# 概率论和数理统计习题与精解

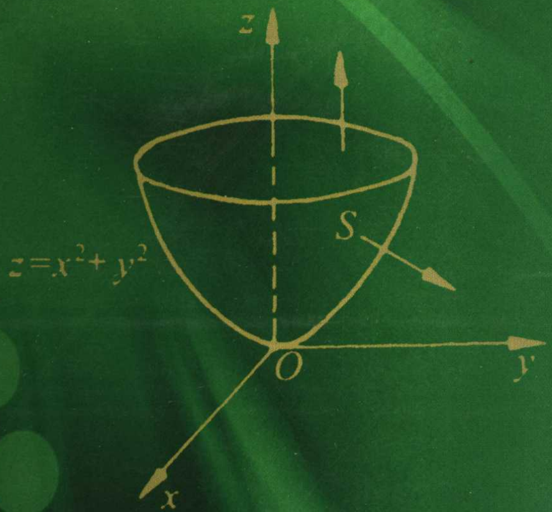
上海交通大学数学系 编

$$I_x = \iiint_\Omega (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}V,$$

$$I_y = \iiint_\Omega (x^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}V,$$

$$I_z = \iiint_\Omega (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}V,$$

$$I_O = \iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}V.$$




上海交通大学出版社

4

# 概率论和数理统计
# 习题与精解

上海交通大学数学系　编

上 海 交 通 大 学 出 版 社

## 内 容 提 要

本书共编选了概率论与数理统计习题518题，其中“例题精解”233题，均有详解，有的题给出多种解法，对典型例题或较难的例题，还专作分析或点评；其余“习题精选”285题，均给出了答案或提示、或简解。

附录中收编了重点大学近年本科生的概率论与数理统计试卷及解答，2000～2004年全国硕士研究生入学考试概率论与数理统计试卷及参考答案。

本书适合高校工、农、医科，经济管理和财经类各专业本、专科生阅读、使用，也可作为教师的教学参考书。

**图书在版编目(CIP)数据**

概率论和数理统计习题与精解/上海交通大学数学系编. —上海：上海交通大学出版社，2004

ISBN 7-313-03810-0

Ⅰ.概… Ⅱ.上… Ⅲ.①概率论-高等学校-解题 ②数理统计-高等学校-解题 Ⅳ.O21-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第066521号

**概率论和数理统计**

**习 题 与 精 解**

**上海交通大学数学系 编**

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路877号 邮政编码200030)

电话：64071208 出版人：张天蔚

立信会计出版社常熟市印刷联营厂印刷 全国新华书店经销

开本：880mm×1230mm 1/32 印张：13.125 字数：373千字

2004年8月第1版 2004年8月第1次印刷

印数：1～5 050

ISBN 7-313-03810-0/O·165 定价：19.00元

---

**版权所有 侵权必究**

# 前　言

随着科学技术的发展,"概率论和数理统计"这门在20世纪蓬勃发展起来的数学分支学科,在众多的科学(包括自然科学与社会科学)与众多的行业中得到了越来越广泛的应用。特别是随着我国经济建设迅猛的发展,对这方面的要求越来越多。目前,各级各类高等院校大部分专业都开设了这门课程。全国统一命题的研究生入学考试数学试卷,包括MBA招生考试,都将其纳入必考内容。对高校学生来说,学好这门课程显然是十分重要的。

本门课程是学生首次接触的以随机现象为研究对象的课程,它不同于研究确定性科学的课程,对初学者来说有一定难度。克服这一困难的有效途径之一是多做些习题(我国著名数学家苏步青院士在求学期间就曾做过一万余道微积分题),因为做习题不仅可以帮助学生正确理解和熟练掌握数学中的概念与定理,而且也是引导学生把数学应用于实践的一座桥梁。

做习题首先要有习题集。理科的《概率论与数理统计习题集》,在20世纪80年代初曾由华东师范大学数学系编撰,内含1430道题。这本书在国内颇有影响,但对广大非数学专业的学生不太适宜。为弥补这个缺憾,上海交通大学数学系"国家工科数学基地"组织有丰富教学经验的教师编写了本书。

