张光珞 主编

海淀新设计

新课标 新大纲 新思路

# 解题技法全类

初中一年级

# 举一反三

适用于各版本

数学

内蒙古大学出版社
南京大学出版社

# 编 者 的 话

提高学生综合素质，发展学生的个性特长，不能靠突击速成，更不能脱离实际，拔苗助长。学生智力的发展和能力的提高是一个循序渐进、长期训练、螺旋上升的过程。

为了配合初中数学的教学和应试，我们组织一批有丰富经验的骨干教师编写了这套丛书，通过独特的一例三练、举一反三的形式，帮助学生系统地掌握数学教材的全部内容，拓宽解题方法和技巧，提高应试和参赛能力。

本丛书编写力求体现以下特点：

**内容全面，螺旋上升**。丛书把初中数学教材全部内容，按年级分解，每个年级设置 80 个专题，每个专题作为一次训练。同时注意各个年级间的衔接，体现层次和梯度。

**源于基础，着眼提高**。各年级按照新课标通用教材教学内容的编排顺序，从学生的知识结构和思维发展水平的实际出发设置专题，便于学生在掌握课本单元基础知识的前提下自学，进行拓展训练。

**一例三练，举一反三**。每个专题，从浩翰的题海中精选【典型题例】，“思路”给出分析和点拨；“详解”给出详细的或不同的解法；“诀窍”对例题有关的知识、方法、技巧进行归纳和深化。【好题精练】配合例题的知识点，设置三道练习题，让学生独立完成，培养学生举一反三的能力。

**与时俱进，紧跟时代**。例题和练习题的内容吸收了近几年来各地数学竞赛出现的新题型，体现时代性、趣味性、开放性、探索性、实践性，并注意密切联系生活实际，引导学生在生活中学数学、用数学。

本丛书在编写过程中参考了同类书籍中的精华，谨表诚挚谢意。由于时间和编者水平的限制，书中错误和不足之处在所难免，恳望批评和建议。

# 《初中数学解题技法全类举一反三》

## 编　委　会

**选题策划**　高锦明

**总 主 编**　徐　伟　潘小云

**主　　审**　王大年

**编　　委**　徐　珍　梁国书　王宝林　徐　玲
施　荣　赵振海　刘小东　黄秀珍
戴志红　冯慧玉　顾　平　王炯英
何为祥　陈蕴中　赵行超　黄　静

**编　　著**　吴克桃　罗启明　葛　静　瞿赛花
史　莲　郝志增

**美　　编**　陈　奇　王原晴

**版　　式**　顾　林　黄　力

**插　　图**　姜　瑾　王文澍　何　宁　秦爱华

# 目　录

# 小数化分数 1

可根据小数的规律进行适当变换，把循环小数化为有限小数，即可化为分数.

## 举一 典型题例

把 2.1454545…化成分数.

**【思路】** 此数是从百分位开始以“45”为循环节的小数，故应先设此数为 $x$，再两边同时乘以 10 和 1000，最后作差处理.

**【详解】** 设 $x=2.1454545\cdots$， ①

将①式两边同乘以 10，得

$10x=21.454545\cdots$. ②

将①式两边同乘以 1000，得

$1000x=2145.454545\cdots$. ③

③－②，得 $990x=2124$.

所以 $x=\dfrac{2124}{990}=2\dfrac{8}{55}$.

**【诀窍】** 观察小数的循环节，再扩大小数的倍数，使得小数部分相同，然后作差使得差为整数.

## 反三 好题精练

❶ 将 0.234234234…化为分数.

❷ 将 3.23636…化为分数.

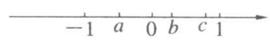
❸ 将 4.5421421…化为分数.

# 2 有理数比较大小(1)：数轴法

比较有理数大小时，我们可以依据数字在数轴上的位置，再根据数轴的有关知识进行判断，使解题简便、迅速.

## 举一 典型题例

$a$、$b$、$c$ 在数轴上的位置如图所示，则在 $-\frac{1}{a}$，$-a$，$c-b$，$c+a$ 中，最大的一个是________.




**【思路】** 在数轴上表示的两个数，右边的数总比左边的数大. 正数都大于 0，负数都小于 0，正数大于一切负数，这些结论对比较有理数大小非常有用.

**【详解】** 由图可知：$-1<a<0$，$0<b<c<1$.

所以 $-1<c+a<1$，$c-b<1-0=1$.

因为 $-1<a<0$，所以 $0<-a<1$，所以 $-\frac{1}{a}>1$.

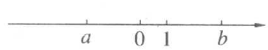
所以 $-\frac{1}{a}$，$-a$，$c-b$，$c+a$ 中最大的一个是 $-\frac{1}{a}$.

