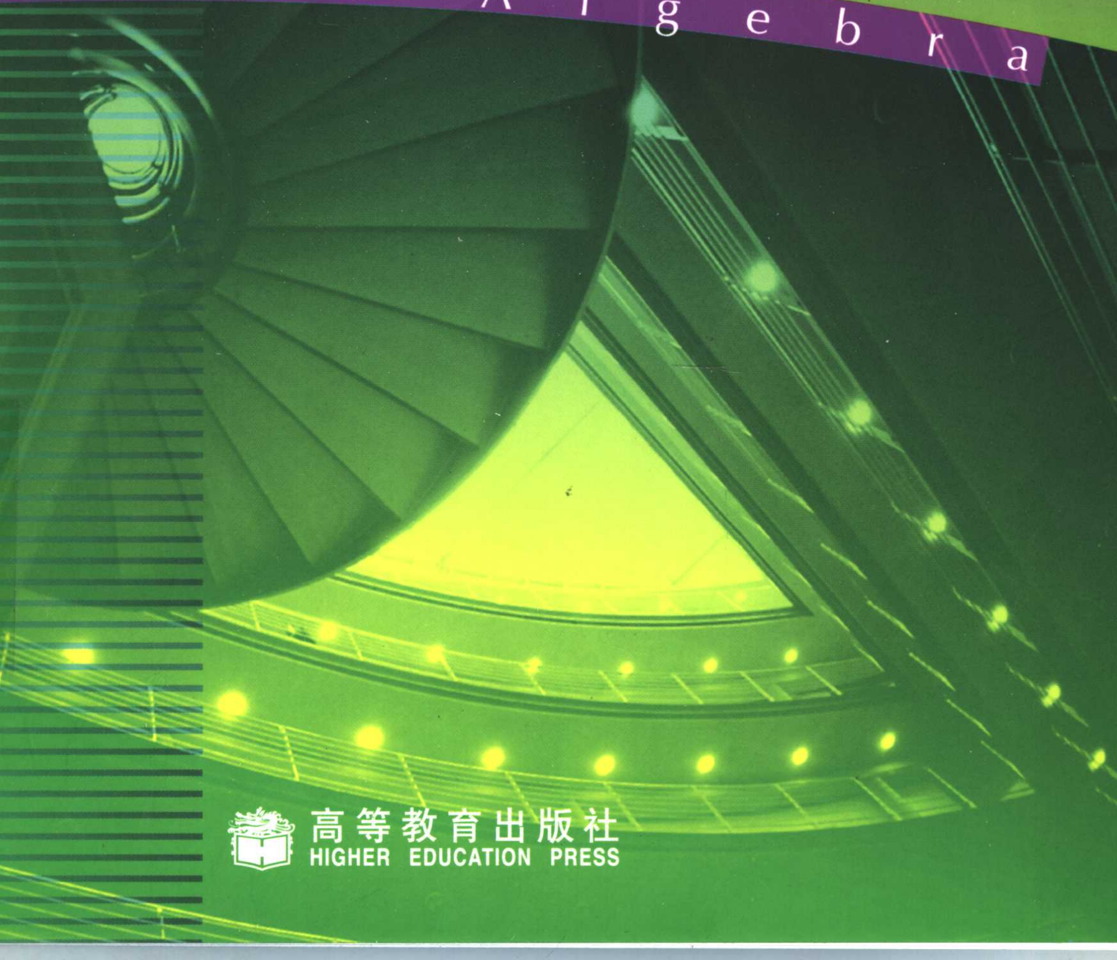
高等学校教材

线性代数

刘三阳 马建荣 编著

Linear Algebra



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

线　性　代　数

刘三阳　马建荣　编著

高等教育出版社

内容提要

本书是根据作者的教学经验并借鉴国内外同类优秀教材的长处编写而成的．全书分为七章，包括行列式、线性方程组、矩阵、向量空间、相似矩阵、二次型、线性空间与线性变换．书末附有习题答案．本书从线性方程组出发，以矩阵为工具，比较自然简便地阐明线性代数的基本概念、基本理论和方法．在内容处理上循序渐进、顺理成章、深入浅出，便于理解和接受．

本书适合高等院校工科专业、经济管理专业等非数学专业的学生用作教材，也可供科技工作者阅读或用作报考硕士生的参考书．

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/刘三阳，马建荣编著．—北京：高等教育出版社，2005.8

ISBN 7－04－017523－1

Ⅰ.线...　Ⅱ.①刘...②马...　Ⅲ.线性代数－高等学校－教材　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 071979 号