不是单一地为编"习题集"而编"习题与精解",而是出于对工科学生和工科数学教学现状的考虑。工科学生都有自己的专业,不可能像数学专业学生那样投入大量时间做大量数学习题。另外工科"概率统计"教学时数又比较少(仅45学时左右),在课堂上教师举例讲解的时间很有限,所以编写习题精解既是对课时不足的一种补偿,也是对学生的一种课外辅导。编者期望本书不仅能对概率统计的初学者起到释疑、解惑的作用,而且还能引领概率统计的爱好者步入到活学活用该知

识的殿堂。

本书共九章，每章分为例题精解、习题精选、习题答案与提示三个部分。前五章为概率论，由冯卫国编写，共424题，其中精解182题；后四章为数理统计，由武爱文编写，共94题，其中精解51题。本书对基本方法的介绍力求从分析、比较入手，阐明思维方法和应用技巧。对例题的选择既强调代表性，更重视应用性。对有些题给出了多种解法，以使学生开阔思路。不少题后注有方法的总结和注意事项，以提高学生举一反三的能力。

本书可作为高等院校工、农、医科各专业及经济管理和财经类专业学生“概率论与数理统计”课程的同步辅助教材或复习、提高的参考书。

本书编写过程中得到上海交通大学出版社的大力支持，陈克俭副编审对本书内容、结构提出很多好的建议，在此特致谢意。

限于水平，这本面对非数学专业的“习题与精解”的内容与范围一定还有许多值得商榷之处，错误之处亦在所难免，读者如能给予批评指正，将是对编者最好的支持与鞭策。

**编者**

**于上海交通大学**

2004年5月



试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

# 目　　录

## 第一篇　概率论

## 第二篇　数理统计

# 第一篇　概率论

# 第 1 章 随机事件及其概率

## A 例题精解

### 1.1 随机事件及其运算

关键词：
- 基本事件（即样本点 $\omega$）
- 样本空间——基本事件的全体（记作 $\Omega$）
- 随机事件——样本空间的子集（记作 $A,B,C$ 等）
- 事件互斥（互不相容）、互逆

随机事件运算顺序：逆、交、并、差，括号优先.

特殊运算公式：$A-B=A-AB=A\bar{B}$（差化积）.

#### 1）随机试验的样本空间及随机事件的表示

**【1-1】** 写出下列随机试验的样本空间及表示下列事件的样本点的集合：

(1) 6 件产品中有 1 件次品，从中任取 2 件得 1 件次品；

(2) 将一枚均匀硬币掷两次，事件 $A$ 为两次出现同一面，$B$ 为至少有一次出现正面；

(3) 重复掷一枚均匀硬币，掷了偶数次后才第一次得到正面；

(4) 在单位圆内任意投掷一点，该点落在左半圆内.

**解** (1) 设 5 件正品分别为 1～5 号，次品为 6 号，则样本空间与题设事件分别为

$$\Omega=\left\{\begin{matrix}(1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6)\\ (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) & (3,4)\\ (3,5) & (3,6) & (4,5) & (4,6) & (5,6)\end{matrix}\right\},$$

$A=\{(1,6)\quad(2,6)\quad(3,6)\quad(4,6)\quad(5,6)\}$;

(2) 设 $H$ 表示出现正面，$T$ 表示出现反面，于是

$\Omega\{(H,H)\quad(H,T)\quad(T,H)\quad(T,T)\}$，

$A=\{(H,H)\quad(T,T)\}$，

$B=\{(H,T)\quad(T,H)\quad(H,H)\}$；

(3) $\Omega=\{H,T,HH,HT,TH,HHH,HHT,HTH,$
$THH,HTT,THT,TTH,TTT,HHHH\cdots\}$，

$A=\{TH,TTTH,TTTTTH,\cdots\}$；

(4) $\Omega=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1,x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}\}$，

$A=\left\{(x,y)\mid -\sqrt{1-y^2}<x<0,x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}\right\}$.

