

鲁述 徐鹏根 著

电磁场边值问题 解析方法



全国优秀出版社
武汉大学出版社

内 容 提 要

本书系统地讨论时变场边值问题的解析方法,将波函数理论与求解电磁边值问题的实例相结合详细讨论各种规则形体边值问题的求解方法,并给出计算结果。全书共分七章,第一章讨论基本方程和定理,第二至第六章分别讨论几种典型的边值问题,第七章讨论两媒质半空间散射。

本书可供无线电类高年级学生和研究生阅读,可供从事电磁场工程研究的教师和科技工作者参考,也可作为有关专业的研究生教材。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场边值问题解析方法/鲁述,徐鹏根著. —2版. —武汉:武汉大学出版社, 2005.5

ISBN 7-307-04543-5

I. 电… II. ①鲁… ②徐… III. 电磁场—边值问题—计算方法
N. O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 033823 号

责任编辑:史新奎 责任校对:黄添生 版式设计:支 笛

出版发行:武汉大学出版社 (430072 武昌 珞珈山)

(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn 网址:www.wdp.whu.edu.cn)

印刷:武汉大学出版社印刷总厂

开本:880×1230 1/32 印张:13.75 字数:381千字 插页:1

版次:2005年5月第1版 2005年5月第1次印刷

ISBN 7-307-04543-5/O · 324 定价:24.00元

版权所有,不得翻印;所购教材,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请与当地图书销售部门联系调换。

前 言

经典电磁理论的建立,首先应当推崇 Maxwell 垂名后世的工作,Maxwell 于 1873 年发表了他的名著“A Treatise on Electricity and Magnetism”,建立了经典电动力学。尔后的几十年间,人们对于电磁现象的理解进一步加深,数学的处理方法不断改进,又有许多新著问世。到 20 世纪 40 年代初,Stratton 对这七十多年的发展作了深刻的总结和提炼,写成了名著“Electromagnetic Theory”,系统而深入地阐述了 Maxwell 方程的原理,精辟地讨论了时变场及电磁波的理论,在电磁理论的应用和完善两方面都有所发展,形成了工程电磁学的基本格局。从那时起到现在的半个世纪中,又出版了大量电磁理论方面的著作,虽然其最基本的理论部分未超出原来的框架,大多数属于早期基本理论的完善和展开,但是在处理方法的创新和应用领域的扩展方面有了很大的进展,体现了电磁理论发展的强大生命力,导致了工业和技术的大规模发展。

电磁波的辐射、散射及传播问题分别归结为电磁场与源、边界及媒质的相互作用。而源及其载体联合求解的问题、各种媒质及两媒质或多媒质中源的辐射和波的传播问题则是工程电磁学研究的重要方面,大多数重要的电磁现象都是由不连续表面或由媒质物理特性的突变所引起的。因此,电磁边值问题乃是电磁理论最基本的问题,电磁场问题作为边值问题解决了以后,就可得到实际情况下场和源的各种特性和工程参数。近几十年来,随着电磁理论在实用方面的深化,求解各类边值问题的方法有了很大的进展。高速大容量电子计算机技术的进步,促进了各种数值方法和近似方法的发展和应用,特别是近年来各种混合方法的研究,使得现在有可能求解一些复杂

形体和复杂媒质的边值问题。但是,解析方法仍有其重要的地位,虽然其应用局限于规则形体和简单媒质的边值问题,但它可以得到问题的精确解,从它的显式解中可以看到解随各个参数而变化的趋势,从而更深入地揭示问题的物理本质,它还可以作为近似方法和数值方法的检验标准,并对渐近法的某些结果和存在的问题作出解释。