策划编辑　王　强　**责任编辑**　杨　波　**封面设计**　王凌波
责任绘图　吴文信　**版式设计**　张　岚　**责任校对**　金　辉
责任印制　韩　刚

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010－58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800－810－0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010－58581000		http://www.hep.com.cn
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
印　　刷	高等教育出版社印刷厂		http://www.landraco.com.cn
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2005 年 8 月第 1 版
印　　张	11	印　　次	2005 年 8 月第 1 次印刷
字　　数	200 000	定　　价	12.10 元

物料号　17523－00

前　言

线性代数是理工科和经济管理等有关专业的一门重要基础课，主要研究有限维线性空间的结构和线性空间上的线性变换.它不仅是学习其他数学课程的基础，而且也是在自然学科、工程技术和经济管理等各领域应用广泛的数学工具.

本书是根据教育部大学数学课程指导委员会制定的线性代数课程基本要求，结合作者长期从事线性代数和高等代数的教学经验和体会，并注意借鉴和吸收国内外优秀教材的优点，为适应各专业对线性代数的不同要求而编写的.它的主要内容包括行列式、线性方程组、矩阵、向量空间、相似矩阵、二次型、线性空间和线性变换等.为了适应近年来线性代数教学内容增多、学时减少和要求提高的新形势，本书在以下几个方面做了一些探索.

1. 从最基本的线性方程组的求解出发，比较自然地引出了消元法、矩阵及其秩和初等变换等概念，初学者容易接受.充分发挥矩阵秩的作用，用以简便地处理诸多问题.把向量组的线性相关性和齐次线性方程组紧密结合，使得向量组的线性相关性的讨论相对容易，许多推导证明得以简化.

2. 以线性方程组为主线、以矩阵为工具，阐明线性代数的基本概念、基本理论和方法.注重应用矩阵工具处理问题，强化初等变换和分块矩阵的应用.它不仅是矩阵运算的重要方法和技巧，而且在理论分析中也有重要作用.

3. 线性代数具有概念多、结论多、内容抽象和逻辑性强等特点.本书注意理论联系实际，尽量从问题或实例出发引出概念和方法.力求深入浅出，循序渐进，难点分散.

4. 注重揭示数学思想和知识的来龙去脉，不仅阐明结果，还注意剖析过程，以便培养学生的数学素养.

5. 安排有较多的典型例题，注重借题释理，以例示法.同时配有精心挑选的适量习题并附有答案，题型多样，难易兼备.

在本教材的编写过程中，得到了西安电子科技大学数学系的领导及同事的支持与协助.高等教育出版社的大力支持，尤其是高等理科分社徐刚社长、杨波、李艳馥编辑给予的帮助.使本教材得以顺利出版.在此一并表示衷心的感谢.

由于编者水平所限，书中有不妥或谬误之处在所难免，恳请读者批评指正.

作　者

2004年12月

目　录

第1章 行 列 式

科学研究、工程技术和经济活动中有许多问题可归结为线性方程组.行列式正是由研究线性方程组产生的,并成为一种重要的数学工具,它在自然科学、社会科学的许多领域里都有广泛的应用.

1.1 二、三阶行列式

对于二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

用第一个方程的 a_{22} 倍减去第二个方程的 a_{12} 倍,得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,有

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{1.2}$$

同理可得

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{1.3}$$

为了便于记忆,引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示数 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,称它为二阶行列式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

把 a_{11}, a_{22} 的连线称为二阶行列式的主对角线,把 a_{12}, a_{21} 的连线称为副对角线,那么二阶行列式的值就等于主对角线上元的乘积减去副对角线上元的乘积.

有了二阶行列式,方程组(1.1)的解可表示成

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{1.4}$$

类似地,在解三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1.5}$$

中,引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

称其为三阶行列式.其中 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$为三阶行列式的第 i 行第j 列上的元,称 i 为行指标,j 为列指标.

可以看出,三阶行列式共有六项,其中三项的前面为正号,另外三项的前面为负号,为了方便记忆,作图 1.1,图中每条实线所连接的三个数的乘积前面加上正号,每条虚线所连接的三个数的乘积前面加上负号,这种方法称为三阶行列式的对角线法则.

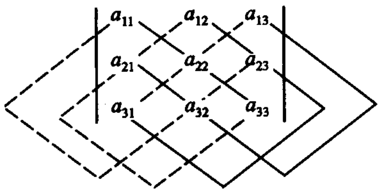


图 1.1

引入三阶行列式后,三元一次方程组(1.5)当 $D\neq0$ 时,有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

其中

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

行列式 D 称为方程组(1.5)的系数行列式.