**【1-2】** 在数学系阅览室中随意抽取一本书，事件 $A$ 表示“数学书”，$B$ 表示“中文版的书”，$C$ 表示“平装书”：

(1) 叙述事件 $A\bar{B}C$ 的实际意义.

(2) 在什么条件下 $ABC=C$ 成立？

(3) 什么时候 $\bar{C}\subset A$ 是正确的？

(4) 什么时候 $\bar{B}=C$ 是正确的？

**解** (1) 事件 $A\bar{B}C$ 表示抽取的是一本外文版的平装数学书.

(2) $ABC=C$ 等价于 $C\subset AB$，即在“阅览室的平装书都是中文版的数学书”这一条件下，等式 $ABC=C$ 成立.

(3) 当阅览室的精装书都是数学书时，$\bar{C}\subset A$ 是正确的.

(4) 当阅览室的外文书都是平装书，且平装书都是外文书时，等式 $\bar{B}=C$ 是正确的.

2) 用已知事件表示复合事件

方法：
- 等价法——复合事件通过运算用其等价的事件来表示.
- 推演法——利用事件的运算律将复合事件逐步推演到已知事件的表达式.
- 图示法——借助文氏图直观求出复合事件的表达式.

**【1-3】** 用 $A,B,C$ 三个已知随机事件表达事件 $G=\{A,B,C$ 中不多于一个发生$\}$.



试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

**解**　**方法 1**　$G=\{A,B,C$ 中不多于一个发生$\}$

$=(A,B,C$ 中仅发生一个$)\cup(A,B,C$ 都不发生$)$

$=A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup\bar{A}\bar{B}\bar{C}.$

**方法 2**　利用对立事件

$\bar{G}=\{A,B,C$ 中至少有两个同时发生$\}=AB\cup AC\cup BC$，

所以　$G=\overline{AB\cup AC\cup BC}.$

**点评**　以上两个解法，由于思路不同，得到的表达式往往不同，但只要思路正确，不同的表达式是相等的.

**【1-4】**　证明 $(A-AB)\cup B=A\cup B$.

**证**　**方法 1**　等价法

事件 $A-AB$ 等价于"$A$ 发生，而 $A,B$ 不同时发生"等价于"$A$ 发生而 $B$ 不发生"，从而事件 $(A-AB)\cup B$ 等价于"$A,B$ 中至少有一个发生"，即

$$(A-AB)\cup B=A\cup B.$$

**方法 2**　推演法

$$\begin{aligned}(A-AB)\cup B&=A\overline{AB}\cup B=A(\bar{A}\cup\bar{B})\cup B=A\bar{A}\cup A\bar{B}\cup B\\&=A\bar{B}\cup B=A\bar{B}\cup B\bar{B}\cup AB\cup B\\&=(A\cup B)(\bar{B}\cup B)=A\cup B.\end{aligned}$$

**点评**　不能把数的运算律，如去括号、移项等用到事件运算上来，否则会出错. 例如：

① $(A-AB)\cup B\neq A-AB\cup B$，因为运算顺序是先并后差；

② 不能由 $A\bar{B}\cup B=A\bar{B}\cup B\bar{B}\cup AB\cup B$ 移项 $B$，推出 $A\bar{B}=A\bar{B}\cup B\bar{B}\cup AB$，显然 $A\bar{B}\cup B\bar{B}\cup AB=A\bar{B}\cup AB=A\neq A\bar{B}$.