关于求解电磁场边值问题的解析方法,Morse 和 Feshbach 的书目中作了系统的论述,其后,Harrington, Jordan, Mentzer, Stinson, Bowman 等人的工作提供了丰富的应用实例,这些大都是较早期的资料。这些年来,解析方法的研究和应用又有了多方面的进展,本书旨在吸取和补充这些在方法上和应用上的成果,当然,为了叙述的完整性,也用了不少过去的资料,以求系统地介绍时变场边值问题的解析方法。本书力图将波函数理论与求解电磁场边值问题的实例相结合,详细讨论各种规则形体边值问题数学模型的建立和求解过程,并提供了计算结果,其大部分内容来源于文献,但力求显示出整个时变场边值问题理论的系统性,以及数学与物理的完美结合。限于笔者的学识和水平,书中定有错误和欠妥之处,敬希读者指正。

本书的出版得到国家自然科学基金的资助,得到武汉大学科研处给予的大力支持,作者深切致谢。书中有关圆锥边界问题的工作曾得到美国 Michigan 大学 Chen-To Tai 教授的关心与鼓励。航空航天部一院王志广高级工程师、方振民研究员、二院刘铁军研究员及加拿大 Manitoba 大学 L. Shafai 教授与作者进行过多次有益的讨论。在本书写作过程中柯亨玉、温晓峰、张立新、康红霞、肖宝杰、梁宏宇等青年教师和研究生协助整理原稿,还有很多同志从各方面给予帮助,在此一并表示感谢。

作 者

一九九二年于武汉珞珈山

目 录

第一章 电磁场的基本方程和定理	1
1.1 电磁场的基本方程及本构关系	2
1.1.1 Maxwell 方程组	2
1.1.2 Maxwell 方程组的积分形式和边值关系	4
1.1.3 媒介质的本构关系	5
1.2 电磁场的基本定理	6
1.2.1 二重性原理	6
1.2.2 等效定理	9
1.2.3 感应定理	13
1.2.4 互易定理	17
1.3 位函数	22
1.3.1 矢量位函数与标量位函数	22
1.3.2 用磁矢位和电矢位表示有源区的场	28
1.3.3 用 A_z 和 F_z 表示无源区的场	29
参考文献	35
第二章 平直边界	36
2.1 直角坐标系中的波函数	37
2.1.1 标量波函数	37
2.1.2 矢量波函数	40
2.1.3 并矢 Green 函数	46
2.2 电流源激励的传输线	55
2.3 半空间辐射的二维问题	59

2.3.1 导电半空间辐射的二维问题	60
2.3.2 有耗媒质半空间辐射的二维问题	64
2.4 半空间辐射的三维问题	69
2.4.1 并矢 Green 函数法计算导电平面上空偶极子辐射	69
2.4.2 有耗媒质半空间垂直偶极子的辐射	72
2.4.3 有耗媒质半空间水平偶极子的辐射	75
2.5 导电平面上隙缝的辐射	79
2.6 平面电流层的辐射	83
参考文献	86

第三章 圆柱面边界

3.1 圆柱波函数	89
3.1.1 圆柱标量波函数	89
3.1.2 圆柱矢量波函数	93
3.1.3 圆柱并矢 Green 函数	101
3.2 二维辐射	102
3.2.1 均匀柱面波的源	102
3.2.2 二维辐射	104
3.2.3 柱面波的坐标平移	108
3.3 圆柱体的电磁散射	111
3.3.1 导电圆柱体对平面波的散射	111
3.3.2 介质圆柱体对平面波的散射	122
3.3.3 导电圆柱体对柱面波的散射	124
3.3.4 介质覆盖导电圆柱对垂直入射平面波的散射	129
3.4 三维辐射	132
3.4.1 三维问题与二维问题的变换	132
3.4.2 流丝辐射的三维问题	133
3.5 开缝圆筒的辐射	137
3.6 导电圆柱附近的振子	150
3.6.1 导电圆柱附近周向偶极子的辐射	151