**【诀窍】** 这种题也可取特例，如取 $a=-\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{4}$，$c=\frac{3}{4}$，

则 $-\frac{1}{a}=2$ 最大.

## 反三 好题精练

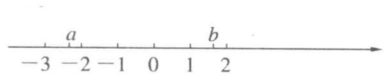
❶ $a$、$b$ 为有理数，在数轴上如图所示，则 (　　)




A. $\frac{1}{a}<1<\frac{1}{b}$　　B. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<1$　　C. $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}<1$　　D. $1<\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$

❷ $a$、$b$、$c$ 在数轴上的位置如图所示，则在 $\frac{1}{a-b}$，$\frac{1}{c-b}$，$\frac{1}{a-c}$ 中，最大的是________.


❸ $a$、$b$ 在数轴上的位置如图所示，则下列各式中，不正确的是 (　　)




A. $|a|>|b|$　　B. $a^2>b^2$　　C. $a>-b$　　D. $-a>b$

# 有理数比较大小(2)：作差法 3

比较两个数大小时，用作差比较的方法有时会很方便.

## 举一 典型题例

如果 $a$、$b$ 均为有理数，且 $b<0$，则 $a$，$a-b$，$a+b$ 的大小关系是________.

**【思路】** 对于两个数 $x$ 和 $y$ 大小的比较，可以先计算 $x-y$，如 $x-y>0$，则 $x>y$；如 $x-y=0$，则 $x=y$；如 $x-y<0$，则 $x<y$.

**【详解】** $a-(a-b)=a-a+b=b<0$，所以 $a<a-b$.

$a-(a+b)=a-a-b=-b>0$，所以 $a>a+b$.

所以 $a+b<a<a-b$.

**【诀窍】** 在选择方法时，先大致估算作差后的结果是否能明确判断出比 0 大，比 0 小，还是等于 0，如果不能判断，则不选择这种方法.

## 反三 好题精练

❶ 比较 $a$ 与 $\frac{a}{3}$ 的大小.

❷ 比较 $A=\frac{7890123456}{8901234567}$ 与 $B=\frac{7890123455}{8901234566}$ 的大小.

❸ 比较 $-\frac{2^{2000}+1}{2^{2001}+1}$ 与 $-\frac{2^{2001}+1}{2^{2002}+1}$ 的大小.

# 4 有理数比较大小(3)：作商法

对于有理数的比较大小，有时采用作商的方法会达到很好的效果.

## 举一 典型题例

已知 $P=\dfrac{99^9}{9^{99}}$，$Q=\dfrac{11^9}{9^{90}}$，那么 $P$、$Q$ 的大小关系是________.

**【思路】** $\dfrac{a}{b}>1$ 且 $b>0\Rightarrow a>b$；

$\dfrac{a}{b}<1$ 且 $b>0\Rightarrow a<b$；

$\dfrac{a}{b}=1\Rightarrow a=b$.

**【详解】** $\dfrac{P}{Q}=\dfrac{99^9}{9^{99}}\cdot\dfrac{9^{90}}{11^9}=\dfrac{(11\times 9)^9}{9^{99}}\cdot\dfrac{9^{90}}{11^9}=\dfrac{11^9\cdot 9^9\cdot 9^{90}}{9^{99}\cdot 11^9}=1$，

所以 $P=Q$.

**【诀窍】** 采用这种方法时，要预先计算两数的商是否能与 1 比较.

## 反三 好题精练

❶ 数 $3^{555}$，$4^{444}$，$5^{333}$ 的大小关系是________.

❷ 已知 $m<0$，$-1<n<0$，则 $m$，$mn$，$mn^2$ 由小到大的排列顺序是________.

❸ 若 $n>1$，则 $\dfrac{n}{n-1}$，$\dfrac{n-1}{n}$，$\dfrac{n}{n+1}$ 这三个数的大小顺序是________.

# 有理数求和(1)：连续整数 5

若一列数 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$，其和为 $S_n$，有 $a_{i+1} - a_i = d$(常数)$(i = 1, 2, \cdots, n-1)$，则这列数列为等差数列，求和计算公式为：$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

## 举一 典型题例

计算：$1+2+3+4+\cdots+1997+1998+1999$.

**【思路】** 这是一组等差数列的求和，故可利用计算公式 $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

**【详解】** $1+2+3+4+\cdots+1997+1998+1999$

$$= \frac{(1+1999)\times 1999}{2} = 1999000.$$

**【诀窍】** 令 $S = 1+2+3+4+\cdots+1997+1998+1999$,

故 $S = 1999+1998+1997+\cdots+4+3+2+1$.