**方法 3**　图示法

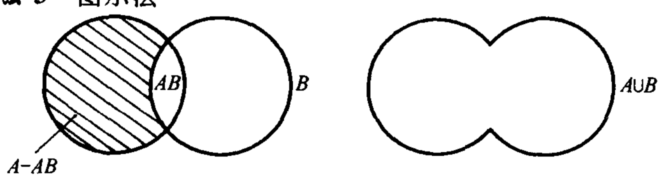



图 1-1

所以 $$(A-AB)\cup B=A\cup B.$$

**【1-5】** 一个工厂生产了 $n$ 台微波炉，以事件 $A_i$ 表示生产的第 $i$ 台微波炉是正品($1\leqslant i\leqslant n$). 用 $A_i$($1\leqslant i\leqslant n$)表示下列事件：

(1) 没有一台微波炉是次品；

(2) 仅有一台微波炉是次品；

(3) 至少有一台微波炉是次品；

(4) 至少有两台微波炉不是次品.

**解** (1) $A_1A_2\cdots A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$；

(2) $\overline{A}_1A_2A_3\cdots A_n\cup A_1\overline{A}_2A_3\cdots A_n\cup\cdots\cup A_1A_2\cdots A_{n-1}\overline{A}_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}[\overline{A}_i(\bigcup\limits_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{n}A_j)]$；

(3) $\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\cdots\cup\overline{A}_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A}_i$；

(4) $A_1A_2\cup A_1A_3\cup\cdots\cup A_1A_n\cup A_2A_3\cup A_2A_4\cup\cdots\cup A_2A_n\cup\cdots\cup A_{n-1}A_n$ 或 $\bigcup\limits_{\substack{i,j=1\\ j\neq 1}}^{n}A_iA_j$.

**【1-6】** 把事件 $A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$ 表示成互不相容事件的并.

**解** $A_1\cup(A_2-A_1)\cup(A_3-A_1\cup A_2)\cup(A_4-A_1\cup A_2\cup A_3)$或 $(\bigcup\limits_{i=1}^{n})(A_i-\bigcup\limits_{j=0}^{i-1}A_j)(A_0=\varnothing$ 为不可能事件).

**【1-7】**(多项选择) 事件 $A-\overline{B}$ 又可表示为(　　　　).

(A) $A-B$ (B) $A\cap B$ (C) $AB(A\cup B)$

(D) $AB\cup A-A\overline{B}$ (E) $\overline{B}-A$ (F) $A-\overline{A}B$

(G) $AB\cup B-A\overline{B}$ (H) $AB\cup(A-B)$ (I) $\overline{A}\cap\overline{B}$

(J) $A-A\overline{B}$ (K) $\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}$ (L) $A\cup B-A\overline{B}-\overline{A}B$.

**解** 选(B),(C),(D),(J),(K),(L).

因为 $A-\overline{B}=AB$,上述 6 项都可化简为 $AB$.

**【1-8】** 证明随机事件的并与交满足下列两个分配律：

(1) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$；

(2) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

**证** （1）下面各关系式是相互等价的：

$\omega \in (A \cup B) \cap C \Leftrightarrow \omega \in A \cup B$ 且 $\omega \in C \Leftrightarrow$

$\omega \in A \cap C$、$\omega \in B \cap C$ 中至少有一个成立 $\Leftrightarrow$

$\omega \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$，

所以 $$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C);$$

（2）下面各关系式是相互等价的：

$\omega \in (A \cap B) \cup C \Leftrightarrow \omega \in A \cap B$、$\omega \in C$ 中至少有一个成立 $\Leftrightarrow$

"$\omega \in A$ 或 $\omega \in C$"且"$\omega \in B$ 或 $\omega \in C$"$\Leftrightarrow$

$\omega \in A \cup C$ 且 $\omega \in B \cup C \Leftrightarrow \omega \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$，

所以 $$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

## 1.2 概率的定义与性质

关键词 $\begin{cases} \text{概率——随机事件发生的可能性大小的一个量度} \\ \text{古典概率} \\ \text{几何概率} \end{cases}$

### 1）用概率运算性质求解的问题

**性质 1** $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

**性质 2** 若事件 $A \subset B$，则 $P(B-A) = P(B) - P(A)$.

**推　论** **（单调性）**若事件 $A \subset B$，则 $P(B) \geqslant P(A)$.

**性质 3** **（有限可加性）**若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥，则

$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$.