例 1 解方程组

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-5x_3=-1 \\ x_1-2x_2+x_3=-4 \\ 3x_1+x_2+3x_3=2 \end{cases}$$

解 系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}=-12+9-5-30-2-9=-49\neq 0$$

由于 $D\neq 0$,方程组有唯一解,

$$D_1=\begin{vmatrix} -1 & 3 & -5 \\ -4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=49$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-98, \quad D_3=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-49$$

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{49}{-49}=-1$$

$$x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-98}{-49}=2, \quad x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{-49}{-49}=1$$

利用二阶和三阶行列式,使二元和三元线性方程组解的公式便于记忆和使用,人们自然想到把二阶和三阶行列式推广到 n 阶行列式,并利用 n 阶行列式来解含有 n 个未知量 n 个方程的线性方程组,使它的解有便于记忆的简洁形式.为了得到行列式的概念,需要首先讨论 n 个正整数组成的全排列的性质.

1.2 n 阶行列式

1. 排列与逆序

定义 1 由 n 个不同的正整数组成的一个有序数组,称为一个 n 元排列.

例如 1 3 2 4 5,2 1 4 5 3 都是 5 元排列.

n 元排列是 n 个不同元的全排列,因此 n 元排列总共有 n !个.

在所有 n 元排列中，有一个 n 元排列中的数是按从小到大的顺序排列而成的，称它为自然排列或标准排列. 除此之外，其余的排列或多或少会出现较大的数排在较小的数之前的情况. 比如在 5 元排列 1 5 4 2 3 中，5 排在 2 之前，4 排在 3 之前，为此给出下述定义.

定义 2 在 n 元排列 $j_1\ j_2 \cdots\ j_n$ 中，如果一个大的数排在一个小的数之前，就称这两个数构成一个逆序. 这个排列中所有逆序的总个数称为该排列的逆序数. 记为 $\tau(j_1\ j_2 \cdots\ j_n)$.

逆序数是偶数的排列称为偶排列. 逆序数是奇数的排列称为奇排列.

例 1 求下列排列的逆序数

(1) 1 5 4 3 6 2，(2) $n\ (n-1) \cdots 2\ 1$.

解 (1) 在该排列中排在 1,5,4,3,6,2 前面分别比 1,5,4,3,6,2 大的数的个数为 0,0,1,2,0,4. 因而 $\tau(1\ 5\ 4\ 3\ 6\ 2)=0+0+1+2+0+4=7$. 因而 1 5 4 3 6 2 为奇排列.

(2) 仿(1)可得 $\tau(n\ (n-1) \cdots 2\ 1)=0+1+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

定义 3 将一个 n 元排列中某两个数的位置互换，而其余数不动，就得到另一个排列，这样的变换称为对换.

例如，经 1,4 两数对换，偶排列 4 2 1 3 就变成奇排列 1 2 4 3，这表明对换会改变排列的奇偶性，一般有下述定理.

定理 1 对换一次改变排列的奇偶性.

证 (1) 对换的两数相邻. 设 n 元排列为

$$a_1\ a_2 \cdots a_l\ i\ j\ b_1\ b_2 \cdots\ b_m$$

其逆序数为 τ_1，将相邻两数 i 与 j 对换，得到新排列

$$a_1\ a_2 \cdots\ a_l\ j\ i\ b_1\ b_2 \cdots\ b_m$$

记该排列的逆序数为 τ_2，于是当 $i>j$ 时，$\tau_2=\tau_1-1$，而当 $i<j$ 时，$\tau_2=\tau_1+1$，故一次相邻对换改变排列的奇偶性.

(2) 一般情形. 设排列为

$$a_1\ a_2 \cdots\ a_l\ i\ b_1 \cdots\ b_m\ j\ c_1 \cdots\ c_p \tag{1.6}$$

将 i 与 j 对换，得新排列

$$a_1\ a_2 \cdots\ a_l\ j\ b_1 \cdots\ b_m\ i\ c_1 \cdots\ c_p \tag{1.7}$$

排列(1.7)可看作是由排列(1.6)把 i 依次与 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 对换，即作 m 次相邻对换得到排列

$$a_1\ a_2 \cdots\ a_l\ b_1 \cdots b_m\ i\ j\ c_1 \cdots\ c_p \tag{1.8}$$

后，再将排列(1.8)中 j 依次与 $i, b_m, \cdots, b_1$ 作 $m+1$ 次相邻对换而得. 这样由排列(1.6)经 $2m+1$ 次相邻对换可得排列(1.7)，于是由(1)知，排列(1.7)与排列

(1.6)的奇偶性不同.

推论 任一 n 元排列与标准排列可以经过一系列对换互变,并且所作对换的次数与这个 n 元排列有相同的奇偶性.