两式相加 $2S = (1+1999)+(2+1998)+\cdots+(1999+1)$

$$= \underbrace{2000+2000+\cdots+2000}_{1999个}$$

$$= 2000\times 1999.$$

所以 $S = \dfrac{2000\times 1999}{2} = 1999000$.

## 反三 好题精练

❶ 计算：$(7+9+11+\cdots+101)-(5+7+9+\cdots+99)$.

❷ 计算：$(2+4+6+\cdots+160)-(1+3+5+\cdots+159)$.

❸ 计算：$89+899+8999+89999+899999$.

# 6 有理数求和(2)：连续分数

在进行有理数加减运算时，对于连续分数，可交换位置或相互结合，运算加法交换律，达到简便计算的目的.

## 举一 典型题例

求和：$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{60}\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\frac{2}{5}+\cdots+\frac{2}{60}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{5}+\cdots+\frac{3}{60}\right)+\cdots+\left(\frac{58}{59}+\frac{58}{60}\right)+\frac{59}{60}$.

**【思路】** 对于同一括号里的连续分数(分母不同)相加，如果直接相加，很复杂，但是如果把括号去掉会发现 $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$，$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$，…，这样处理起来使计算方便得多.

**【详解】** 原式 $=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{60}+\frac{2}{60}+\cdots+\frac{9}{60}\right)$

$=\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+\cdots+\frac{59}{2}=885.$

**【诀窍】** 运用加法结合律，把分母相同的分数结合在一起，化繁为简.

## 反三 好题精练

❶ 计算：$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1997}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{1996}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{1997}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1996}\right)$.

❷ 计算：$\left(1+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}\right)\times\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}\right)-\left(1+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}\right)\times\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}\right)$.

❸ 计算：$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$.

# 有理数求和(3)：裂项相消法 7

在进行有理数运算时，先把题中的分数拆成两个分数之差，再利用结合律，使计算简便.

## 举一 典型题例

计算：$1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+10}$.

**【思路】** 首先注意分母的规律：$1+2=\frac{2\times3}{2}$，$1+2+3=\frac{3\times4}{2}$，$1+2+3+4=\frac{4\times5}{2}$，$\cdots$，$1+2+\cdots+10=\frac{100\times101}{2}$.

**【详解】** 原式$=1+\frac{2}{2\times3}+\frac{2}{3\times4}+\frac{2}{4\times5}+\cdots+\frac{2}{100\times101}$

$$=1+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+2\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{101}\right)$$

$$=2-\frac{2}{101}=\frac{200}{101}=1\frac{99}{101}.$$

**【诀窍】** 对于$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}$这一类型的计算，可使原式化为$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{n}$. 我们把上述的解法称作裂项相消法，利用这个方法可达到化繁为简的目的.

## 反三 好题精练

❶ 计算：$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{9\times10}$.

❷ 计算：$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}$.

❸ 计算：$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$.

# 8 有理数求和(4)：连续平方数求和

对于连续平方数求和这一类有理数求和计算，可结合乘法公式进行运算.

## 举一 典型题例

计算：$(1^2+3^2+5^2+\cdots+99^2)-(2^2+4^2+6^2+\cdots+100^2)$.

**【思路】** 观察算式，去括号后会发现式子中相邻的两项是某两个数的平方差形式. 因为 $(2n-1)^2-(2n)^2=-4n+1$,

所以 $1^2-2^2=-4+1, 3^2-4^2=-4\times2+1, \cdots, 99^2-100^2=-4\times50+1$.

**【详解】** 原式 $=(1^2-2^2)+(3^2-4^2)+(5^2-6^2)+\cdots+(99^2-100^2)$

$$\begin{aligned}&=(-4+1)+(-4\times2+1)+(-4\times3+1)+\cdots+(-4\times50+1)\\&=-4(1+2+3+\cdots+50)+50\\&=-4\times\frac{50(50+1)}{2}+50=-5050.\end{aligned}$$

**【诀窍】** 在运算中，根据题目特点，能运用公式的一定要用，但要搞清楚是直接用，还是反过来用，或是变形后用. 只要观察细致，考虑全面，就会达到事半功倍的效果.

## 反三 好题精练

❶ 计算：$1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+\cdots-1998^2+1999^2$.

❷ 计算：$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\left(1-\frac{1}{6^2}\right)$.

❸ 计算：$(-1)+(-1)^2+\cdots+(-1)^{99}+(-1)^{100}$.

# 有理数的巧算 9

有理数的运算内容丰富，方法灵活，技巧性强，它是初中代数中最基本的运算.在运算过程中，巧用运算规律和其他运算方法及技巧，可以使运算简捷、方便.

## 举一 典型题例

计算：$29\frac{3}{5}-1\frac{1}{3}-15\frac{1}{4}+3\frac{2}{3}-2\frac{1}{3}-14\frac{2}{5}+0.25$.

