高等学校经典教材配套辅导丛书

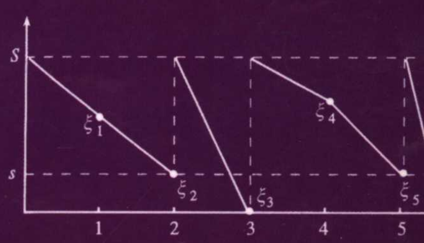
经济应用数学基础（三）

概率论与数理统计
辅导及习题精解

人大修订本

滕加俊 宋桂安 编著

- 名师执笔
- 精准解答
- 知识归纳
- 习题全解
- 经典考题



陕西师范大学出版社

高等学校经典教材配套辅导丛书

经济数学基础
概率论与数理统计
辅导及习题精解

滕加俊　宋桂安　编著

陕西师范大学出版社

图书代号:JF5N0047

图书在版编目(CIP)数据

经济数学基础:概率论与数理统计辅导及习题精解/滕加俊,宋桂安编著.
—西安:陕西师范大学出版社,2005.2
(高等学校经典教材配套辅导丛书)

ISBN 7—5613—3277—7

Ⅰ.经… Ⅱ.①滕…②宋… Ⅲ.①经济数学—高等学校—教学参考资料 ②概率论—高等学校—教学参考资料 ③数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 007388 号

责任编辑 史 进
装帧设计 王静婧
出版发行 陕西师范大学出版社
社　　址 西安市陕西师大 120# (邮政编码:710062)
网　　址 http://www.snuph.com
经　　销 新华书店
印　　刷 南京人民印刷厂
开　　本 850×1168 1/32
印　　张 11.5
字　　数 250 千
版　　次 2005 年 3 月第 1 版
印　　次 2005 年 3 月第 1 次印刷
定　　价 13.80 元

开户行:光大银行西安南郊支行 账号:0303070—00330004695
读者购书、书店添货或发现印装问题,请与本社营销中心联系、调换。
电 话:(029)85307864 85233753 85251046(传真)
E-mail:if-centre@snuph.com

前言

《概率论与数理统计》是经济数学中一门重要的基础课，也是经济类各专业研究生入学考试必考的内容。该课程概念多、公式多、内容抽象难懂。为了帮助广大学生扎实地掌握概率论与数理统计的精髓和解题技巧，提高解答各种题型的能力，我们根据袁荫棠编写的经济应用数学基础（三）—《概率论与数理统计》（修订本）编写了本辅导教材。

本辅导教材由以下几个部分组成：

1. 概念、定理及公式：列出相应各章的基本概念、重要定理和重要公式，突出必须掌握或考试中出现频率较高的内容。

2. 重点、难点解答：列出相应各章的重点、难点内容，并对重点、难点内容给出了相应的解释说明，以帮助广大同学对相应内容理解得更加透彻。

3. 课后习题全解：教材课后习题丰富、层次多，许多基础性问题从多个角度帮助理解基本概念和基本理论，因此我们在课后的全部习题给出了详细的解答。

4. 考试试题精解：精选历年全国研究生入学考试中试题中具有代表性的题目进行详细的解答。这些题目涉及内容广、题型多、技巧性强，可以使广大同学举一反三，触类旁通，开拓解题思路，更好地掌握概率论与数理统计的基本内容和解题方法。

5. 模拟试卷：为了帮助广大同学了解并适应考试，教材最后

给出了四套模拟试卷供广大同学测试自己的水平，最后我们给出了模拟试卷的详细解答供参考。

本教材由滕加俊、宋桂安、周华任、吴红、滕兴虎、汤光华、罗剑等同志编写，在本教材的策划、编写、撰稿等方面得到了陕西师范大学出版社的大力支持和热情帮助，在此深表感谢。由于编者水平有限，加之时间仓促，书中不妥之处敬请广大同行和读者批评指正。