2. n 阶行列式的定义

仔细观察三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

不难发现如下规律.

(1) 三阶行列式的右端是形如

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

的6个乘积项的代数和,每一个这样的项是位于不同行不同列的三个元的乘积.这里第一个下标(行标)排成自然顺序1 2 3,而第二个下标(列标)组成3元排列 $j_1\ j_2\ j_3$,当 $j_1\ j_2\ j_3$ 取遍由1,2,3构成所有3元排列时,它正好对应上式右端的6个乘积项.

(2) 每个乘积项前面带有一定的符号,它是由排列 $j_1\ j_2\ j_3$ 的奇偶性决定的.当 $j_1\ j_2\ j_3$ 为奇排列时,带负号;当 $j_1\ j_2\ j_3$ 为偶排列时,带正号.即为 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}$.

因而,三阶行列式可表成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对1,2,3三个数的所有排列 $j_1\ j_2\ j_3$ 求和.

根据上述规律,我们给出 n 阶行列式的定义.

定义4 由 n^2 个元 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式,它表示所有可能取自不同行不同列的 n 个元乘积的代数和.把这 n 个元的行标按自然数顺序排列后,当列标所成排列是偶排列时带正号,奇排列时带负号,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中 $j_1\ j_2 \cdots\ j_n$ 是一个 n 元排列，$\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 元 $j_1\ j_2 \cdots\ j_n$ 排列求和.

行列式有时简记为 $|a_{ij}|$ 或 $\det(a_{ij})$.

当 $n=2,3$ 时，由此定义得到的二、三阶行列式与用对角线法则求得结果一致，当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a|=a$.

例 2 证明

(1) $D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$.

(2) $D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$.

证 (1) 我们关心的是 D_1 的展开式中可能不为 0 的项. 由于第 n 行除 a_{nn} 外其余元都为零，所以行列式通项中第 n 个元 a_{nj_n} 只能取 a_{nn}，而第 $n-1$ 个元 $a_{n-1,j_{n-1}}$ 不能取 $a_{n-1,n}$，这是因为展开式的每项不能存在两个同列元，故只能选取 $a_{n-1,n-1}$……第一行只能选取 a_{11}，从而

$$D_1 = (-1)^{\tau(1\,2\,\cdots\,n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

(2) 类似于(1)中推理，行列式的展开式中可能不为 0 的项也只有一项，即

$$\begin{aligned} D_2 &= (-1)^{\tau(n\,(n-1)\,\cdots\,2\,1)} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1} \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{nn} \end{aligned}$$

行列式 D_1 的主对角线以下的元全为 0，因而称它为上三角形行列式. 同样地，将主对角线以上全为 0 的行列式称为下三角形行列式. 上三角形行列式与下三角形行列式，统称为三角形行列式. 主对角线以外全为 0 的行列式称为对角行列式. 无论是三角形行列式还是对角行列式，它们的值都等于主对角线上元的乘积. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n$$

第二个行列式中,未写出的元全为 0.

定理 2　n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 的一般项可以记为

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n} \tag{1.9}$$

其中 $i_1\ i_2 \cdots\ i_n$ 与 $j_1\ j_2 \cdots\ j_n$ 均为 n 元排列.

证　由乘法交换律及定理 1 推知,式(1.9)经过 s 次互换两个因子的次序变成

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1 l_1} a_{2 l_2} \cdots a_{n l_n} \tag{1.10}$$

其中 $l_1\ l_2 \cdots\ l_n$ 是一个 n 元排列. 同时行标排列 $i_1\ i_2 \cdots\ i_n$ 与列标排列 $j_1\ j_2 \cdots j_n$ 分别经过 s 次对换变到 $1\ 2\ \cdots\ n$ 与 $l_1\ l_2 \cdots\ l_n$,它们的奇偶性分别改变了 s 次,总共改变了偶数 $2s$ 次,故

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} = (-1)^{\tau(1\,2\,\cdots\,n)+\tau(l_1 l_2 \cdots l_n)} = (-1)^{\tau(l_1 l_2 \cdots l_n)}$$

这说明式(1.9)是行列式 $|a_{ij}|$ 的一般项.

由定理 2,行列式中项的因子顺序也可按列标的自然顺序排列. 即有下述推论.

推论　n 阶行列式也可定义为

$$D = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

1.3　行列式的性质

由行列式的定义可知,对于低阶行列式以及零元较多的行列式,用定义计算是可行的. 但当 n 较大时,应用行列式定义计算是很繁琐且困难的. 因此必须讨论行列式的性质,以便利用行列式的性质简化行列式的计算.