**【思路】** 在进行有理数加减法时，先观察有没有相加后为 0 的数，若有，先将它们结合起来相加，然后可以把同分母的数结合.若是带分数，还可以将其整数部分和分数部分分别结合相加.若既有小数，又有分数，通常将小数化为分数.

**【详解】** 原式 $=\left(-1\frac{1}{3}+3\frac{2}{3}-2\frac{1}{3}\right)+\left(29\frac{3}{5}-14\frac{2}{5}\right)+\left(-15\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)$

$=0+(29-14-15)+\left(\frac{3}{5}-\frac{2}{5}\right)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)$

$=0+\frac{1}{5}+0=\frac{1}{5}$.

**【诀窍】** $-1\frac{1}{3}$，$3\frac{2}{3}$，$-2\frac{1}{3}$ 这几个分数分母相同，可放在一起计算. $29\frac{3}{5}$，$-15\frac{1}{4}$，$-14\frac{2}{5}$ 这样的带分数可以把整数和分数部分分开考虑.

## 反三 好题精练

❶ 计算：$0.7\times1\frac{2}{11}-6.6\times\frac{3}{7}-2.2\div\frac{7}{3}+0.7\times\frac{9}{11}+3.3\div\frac{7}{8}$.

❷ 计算：$31\frac{2}{7}-22\frac{6}{13}+4\frac{5}{7}+11\frac{6}{13}$.

❸ 计算：$5\frac{6}{11}-3.125-7\frac{4}{7}-3\frac{4}{11}+8\frac{1}{8}-3\frac{6}{7}-2\frac{2}{11}+6\frac{3}{7}$.

# 10 有理数的表示

用字母表示数，可以简化运算，使关系、法则、公式、定理等的表述更加简洁，为以后我们学习列方程解应用题带来了方便. 更重要的是，用字母表示数，能提高我们的抽象思维能力和概括总结能力.

## 举一 典型题例

计算：$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$.

**【思路】** 可设$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=a$.

**【详解】** 设$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=a$，

则原式$=(1+a)\left(a+\frac{1}{5}\right)-\left(1+a+\frac{1}{5}\right)a$

$=a+\frac{1}{5}+a^2+\frac{1}{5}a-a-a^2-\frac{1}{5}a=\frac{1}{5}$.

**【诀窍】** 应用这种方法，首先要求我们能直接观察出相同的代数式，或能通过变形发现有相同的项.

## 反三 好题精练

❶ 已知 $y=ax^4+bx^2+c$，当 $x=-5$ 时 $y=3$，求当 $x=5$ 时 $y$ 的值.

❷ 已知当 $x=7$ 时代数式 $ax^5+bx-8$ 的值为 4，求当 $x=7$ 时代数式$\frac{a}{2}x^5+\frac{b}{2}x+3$ 的值.

❸ 代数式 $ax^5+bx+c$，当 $x=-3$ 时值为 8，当 $x=0$ 时值为 1，求当 $x=3$ 时该代数式的值.

# 有理数的应用(1)：利息问题 11

有理数在日常生活、市场经济、社会生产和相关数学问题等方面的应用非常广泛，掌握有理数在解决相关问题时的若干方法和技巧，可提高同学们运用数字知识分析问题和解决问题能力.

## 举一 典型题例

从 1999 年 11 月 1 日起，全国储蓄存款需征收利息税，利息税的税率是 20%. 张老师于 1999 年 5 月 1 日在银行存入人民币 2 万元，定期一年，年利息率为 3.78%. 存款到期时，张老师净得本金和利息共计多少元?

**【思路】** 主要是算出应得多少利息，计算时应注意从 1999 年 5 月 1 日到 11 月 1 日期间的利息不交税，而从 1999 年 11 月 1 日到 2000 年 5 月 1 日期间的利息应交 20%的税，实得只有 80%.

**【详解】** $2+\frac{1}{2}\times2\times3.78\%+\frac{1}{2}\times2\times3.78\%\times(1-20\%)$

$=2.06824$(万元)$=20682.4$(元).

**【诀窍】** 这种类型的题目关键在于把本金和利息部分分开处理，不要混淆. 而对于利息税，应把 20%和 80%弄清楚，20%部分是付出的，80%部分是收入的.

## 反三 好题精练

❶ 银行月利率 0.2%，小明存入 $m$ 元，3 个月后取出，共得多少元?

❷ 某人把 $a$ 元人民币按三年期的定期储蓄存入银行，年利率为 2.70%，利息税的税率是 20%，到期支取时扣去利息税后，可得多少元钱?

❸ 某人用 $x$ 元购买年利率为 2.98%的五年期国库券，他在五年后连本带息能得到多少元?