**性质 4** **（广义可加性）**对任意两事件 $A, B$，有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

**推　广** 对任意三事件 $A, B, C$，有

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

相仿可推广到 $n$ 个事件的情形.

**【1-9】** 某人外出旅游两天. 据预报，第一天下雨的概率为 0.6，第二天下雨的概率为 0.3，两天都下雨的概率为 0.1，试求：

(1) 第一天下雨而第二天不下雨的概率；

(2) 至少有一天下雨的概率；

(3) 两天都不下雨的概率；

(4) 至少有一天不下雨的概率.

**解** 设 $A_i$ 表示为第 $i$ 天下雨的事件($i=1,2$)，则由题意

$$P(A_1)=0.6,\quad P(A_2)=0.3, P(A_1A_2)=0.1.$$

(1) 设 $B$ 为第一天下雨而第二天不下雨的事件，则

$$B=A_1\overline{A}_2=A_1-A_2=A_1-A_1A_2, \text{且 } A_1A_2\subset A_1,$$

于是 $P(B)=P(A_1-A_1A_2)=P(A_1)-P(A_1A_2)=0.6-0.1=0.5$；

(2) 设 $C$ 为至少有一天下雨的事件，则由 $C=A_1\cup A_2$ 得

$$\begin{aligned}P(C)&=P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)\\&=0.6+0.3-0.1=0.8;\end{aligned}$$

(3) 设 $D$ 为两天都不下雨的事件，则由 $D=\overline{A}_1\overline{A}_2=\overline{A_1\cup A_2}$ 得

$$P(D)=P(\overline{A_1\cup A_2})=1-P(A_1\cup A_2)=1-0.8=0.2;$$

(4) 设 $E$ 为至少有一天不下雨的事件，则由 $E=\overline{A_1A_2}$ 得

$$P(E)=P(\overline{A_1A_2})=1-P(A_1A_2)=1-0.1=0.9.$$

**【1-10】** 某市发行 $A,B,C$ 三种报纸. 已知市民中订阅 $A$ 报的有 45%，订阅 $B$ 报的有 35%，订阅 $C$ 报的有 30%，同时订阅 $A$ 报及 $B$ 报的有 10%，同时订阅 $A$ 报及 $C$ 报的有 8%，同时订阅 $B$ 报及 $C$ 报的有 5%，同时订阅三种报纸的有 3%. 试求：

(1) 只订阅 $A$ 报的概率 $p_1$；

(2) 同时订阅 $A$ 报及 $B$ 报的概率 $p_2$；

(3) 恰好订阅两种报纸的概率 $p_3$；

(4) 至少订阅一种报纸的概率 $p_4$；

(5) 不订阅任何报纸的概率 $p_5$；

(6) 至多订阅一种报纸的概率 $p_6$.

**解** 设 $A,B,C$ 分别表示订阅 $A$ 报，$B$ 报，$C$ 报的事件，则由题设有

$$P(A)=0.45,\quad P(B)=0.35,\quad P(C)=0.30,$$
$$P(AB)=0.10,\quad P(AC)=0.08\quad P(BC)=0.05,$$

$$P(ABC)=0.03.$$

(1) $p_1=P(A\bar{B}\bar{C})=P(A-\overline{\bar{B}\bar{C}})=P(A-B\cup C)$

$=P[A-A(B\cup C)]=P(A)-P[A(B\cup C)]$

$=P(A)-P(AB\cup AC)$

$=P(A)-P(AB)-P(AC)+P(ABC)$

$=0.45-0.10-0.08+0.03=0.30$;

(2) $p_2=P(AB\bar{C})=P(AB-C)=P(AB-ABC)$

$=P(AB)-P(ABC)=0.10-0.03=0.07$;