3.6.2 导电圆柱附近轴向偶极子的辐射	156
3.6.3 导电圆柱附近辐向偶极子的辐射	157
3.7 介质覆盖导电圆柱与电、磁振子	161
3.7.1 振子在介质层内的情况	161
3.7.2 振子在介质层外的情况	168
3.7.3 介质覆盖导电圆柱对于任意源的散射	173
参考文献	176
第四章 劈与半平面	179
4.1 劈与平行流丝的二维问题	179
4.2 导电劈对平面波的散射	186
4.3 劈与平行流丝的三维问题	187
4.4 开孔劈的辐射	190
4.5 振子激励导电劈辐射场	194
4.5.1 导电劈附近的轴向电偶极子	194
4.5.2 导电劈附近的周向电偶极子	200
4.6 导电半平面	202
4.6.1 半平面与流丝的二维问题	202
4.6.2 半平面对平面波的散射	203
4.6.3 开缝半平面的辐射	203
4.6.4 导电半平面附近电偶极子的辐射	208
参考文献	215
第五章 球形边界	216
5.1 球标量波函数	216
5.1.1 球标量波函数	216
5.1.2 位函数和位场关系	224
5.2 球矢量波函数	227
5.3 球并矢 Green 函数	232
5.3.1 均匀无界空间球并矢 Green 函数的矢量波函数展开	232

5.3.2 完纯导电球的并矢 Green 函数	237
5.4 球面波的源	239
5.5 球的散射	244
5.5.1 导电球的散射	245
5.5.2 介质球的散射	257
5.5.3 带有有耗壳层的导电球的散射	261
5.6 开缝球的辐射	271
5.7 导电球附近的振子	278
5.7.1 并矢 Green 函数法计算导电球附近振子的辐射场	278
5.7.2 利用互易原理计算导电球附近振子的辐射场	282
附录 5.1	288
附录 5.2	291
附录 5.3	291
附录 5.4	292
附录 5.5	294
参考文献	295
 第六章 导电圆锥边界	 299
6.1 概述	299
6.2 环源激励的圆锥	301
6.3 圆锥上隙缝天线的辐射	306
6.3.1 点源激励无限圆锥辐射场	306
6.3.2 圆锥上隙缝天线的辐射场	313
6.3.3 并矢 Green 函数法计算开缝圆锥辐射场	319
6.4 导电圆锥上电振子的辐射场	325
6.4.1 并矢 Green 函数法计算导电圆锥上电振子的辐射场	325
6.4.2 用二重性原理求解导电圆锥上振子的辐射场	333
6.5 导电圆锥的平面波散射	339
6.5.1 平面波沿圆锥轴线负方向入射的情况	339
6.5.2 导电圆锥平面波散射问题的一般解	345

6.6 导电圆锥边界电磁场问题数值计算方法	357
附录 6.1	364
附录 6.2	366
附录 6.3	367
附录 6.4	368
参考文献	369
第七章 两媒质半空间电磁散射	373
7.1 标准与非标准矢量波函数及其变换关系	374
7.1.1 标准与非标准圆柱矢量波函数及其变换关系	375
7.1.2 标准与非标准球矢量波函数及其变换关系	380
7.2 球矢量波函数与柱矢量波函数的变换关系	391
7.2.1 柱矢量波函数变换为球矢量波函数	391
7.2.2 球矢量波函数变换为柱矢量波函数	392
7.3 埋入球体对平面电磁波的散射	395
7.3.1 两媒质半空间电磁场的展开式	395
7.3.2 埋入球体的电磁散射特性	398
7.4 埋入球体对偶极子场的散射	416
7.4.1 场的分区表达式	416
7.4.2 有耗平直地面上偶极子源的场	417
7.4.3 埋入球体电磁散射特性	421
参考文献	428

第一章 电磁场的基本方程和定理

本章讨论描述电磁场的基本方程和几个基本定理。

Maxwell 方程是电磁理论的核心,它描述宏观电磁现象的普遍规律。我们不打算依照历史的进程,由实验事实出发来阐述 Maxwell 方程的建立,而是采用演绎的方法,一开始就把场方程提出来,并由此推出场的结构和特性、场源关系以及一些其他的定理。