编　者

2005.2.20

目　　录

第一章　随机事件及其概率 ……………………………… (1)
第二章　随机变量及其分布 ……………………………… (35)
第三章　随机变量的数字特征 …………………………… (87)
第四章　几种重要分布 …………………………………… (121)
第五章　大数定律和中心极限定理 ……………………… (152)
第六章　马尔可夫链 ……………………………………… (170)
第七章　样本分布 ………………………………………… (185)
第八章　参数估计 ………………………………………… (203)
第九章　假设检验 ………………………………………… (230)
第十章　方差分析 ………………………………………… (247)
第十一章　回归分析 ……………………………………… (265)
补充习题 …………………………………………………… (279)
模拟试卷一 ………………………………………………… (300)
模拟试卷二 ………………………………………………… (304)
模拟试卷三 ………………………………………………… (307)
模拟试卷四 ………………………………………………… (310)
模拟试卷一参考答案 ……………………………………… (314)
模拟试卷二参考答案 ……………………………………… (324)
模拟试卷三参考答案 ……………………………………… (333)
模拟试卷四参考答案 ……………………………………… (346)

第一章　随机事件及其概率

【基本要求、重点与难点】

(一) 基本要求

1. 了解随机事件、频率的概念、概率的统计定义；

2. 理解样本空间和样本点的概念；

3. 掌握随机事件的运算法则；

4. 掌握概率的古典定义，并能计算基本的古典概型问题；

5. 理解并掌握概率的基本性质，并能正确使用概率的加法公式；

6. 理解条件概率的含义，掌握条件概率的计算公式；

7. 能利用乘法公式和事件的独立性计算积事件的概率；

8. 能利用全概率公式和贝叶斯公式计算有关的概率问题；

9. 理解 n 重独立试验及 n 重贝努里(Bernoulli) 试验的含义，并会利用二项概率公式计算在 n 重贝努里试验中，事件 A 恰好出现 k 次的概率；

10. 了解概率论的公理化体系的知识.

(二) 重点

1. 随机事件的概念；

2. 古典概率；

3. 条件概率；
4. 全概率公式与贝叶斯公式；
5. 独立试验序列.

（三）难点

1. 古典概率；
2. 条件概率；
3. 全概率公式与贝叶斯公式；
4. 独立试验序列.

【主要概念与公式】

1. 随机试验

若一个试验满足下列三个特点：

（1）在相同条件下可以重复进行；

（2）每次试验的可能结果不止一个，并且事先可以知道试验的所有可能结果；

（3）进行一次试验之前不能确定出现的是哪个结果；

则称这一试验为随机试验.

2. 样本空间、随机事件

在随机试验中，可能发生也可能不发生的结果，称为随机事件，简称事件.

在一个试验中，不论可能的结果有多少个，总可以从中找出这样一组基本结果，满足：

（1）每进行一次试验，必然出现且只能出现一个基本结果；

（2）任何事件，都是由其中的一些基本结果所组成.

随机试验中的每一个基本结果是一个随机事件，称为基本事件，或称为样本点，记为 ω. 随机事件 E 的全体样本点组成的集合

称为试验E的样本空间，记为Ω. 随机事件可表述为样本空间中样本点的某个子集合，一般记为A，或B,C等等.

所谓事件A发生，是指在一次试验中，当且仅当A中包含的某个样本点出现. 在每次试验中一定发生的事件称为必然事件. 样本空间Ω包含所有的样本点，每次试验它必然发生，它就是一个必然事件. 必然事件用Ω表示，它是样本空间Ω的一个子集. 在每次试验中一定不发生的事件的事件称为不可能事件，记为$\varnothing$. 它是样本空间的一个空子集.

3. 事件的互不相容(互斥)、对立事件

若$A \cap B = \varnothing$，则称事件A与事件B是互不相容的，或称A与B是互斥的. A与B互不相容，是指事件A与事件B不能同时发生. 例如，基本事件是两两互不相容的.

若$A \cap B = \varnothing$，且$A \cup B = \Omega$，则称事件A与事件B互为对立事件，或称A与B互为逆事件. A与B对立，是指事件A与事件B既不能同时发生又不能同时不发生，即在每次试验中，A与B有且仅有一个发生. 若A与B互为逆事件，则称B为A的对立事件. A的对立事件记为$\overline{A}$，显然$\overline{A} = \Omega - A$.

4. 概率的统计定义

在n次重复试验中，若事件A发生了m次，则称$\frac{m}{n}$为事件A发生的频率. 在相同的条件下，重复进行n次实验，事件A发生的频率稳定地在某一常数p附近摆动，且一般地，n越大，摆动幅度越小，则称常数p为事件A的概率，记为$P(A)$.

5. 概率的古典定义

若某实验E满足

(1) 有限性：样本空间$S = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$；

(2) 等可能性：(公认)$P(e_1) = P(e_2) = \cdots = P(e_n)$.