(3) 仿(2) $P(A\bar{B}C)=P(AC)-P(ABC)=0.08-0.03=0.05$,

$P(\bar{A}BC)=P(BC)-P(ABC)=0.05-0.03=0.02$,

显然三事件 $AB\bar{C}$,$A\bar{B}C$,$\bar{A}BC$ 两两互斥,故有

$$p_3=P(AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup \bar{A}BC)=P(AB\bar{C})+P(A\bar{B}C)+P(\bar{A}BC)$$

$$=0.07+0.05+0.02=0.14;$$

(4) $p_4=P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$

$-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

$=0.45+0.35+0.30-0.10-0.08-0.05+0.03$

$=0.90$;

(5) 由(4)得

$$p_5=P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)$$

$$=1-0.90=0.10;$$

(6) 由(1) $P(A\bar{B}\bar{C})=P(A)-P(AB)-P(AC)+P(ABC)=0.30$,

$P(\bar{A}B\bar{C})=P(B)-P(AB)-P(BC)+P(ABC)=0.23$,

$P(\bar{A}\bar{B}C)=P(C)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)=0.20$,

由(5) $P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=0.10$,

显然四事件 $A\bar{B}\bar{C}$,$\bar{A}B\bar{C}$,$\bar{A}\bar{B}C$,$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 两两互斥,故有

$$p_6=P(A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup\bar{A}\bar{B}\bar{C})$$

$$=P(A\bar{B}\bar{C})+P(\bar{A}B\bar{C})+P(\bar{A}\bar{B}C)+P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})$$

$$=0.30+0.23+0.20+0.10=0.83.$$

**【1-11】** 设 $A$,$B$ 为两个随机事件,证明:

(1) $P(AB)=1-P(\bar{A})-P(\bar{B})+P(\bar{A}\bar{B})$;

(2) $1-P(\overline{A})-P(\overline{B})\leqslant P(AB)\leqslant P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$.

**证** (1) $P(AB)=P(\overline{\overline{A}\cup\overline{B}})=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})=1-P(\overline{A})-P(\overline{B})+P(\overline{A}\overline{B})$；

(2) 由(1)和 $P(\overline{A}\overline{B})\geqslant 0$ 得第一个不等式，由概率的单调性和广义可加性分别得第二和第三个不等式.

2）古典概率的计算

公式 $P(A)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{\text{有利 }A\text{ 发生的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$.

步骤 ① 弄清楚试验所对应的样本空间；

② 应用排列组合及加法、乘法原理计算 $n,m$ 的数值.

**【1-12】** 大城市电话号码由 8 位数组成，除首位数非 0 外，其余位数可以是 0,1,2,…,9 中的任一个数，求电话号码是由完全不同的数字组成的概率.

**解** 基本事件总数为 $n=10^8$.

有利场合是：首位数有 9 个取法，其余七位数有 $P_{10}^7$ 个取法，由乘法原理，有利的基本事件数为 $m=9P_{10}^7$. 故所求概率

$$p=\frac{m}{n}=\frac{9P_{10}^7}{10^8}=\frac{54\,432}{10^6}\approx 0.054\,4.$$

**【1-13】** 某人买了大小相同的新鲜鸭蛋，其中有 $a$ 只青壳的，$b$ 只白壳的，他准备将青壳蛋加工成咸蛋，故将鸭蛋一只只从箱中摸出进行分类，求第 $k$ 次摸出的是青壳蛋(设为事件 $A$)的概率 $P(A)(1\leqslant k\leqslant a+b)$.

**解** ***方法 1*** (选排列)将蛋从 1 至 $a+b$ 进行编号，基本事件总数为从 $a+b$ 只蛋中选出 $k$ 只进行排列的排列数 $P_{a+b}^k$，有利事件数为 $P_a^1P_{a+b-1}^{k-1}$，由古典概型

$$P(A)=\frac{P_a^1P_{a+b-1}^{k-1}}{P_{a+b}^k}=\frac{a}{a+b}.$$

***方法 2*** (全排列)仍将蛋编号，将所有的蛋摸出来排列在 $a+b$ 个位置上，基本事件总数为 $(a+b)!$，要求在第 $k$ 个位置上放青壳蛋，有利



试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com