在讨论中我们引入假想的磁流和磁荷的概念,把它当做一种数学上的源,由此得到二重性原理。利用二重量之间的对偶关系,可以由一类电磁场问题的解直接导出另一类电磁场问题的解。场的等效定理、感应定理与 Huyghens 原理及镜像原理实质上都是用等效源来代替实际源的,它们在电磁场散射与辐射问题的研究中有广泛的应用。在研究了二重性原理与等效定理及感应定理之后就能更好地理解磁流、磁荷概念的物理意义。感应定理是一般等效定理在特殊情况下的一种应用,本章从等效定理出发来导出感应定理,这样更易于接受。

求解电磁场问题通常有两种方法,一种方法是由 Maxwell 方程直接求解,另一种方法是通过各种辅助函数求解。本章讨论了位函数的一般理论,给出了位函数方程和位场关系的表达式,讨论了在无源区用 A 表示 TM 场,用 F 表示 TE 场的方法以及利用二重性原理在有源区用 A 表示电源的场,用 F 表示磁源的场的方法,这是对于矢位的两种特殊选择。

本章的目的不是全面地介绍由电磁场理论所涉及的所有定理和原理,也不是对一些定理和方程作专门的研究,本章的内容具有辅助的性质,是为以后几章的应用作必需的准备。

1.1 电磁场的基本方程及本构关系

1.1.1 Maxwell 方程组

Maxwell 方程组是 Maxwell 在总结前人研究成果基础上加以概括提高所建立起来的完整的电磁场基本方程组,它是解决各种电磁问题的理论依据,是研究电磁辐射、散射问题的出发点。在真空中,它的齐次方程的微分形式是

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (1.1-1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (1.1-1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.1-1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.1-1d)$$

式中: ϵ_0 和 μ_0 是真空中电磁常数,其值取决于所采用的单位制。本书采用国际单位制(SI),故真空中的介电常数 $\epsilon_0 = 10^7/4\pi c^2 \approx 8.854 \times 10^{-12} (\text{F/m})$,真空中的导磁率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \approx 1.257 \times 10^{-6} (\text{H/m})$, $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 3 \times 10^8 (\text{m/s})$ 是真空中光速, $\mathbf{E}$ 是电场强度 (V/m), $\mathbf{B}$ 是磁感应强度 (Wb/m^2)。在一般情况下,它们是空间坐标与时间的函数,即 $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ 。

矢函数 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 可完全确定真空中的电磁场。但是,在任意媒介质的情况下,要完全确定其中的电磁场,则需要四个矢函数。因此在任意媒介质中,除 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$ 外,还需引入 $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{H}$, $\mathbf{D}$ 是电位移 (C/m^2), $\mathbf{H}$ 是磁场强度 (A/m)。 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{D}$ 通常也是空间坐标与时间的矢函数。在任意媒介质中,Maxwell 方程组的微分形式是

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (1.1-2a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J} \quad (1.1-2b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.1-2c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.1-2d)$$

式中: $\mathbf{J}$ 是传导电流体密度 (A/m^2), ρ 是自由电荷体密度 (C/m^3)。

上述四个方程之间有一定相关性, 由 (1.1-2a) 式可导出 (1.1-2d) 式, 由 (1.1-2b) 式及下述电荷守恒定律可导出 (1.1-2c) 式

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.1-2e)$$

在 (1.1-2) 式的五个方程中, 只有 3 个是独立方程, 即可以认为 (1.1-2a)、(1.1-2b) 及 (1.1-2e) 式是独立方程, 也可认为 (1.1-2a)、(1.1-2b) 及 (1.1-2c) 式是独立方程。除 3 个独立方程之外的另外两个则为非独立方程。