设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的转置行列式.

性质 1 行列式与它的转置行列式相等.

证 令 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$,则由行列式的定义及定理 2 的推论可得

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}=D$$

性质 1 说明,行列式的行与列的地位是对称的,因而凡对行成立的性质对列也成立,反之亦然.鉴于此,下面将着重以行来介绍行列式的性质.

性质 2 任意互换行列式的两行(列),行列式变号.

证 互换行列式 D 的第 i 行与第 k 行所得到的行列式为

$$D_1=\begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ \\ i\text{ 行} \\ \\ k\text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

由于经过一次对换改变排列的奇偶性,根据行列式定义可得

$$\begin{aligned} D_1&=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{nj_n} \\ &=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{nj_n} \\ &=-\sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{nj_n} \\ &=-D \end{aligned}$$

推论 如果行列式有两行(列)完全相同,则此行列式为零.

证 互换相同的两行,有 $D=-D$,故 $D=0$.

以下几个性质容易用行列式定义加以证明,因此只列出有关结论,请读者自己证之.

性质 3 行列式某行(列)的公因子可以提到行列式符号的外面.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 1 用数 k 乘行列式 D 等于 D 中某一行(列)所有元同乘以数 k.

推论 2 若行列式的任意两行(列)对应元成比例,则行列式为零.

性质 4 若行列式的第 i 行(列)的每一个元都可表示为两数之和,则该行列式可表示为两个行列式之和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 5 把行列式的第 j 行(列)元的 k 倍加到第 i 行(列)的对应元上,行列式的值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{j1}+a_{i1} & ka_{j2}+a_{i2} & \cdots & ka_{jn}+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

在计算行列式时,为了使计算过程清晰醒目,约定如下记号:

交换行列式的第 i 行(列)与第 j 行(列),简记为 $r_i \leftrightarrow r_j(c_i \leftrightarrow c_j)$.

给第 i 行(列)同乘以数 k,简记为 $kr_i(kc_j)$.

把第 j 行(列)的 k 倍加到第 i 行(列),简记为 $r_i + kr_j(c_i + kc_j)$.

例 1 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 0 & 2\\ 1 & -2 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

解 $D\xlongequal[r_1\leftrightarrow r_2]{\substack{r_3-r_2\\ r_4-2r_2}}\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 3 & -2\\ 0 & 3 & 1 & -4\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-3r_2]{r_3+r_2}\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 4 & 1\\ 0 & 0 & -2 & -13\end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_3\leftrightarrow r_4]{r_3+2r_4}\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & -2 & -13\\ 0 & 0 & 0 & -25\end{vmatrix}=50$$

例 2 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}\lambda & a & a & \cdots & a\\ a & \lambda & a & \cdots & a\\ a & a & \lambda & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a & a & a & \cdots & \lambda\end{vmatrix}$$

解 因为该行列式各行元之和相等,分别把第 2,3,…,n 列加到第一列,再以第一列提出公因子 $\lambda+(n-1)a$,得

$$D_n=[\lambda+(n-1)a]\cdot\begin{vmatrix}1 & a & a & \cdots & a\\ 1 & \lambda & a & \cdots & a\\ 1 & a & \lambda & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & a & a & \cdots & \lambda\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=2,\cdots,n]{c_j-ac_1}[\lambda+(n-1)a]\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & \lambda-a & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & \lambda-a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \lambda-a\end{vmatrix}$$

$$=[\lambda+(n-1)a](\lambda-a)^{n-1}$$

例 3 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & 1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 2 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

解

$$D\xlongequal[c_1-\frac{1}{3}b_3c_4]{\substack{c_1-b_1c_2 \\ c_1-\frac{b_2}{2}c_3}}\begin{vmatrix} x-a_1b_1-\dfrac{a_2b_2}{2}-\dfrac{a_3b_3}{3} & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=3!\left(x-a_1b_1-\frac{a_2b_2}{2}-\frac{a_3b_3}{3}\right)$$

1.4 行列式按行(列)展开

对于三阶行列式来说,容易验证

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

因此,三阶行列式就可用二阶行列式表示,那么 n 阶行列式是否也可用阶数较低的行列式来表示呢? 本节主要讨论这个问题.为此,先介绍余子式与代数余子式的概念.

定义 5 在 n 阶行列 $D=|a_{ij}|$ 中,划去元 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列元后,余下的元按原来的次序构成的 $n-1$ 阶行列式,称为元 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij}.称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元 a_{ij} 的代数余子式.

例如,在行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

中,元 $a_{32}=3$ 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{32}=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=1,\qquad A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-1$$