若事件A包含了m个基本事件，则事件A的概率可用$P(A) =$

$\frac{m}{n}$ 来表示，这里 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是一完备事件组.

6. 概率的性质

(1) $P(A)\geqslant 0$；

(2) $P(\Omega)=1$；

(3) 可列可加性：设 $A_1,A_2,\cdots,$ 是一列两两互不相容的事件，即

$$A_iA_j=\varnothing,\qquad (i\neq j),\qquad i,j=1,2,\cdots$$

有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots.$$

(4) 有限可加性：设 $A_1,A_2,\cdots A_n$ 是 n 个两两互不相容的事件，即

$$A_iA_j=\varnothing,\qquad (i\neq j),\qquad i,j=1,2,\cdots,n$$

则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n);$$

(5) 单调不减性：若事件 $A\subset B$，则

$$P(A)\leqslant P(B)$$

(6) 事件差：设 A、B 是两个事件，则

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)$$

(7) 加法公式：对任意两事件 A、B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$

该公式可推广到任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的情形；

(8) 互补性：

$$P(\overline{A})=1-P(A);$$

(9) 可分性：对任意两事件 A、B，有

$$P(A)=P(AB)+P(A\overline{B}).$$

7. 条件概率的定义、性质

设A、B为两个事件，且$P(B)>0$，则称$\frac{P(AB)}{P(B)}$为事件B发生的条件下事件A发生的条件概率，记为

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

根据条件概率定义，不难验证它具有下列三个性质，即

(1) $P(A\mid B)\geqslant 0$;

(2) $P(\Omega\mid B)=1$;

(3) 若事件$A_1,A_2,\cdots$是两两互不相容的，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\mid B)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i\mid B)$$

8. 概率的乘法公式

设有事件A和B，若$P(A)>0$或$P(B)>0$，则由条件概率定义，得

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A),$$

或

$$P(AB)=P(B)P(A\mid B).$$

一般地，设事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$，若$P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

9. 全概率公式

设Ω为随机试验E的样本空间，$B_1,B_2,\cdots$为Ω的一个完备事件组，设A为样本空间Ω的事件，且$P(B_i)>0(i=1,2,\cdots)$，则

$$P(A)=P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)P(A\mid B_2)+\cdots$$

10. 贝叶斯(Bayes)公式

设A为样本空间Ω的事件，$B_1,B_2,\cdots$为Ω的一个完备事件组，且$P(A)>0$，$P(B_i)>0$，则

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i)P(A\mid B_i)}\qquad i=1,2,\cdots$$

11. 独立性

若事件 A,B 满足 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A,B 是相互独立的.

对于 3 个事件 A,B,C，若下面 4 个等式同时成立：

$$P(AB)=P(A)P(B),$$
$$P(AC)=P(A)P(C),$$
$$P(BC)=P(B)P(C),$$
$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C),$$

则称 A,B,C 相互独立，若仅前三式成立则称 A,B,C 两两独立. 注意两两独立推不出相互独立.

12. 独立试验序列模型

设随机试验满足

(1) 在相同条件下进行 n 次重复试验；

(2) 每次试验只有两种可能结果，A 发生或 A 不发生；

(3) 在每次试验中，A 发生的概率均一样，即 $P(A)=p$；

(4) 各次试验是相互独立的，则称这种试验为贝努里(Brnoulli) 概型，或称为 n 重贝努里试验.

在 n 重贝努里试验中，人们感兴趣的是事件 A 发生的次数. 若用 $P_n(k)$ 或 $b(n,p,k)$ 表示 n 重贝努里试验中 A 出现 $k(0\leqslant k\leqslant n)$ 次的概率，由于

$$P(A)=p,\qquad P(\overline{A})=1-p=q$$

则有

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k},\qquad k=0,1,2,\cdots,n$$

【重点与难点解答】

1. 随机试验的全部可能结果组成的集合称为样本空间，样本空间的子集称为事件，所以从本质上讲样本空间与事件还是一个

集合，因此有关集合论的理论在这里都可以使用，例如集合的交、并、补运算实际上就是事件的积、和、差运算等.

2. 关于概率的定义，不同的版本书上有不同的定义，主要有统计定义、古典定义、公理化定义等. 注意它们的区别与联系.