为了表示电磁场与电荷、电流之间的相互作用, 在 3 个独立方程中有 5 个矢量函数 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{J}$ 和一个标量函数 ρ , 相当于共有 16 个标量函数, 而 3 个独立方程只有 7 个标量方程, 显然 7 个独立方程无法确定 16 个未知函数, 因此 3 个独立方程称为 Maxwell 方程组的非限定形式。从物理上考虑, 电磁场的运动变化、产生和消失总是和具体的媒介质相联系, 因而, 还必须考虑描述媒介质电磁特性的 3 个辅助方程

$$\mathbf{D} = \mathbf{f}_1(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \quad (1.1-3a)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{f}_2(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \quad (1.1-3b)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{f}_3(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \quad (1.1-3c)$$

(1.1-3a) 与 (1.1-3b) 式称为广义本构方程, (1.1-3c) 称为广义 Ohm 定律。上述三个辅助矢量方程共九个标量方程, 它们与独立的 3 个 Maxwell 方程联立, 使未知函数数与方程数一致, 构成了 Maxwell 方程组的限定形式。

由于电磁场量和源通常都是空间坐标与时间的函数, 而且它们之间的函数形式是多种多样的, 但是由 Fourier 变换可将随时间作任意变化的函数表为无数简谐函数之和, 因此本书只讨论随时间作简谐变化的定态电磁场问题。对于随时间以角频率 ω 作简谐变化的任意物理量, 例如电场强度等, 都可表为 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{j\omega t}$, 它们都

有共同的时间因子 $e^{j\omega t}$, 在分析讨论时均可略去。在略去共同的时间因子后, Maxwell 方程组中两个独立的旋度方程及电流连续性方程可表示为:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) + j\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.1-4a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) - j\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (1.1-4b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) + j\omega \rho(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.1-4c)$$

(1.1-4)式适用于简谐情况, 式中各变量均代表相应物理量的复振幅, 而(1.1-2)式中各变量则代表各相应物理量的瞬时值。

1.1.2 Maxwell 方程组的积分形式和边值关系

上面给出了 Maxwell 方程组的微分形式, 微分方程中所涉及的量都必须是良态的。若函数在其观察点及邻域内连续并有连续的导数, 则称该函数是良态的。显然, 微分形式的 Maxwell 方程组只能描述一种媒质内电磁场的变化规律, 然而实际中常常遇到有不同媒质交界面的情况。在分界面上, 由于媒质的性质有一突变, 电磁场量一般也要发生突变, 因而, 在分界面上的各点, Maxwell 方程组的微分形式已失去意义, 须找到新的方程来代替, 这就是我们将要讨论的电磁场的边值关系。

Maxwell 方程组的积分形式不要求各个量都是良态的, 所以它适用于包括媒质分界面在内的区域。利用 Gauss 及 Stokes 积分公式, 可由 Maxwell 方程组的微分形式导出相应的积分形式

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \frac{\partial}{\partial t} \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1.1-5a)$$

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} - \frac{\partial}{\partial t} \int_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1.1-5b)$$

$$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \rho dV \quad (1.1-5c)$$

$$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1.1-5d)$$

式中: 环线 l 为面 S 的闭合边界, 其正向与面元 $d\mathbf{S}$ 法向遵从右手螺旋法则。环面 S 为包围体积 V 的闭合面, 面元 $d\mathbf{S}$ 指向为 S 面的外法向。

由式(1.1-5)可导出电磁场的边值关系

$$\mathbf{u}_n \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad (1.1-6a)$$

$$\mathbf{u}_n \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s \quad (1.1-6b)$$

$$\mathbf{u}_n \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_s \quad (1.1-6c)$$

$$\mathbf{u}_n \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \quad (1.1-6d)$$

式中: $\mathbf{u}_n$ 为分界面上的单位法向矢量, 其方向由媒质 1 指向媒质 2。 $\mathbf{J}_s$ 是自由电流面密度(A/m), ρ_s 是自由电荷面密度(C/m²)。

(1.1-6) 式是边值关系的一般形式, 根据媒质的不同特性又可由它得到相应的具体形式。例如, 当两种媒质为理想介质时, 则界面上一般不存在自由面电荷和自由面电流($\mathbf{J}_s, \rho_s = 0$), 此时的边值关系都变成齐次式; 当媒质 1 为理想导体时, 由于理想导体中不存在电磁场, 则(1.1-6) 式中 $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{D}_1$ 均为零。