3. 古典概率的计算是本章的重点与难点之一，特别要注意古典概型的计算公式时要注意满足两个条件，即有限性与等可能性. 有关事件的样本点的计数问题可复习排列组合等内容.

4. 求某个事件的概率时，常遇到求“至少”或“至多”等事件概率的问题. 若从正面考察这些事件，它们往往是诸多事件的和或积，求解时很繁琐. 但“至少”、“至多”这些事件的对立事件却又比较简单，且其概率也很容易求出. 此时，不妨来一个逆向思考，先求其对立事件的概率，然后再求原来的事件的概率. 运用公式 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ 即可.

5. 在本章中我们也学习了条件概率的概念和计算方法，要注意不要把事件的条件概率与积事件的概率混淆，即 $P(A \mid B)$ 与 $P(AB)$ 是不同的概念.

6. 条件概率的计算方法有两种，一是限制样本空间的办法，例如求 $P(B \mid A)$，注意到事件 A 已经发生，因此样本空间不属于 A 的点就可排除，样本空间可缩减为 $S' = A$，在 A 中计算事件 B 的概率. 二是直接应用定义，例如计算 $P(B \mid A)$，我们可先计算 $P(AB)$，$P(A)$，再利用条件概率的定义来计算.

7. 全概率公式与 Bayes 公式是使用广泛的重要公式. 全概率公式的基本思想是把较复杂的事件概率计算分解为较简单的事件的概率计算. 而 Bayes 公式往往用于从结果分析原因时的概率计算，帮助我们追查事件的起因. 注意在使用全概率公式或贝叶斯公式时，对样本空间进行划分，划分后的事件组必须是完备事件组.

8. 二项概率公式是用于计算在 n 重 Bernoulli 试验中事件 A

恰好出现 k 次的概率，也是一个应用广泛的公式. 要注意"恰好出现 k 次"、"至多出现 k 次"和"至少出现 k 次"的区别.

9. 事件的独立性是很重要的概念，在概率论与数理统计中经常使用到. 对于事件的独立性，往往我们并不根据其定义，而是根据实际背景来判定. 要注意一组事件相互独立与两两独立是不同的.

10. 还要特别注意两事件"相互独立"与"互不相容"的区别. 一般地两事件独立与两事件互不相容是没有关系的.

11. 注意 $P(\varnothing) = 0$，$P(\Omega) = 1$，但反之不对，即若 $P(A) = 0$，我们得不到 $A = \varnothing$，同样 $P(A) = 1$，我们得不到 $A = \Omega$. 这一点我们以后经常要用到. 例如，$P(AB) = P(A)$，我们推不出 $B \subset A$.

【课后习题全解】

1. 互不相容事件与对立事件的区别何在？说出下列各对事件的关系.

(1) $|x-a| < \delta$ 与 $x - a \geqslant \delta$； (2) $x > 20$ 与 $x \leqslant 20$；

(3) $x > 20$ 与 $x < 18$； (4) $x > 20$ 与 $x \leqslant 22$；

(5) 20 个产品全是合格品与 20 个产品中只有一个废品；

(6) 20 个产品全是合格品与 20 个产品中至少有一个废品；

解 若两事件 A 与 B 不可能同时发生，即 $AB = \varnothing$，则称事件 A 与 B 是互不相容的(或互斥的)，当 $AB = \varnothing$ 时，常把 $A \cup B$ 记为 $A+B$. 若两事件 A 与 B 是互不相容的，且它们的和是必然事件，即 $A \cup B = \Omega$，$AB = \varnothing$，(或 $A+B = \Omega$) 则称事件 A 与 B 是对立事件，称事件 A(事件 B) 是事件 B(事件 A) 的对立事件(逆事件)，记为 $A = \overline{B}$ 或 $B = \overline{A}$. 由此可知，对立事件必为互不相容事件，反之不然. 题目中(1)、(2)、(3)、(5)、(6) 是互不相容事件，(2)、(6) 是对立事件，(4) 是相容事件.

2. 同时掷两个骰子，x、y 分别表示第一、二两骰子出现的点数，设事件 A 表示“两颗骰子出现的点数和为奇数”，B 表示“点数之差为 0”，C 为“点数之积不超过 20”，用样本点的集合表示事件 $B-A$，BC，$B+\overline{C}$.

解 对 x，y 分别等于 $1,2,\cdots,6$ 进行考虑，可知

$$A=\{(1,2),(1,4),(1,6),(2,1),(2,3),(2,5),(3,2),(3,4),(3,6),(4,1),(4,3),(4,5),(5,2),(5,4),(5,6),(6,1),(6,3),(6,5)\};$$

$$B=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\};$$

$$C=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(6,1),(6,2),(6,3)\}.$$

从而

$$B-A=B=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\};$$

$$BC=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\};$$

$$B+\overline{C}=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(4,6),(5,6),(6,4),(6,5)\}.$$

3. 用步枪射击目标 5 次，设 A_i 为“第 i 次击中目标”($i=1,2,3,4,5$)，B 为“5 次中击中次数大于 2”，用文字叙述下列事件：

(1) $A=\sum_{i=1}^{5}A_i$； (2) $\overline{A}$； (3) $\overline{B}$.

解 (1) A 表示这 5 次射击中，至少 1 次击中；

(2) $\overline{A}$ 表示这 5 次射击中，均未击中；

(3) $\overline{B}$ 表示这 5 次射击中，不超过 2 次击中.

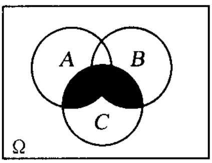
4. 用图示法简化下列各式(A、B、C 都相容)：

(1) $(A+B)(B+C)$;

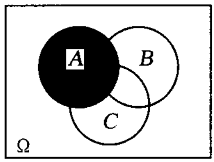
(2) $(A+B)(A+\overline{B})$;

(3) $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)$.

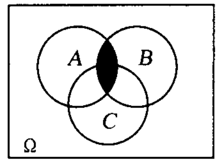
解 由题意知(图中阴影部分为所求)



(1)



(2)



(3)

5. 在图书馆中随意抽取一本书,事件 A 表示"数学书",B 表示"中文图书",C 表示"平装书".

(1) 说明事件 $AB\overline{C}$ 的实际意义;

(2) 若 $\overline{C}\subset B$,说明什么情况;

(3) $\overline{A}=B$ 是否意味着馆中所有的数学书都不是中文的?

解 (1) 事件 $AB\overline{C}$ 表示取出的图书为数学书且为中文图书但非平装书.

(2) 若 $\overline{C}\subset B$,说明非平装书都是中文图书;

(3) $\overline{A}=B$ 意味着馆中所有的非数学书都是中文的,且中文图书均不是数学书.

6. 表 1-3 是 10 万个男子中活到 ξ 岁的人数统计表.若以 A、B、C 分别表示一个新生婴儿活到 40 岁、50 岁、60 岁,由表 1-3 估计 $P(A)$、$P(B)$、$P(C)$.(ξ 表示岁数,η 表示活到 ξ 的人数)

表 1-3

ξ	0	10	20	30	40	50
η	10 000	93 601	92 293	90 092	86 880	80 521

ξ	60	70	80	90	100
η	67 787	46 739	19 866	2 812	65

解 活到40岁、50岁、60岁的人数分别为86 880、80 521、67 787人，而统计人数为10万人，故可估计

$$P(A)=\frac{86\,880}{100\,000}=0.8\,688$$

$$P(B)=\frac{80\,521}{100\,000}=0.80\,521$$

$$P(C)=\frac{67\,787}{100\,000}=0.67\,787$$

7. 某产品设计长度为20 cm，规定误差不超过0.5 cm为合格品. 今对一批产品进行测量，长度为表1－4：

表 1-4

长度(cm)	19.5以下	19.5—20.5	20.5以上
件数	5	68	7

计算这批产品的合格率.

解 产品总数为80个，而合格产品为68个，所以这批产品的合格率为$\frac{68}{80}=0.85$.

8. 掷3枚硬币，求出现3个正面的概率.

解 样本空间为{正正正、正正反、正反正、正反反、反正正、反正反、反反正、反反反}，样本空间的样本点数为8，事件为{正正正}，事件的样本点数为1，故出现3个正面的概率为$\frac{1}{8}$.

9. 10把钥匙中有3把能打开门，今任取两把，求能打开门的概率.

解 样本空间的样本点数为10把钥匙中任取2个的组合数，即C_{10}^2，而不能打开门事件的样本点数为从不能打开门的7把钥匙中任取2个的组合数，即C_7^2，故不能打开门的概率为$\frac{C_7^2}{C_{10}^2}\approx 0.47$，从而能打开门的概率为$1-0.47=0.53$.