值得说明的是, 电磁场的边值关系虽然可由 Maxwell 方程组的积分形式导出, 但它们的正确性并不能由 Maxwell 积分方程组给予证明, 边值关系的正确性是由实验检验给予确定的。

1.1.3 媒介质的本构关系

自然界存在各种媒介质, 如电介质、电导体、铁磁体、铁电体等等。媒介质在电磁场作用下其内部电荷的运动主要有极化、磁化和传导三种形态, 分别用矢量 $\mathbf{P}$ 、 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{J}$ 表示。 $\mathbf{P}$ 是极化强度(C/m²), $\mathbf{M}$ 是磁化强度(A/m), $\mathbf{J}$ 是传导电流密度(A/m²), 它们的大小和取向一般由电磁场的大小、取向及媒质的电磁学、热力学等物理特性决定。

对于大多数导电媒质, 其传导电流与产生该电流的电场强度成正比, 这就是我们熟知的 Ohm 定律

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (1.1-7)$$

对于各向同性线性媒介质, 极化强度只与电场强度成正比, 磁化强度则只与磁场强度成正比, 即 $\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}$, $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$ 。因此, 在这样的媒介质中, 其本构关系是

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon \mathbf{E} \quad (1.1-8a)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu \mathbf{H} \quad (1.1-8b)$$

式中: $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 = (1 + \chi_e) \epsilon_0$ 为介电常数, 它与 ϵ_0 同量纲; $\mu = \mu_r \mu_0 = (1 + \chi_m) \mu_0$ 为导磁率, 与 μ_0 同量纲。 ϵ 、 μ 和 σ 三个用来描述媒介质宏观电磁特性的参量则称为媒介质的电磁参量。根据 ϵ 和 μ 的特征又可探讨媒介质的特性。在均匀媒介质中, ϵ 、 μ 是与坐标无关的常数, 在非均匀媒介质中, $\epsilon = \epsilon(r)$, $\mu = \mu(r)$ 是坐标的函数。在理想介质中 ϵ 和 μ 是实数。一般情况下, ϵ 和 μ 是复数, 如果其虚部远小于实部, 这种媒介质称为良介质, 否则就称为有耗介质。对于有耗介质

$$\epsilon = \epsilon' - j\epsilon'' \quad (1.1-9a)$$

$$\mu = \mu' - j\mu'' \quad (1.1-9b)$$

一般说来, ϵ'' 和 μ'' 分别代表极化损耗和磁化损耗。对于不计极化损耗的导电媒质, 在简谐情况下也可用复介电常数来描述。

$$\epsilon = \epsilon' - j \frac{\sigma}{\omega} \quad (1.1-10)$$

式中: ω 是电磁场的角频率, σ 是电导率, 这里的 $\frac{\sigma}{\omega}$ 就相当于 (1.1-9a) 中的 ϵ'' 。

在工程应用中, 通常给出的媒质的电磁参量是介电常数和损耗角 δ , 这相当于给出了 (1.1-9a) 式中的 ϵ' 及 ϵ''/ϵ' , 因为

$$\delta = \arctan \frac{\epsilon''}{\epsilon'} \quad (1.1-11)$$

本书只讨论各向同性、线性、均匀媒介质, 其 Ohm 定律及本构关系由 (1.1-7) 和 (1.1-8) 式描述。在一般情况下, 由于极化、磁化和传导与电磁场有着复杂的关系, 其本构关系和 Ohm 定律必须用 (1.1-3) 式的广义形式表述。有关这方面内容的详细讨论请参阅参考资料 [1] 及 [2]。

1.2 电磁场的基本定理

1.2.1 二重性原理

如果描述两种不同现象的方程具有相同的数学形式, 则它们的

解也将取相同的数学形式,这样的事实称为二重性或对偶性。在这里,形式相同的两个方程称为二重性方程,在二重式中占有同样位置的量称为二重量。从(1.1-2)式可以看出,在 $\rho, \mathbf{J} = 0$ 的无源区内,Maxwell方程组中关于电场和磁场的两对方程,有完全相同的数学形式,即自由空间齐次Maxwell方程组是服从二重性原理的。遗憾的是,当有源存在时,Maxwell方程组的这种对称性受到破坏,因为迄今实验能够证实的产生电磁场的真实场源是电荷与电流。为了追求非齐次Maxwell方程组的对称性,物理学家们奋斗了半个多世纪,探索类似如电子的能单独产生磁场与电场的磁荷(磁单极)和磁流存在的可能性,但迄今为止,仍未找到能肯定磁单极存在的确凿实验证据。

由于对偶性可以使许多复杂问题的计算得到简化,在没有证实磁单极是否确实存在以前,我们不妨将假想的“磁荷”与“磁流”作为一种数学场源引入到Maxwell方程组中,使之具有对称性。这种方法在分析问题时常常用到,但要注意这种假想场源的实质是一种等效源。例如,在计算磁性物体产生的磁场时,可引入等效面磁荷密度 ρ_m 和等效体磁荷密度 ρ_m ,且 $\rho_m = -\nabla \cdot \mathbf{M}$, $\rho_m = \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{M}$,其中 $\mathbf{M}$ 是磁化强度, $\mathbf{u}_n$ 是界面法矢。又如,在计算小电流环产生的场时,可将其等效为磁偶极子,当环的面积为 S ,环中电流 $I = I_0 e^{j\omega t}$,则可令等效磁偶极矩 $Q_m I = \mu I S$ 。与振荡电偶极子是线电流元类似,振荡磁偶极子也可等效为线磁流元,故 $I_m l$

$= j\omega Q_m I = j\omega \mu I S$,见图1.2-1。

这表明引入磁荷、磁流概念的理论意义,即它们可代替某些电流分布。由上面等效过程,不难得到,等效磁荷及磁流与小电流环的电荷分布之间的关系式

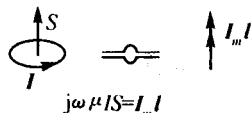


图 1.2-1 电流环与磁流元的等效

$$Q_m = \frac{\mu I S}{l} \quad (1.2-1a)$$

$$I_m = j\omega \frac{\mu IS}{l} \quad (1.2-1b)$$

同理也可将线电流元等效为磁流环, 见图 1.2-2。

引入磁荷和磁流概念后, Maxwell 方程组应为:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{J}_m \quad -j\omega \epsilon I_m S = I \quad (1.2-2a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (1.2-2b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.2-2c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m \quad (1.2-2d)$$

注意, 引入的假想磁荷与磁流也应满足磁流连续性方程, 故 (1.2-2a) 式中 $\mathbf{J}_m$ 前需取负号, 此时对 (1.2-2a) 式求散度并利用 (1.2-2d) 式就可得磁流连续性方程

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_m + \frac{\partial \rho_m}{\partial t} = 0 \quad (1.2-3)$$

引入假想磁荷与磁流之后, 电磁场的边值关系应改为

$$\mathbf{u}_n \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = -\mathbf{J}_m \quad (1.2-4a)$$

$$\mathbf{u}_n \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s \quad (1.2-4b)$$

$$\mathbf{u}_n \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_s \quad (1.2-4c)$$

$$\mathbf{u}_n \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = \rho_m \quad (1.2-4d)$$

式中: $\mathbf{u}_n$ 为两种媒质分界面的单位法矢, 等号右侧下脚标 s 表示各量的面密度, 见图 1.2-3。

如果场源只有电荷与电流, 由 (1.2-2) 式可将定态时 Maxwell 方程组表为

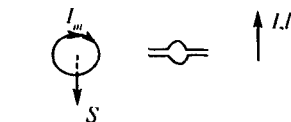


图 1.2-2 磁流环与电流元的等效



图 1.2-3 有面源分布的边值关系