高职高专基础课系列规划教材

应用数学基础

尹清杰　朱维栩　主编

（下册）

YINGYONG SHUXUE JICHU

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高职高专基础课系列规划教材

应用数学基础

下册

主　编　尹清杰　朱维栩
副主编　姜泽宏　杨晓莹　宋志坚
参　编　吕冰清　张新元
主　审　刘　浩

机械工业出版社

本书着重突出了“以应用为目的，以够用为度”的职业教育特色。书中突出思想分析，注重能力培养，强化实际应用。全书分上、下两册。本书为下册，主要内容有：多元函数微积分初步、矩阵初步、无穷级数、拉普拉斯变换、概率论与数理统计等。

本书有配套的学习指导。

本书可作为高职高专基础课教材，也可作为成人教育或专升本教材。

图书在版编目（CIP）数据

应用数学基础．下册/尹清杰，朱维栩主编．—北京：机械工业出版社，2004.7

（高职高专基础课系列规划教材）

ISBN 7-111-14639-5

Ⅰ．应… Ⅱ．①尹… ②朱… Ⅲ．应用数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ．O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 054241 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）

责任编辑：[illegible] 宋学敏 版式设计：霍永明 责任校对：魏俊云

封面设计：张 静 责任印制：洪汉军

北京京丰印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2004 年 8 月第 1 版·第 1 次印刷

787mm×1092mm 1/16·12 印张·292 千字

定价：18.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

本社购书热线电话（010）68993821、88379646

封面无防伪标均为盗版

前　　言

本书是根据教育部最新制定的“高职高专教育高等数学课程的教学基本要求”，结合目前职业教育专科层次教材针对性较差的实际情况而编写的。

本书突出“以应用为目的，以够用为度”的职业教育特色，并遵循“突出思想分析，立足能力培养，强化实际应用”的原则，同时力求学生及教师使用方便。

为改变目前教材所需学时数与实际学时数相脱节的状况，我们根据目前数学教材中存在的问题，进行了学时数压缩和个别章节内容的调整和合并。

本套教材分上、下两册，每册各自配有学习指导，共四本。

参加本书编写的有：尹清杰，朱维栩，姜泽宏，杨晓莹，宋志坚，吕冰清，张新元。

本书由河南大学教授刘浩主审，刘教授对教材的整体构思和具体的编写内容进行了认真的审阅，并提出了许多宝贵的意见，在此，我们表示衷心的感谢。

本书在编写过程中，自始自终得到了机械工业出版社的热情关怀和指导，对整个编审工作给予了大力支持和协助，在此一并表示感谢。

由于水平所限，时间也比较仓促，书中疏漏和不妥之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

目　录

第七章　多元函数微积分初步

前面介绍了一元函数及其微积分，本章将研究多元函数的微积分学，重点是二元函数的微积分学.二元函数是定义在平面上的曲面的函数，为此，首先要建立空间直角坐标系，在其上建立二元函数的概念，并介绍一些常见的二次曲面的方程和图像.多元函数与一元函数在理论及研究方法等方面都有许多相同之处，因此，多元函数的微积分是一元函数的微积分的推广与发展.

第一节　空间解析几何简介

一、空间直角坐标系

为了进行空间图形与数之间的研究，需要建立空间的点与有序数组之间的联系，这种联系通常是用类似于平面解析几何的方法，通过引进空间直角坐标系来实现的.

定义　过空间一定点 O，引三条互相垂直且相交于 O 点的数轴.三条数轴分别称为 x 轴(**横轴**)，y 轴(**纵轴**)，z 轴(**竖轴**)，三条数轴满足右手系，构成了**空间直角坐标系**(图 7-1).

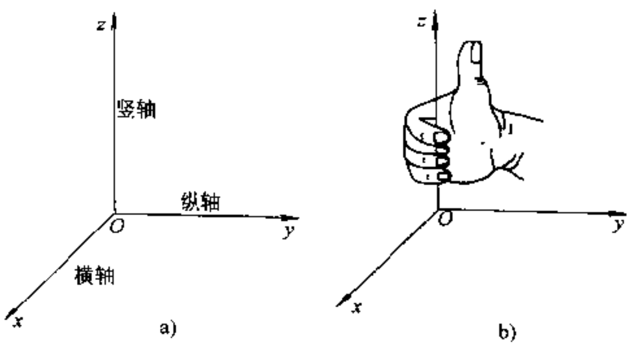

图　7-1

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面，这样得到的三个平面统称为**坐标面**，并分别称为 xOy 平面、yOz 平面和 zOx 平面.三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分叫做**卦限**.含有 x 轴正半轴、y 轴正半轴及 z 轴正半轴的卦限叫做第一卦限，位于 xOy 平面上方(如图 7-2)，按逆时针方向依次为第二、第三和第四卦限面，分别用字母Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ表示.在 xOy 平面的下方，与第一卦限对应的为第五卦限，按逆时针方向依次为第六、第七和第八卦限，分别用字母Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ来表示(图 7-2).

设 M 为空间内一已知点(如图 7-3)，过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴，它们与 x 轴、y 轴、z 轴的交点依次为 P、Q、R.这三点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标依次为 x、y、z，于是空间的一点就惟一地确定了一组有序数组 (x, y, z)；反之，给定一组有序数组 (x, y, z)，可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P，在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q，在 z 轴上取坐标为 z 的点 R.过 P、Q、R 三点分别作 x 轴、y 轴和 z 轴的垂直平面，这三个垂直平面的交点 M 便是由有序数组 (x, y, z) 所确定的惟一的点.

这样，就建立了空间的点 M 与有序数组 (x, y, z) 之间的一一对应关系.这组数 $(x,$

y, z)叫做点 M 的坐标，并依次称 x、y 和 z 为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标. 坐标为(x, y, z)的点 M 通常记为 $M(x, y, z)$.

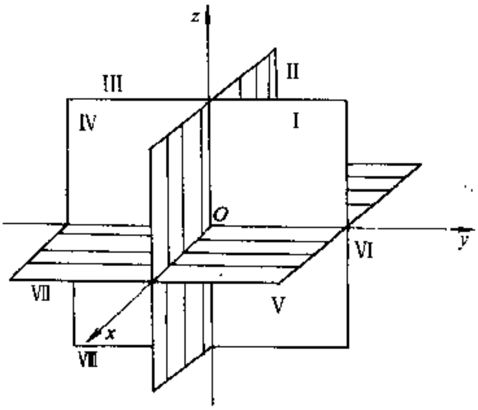

图　7-2

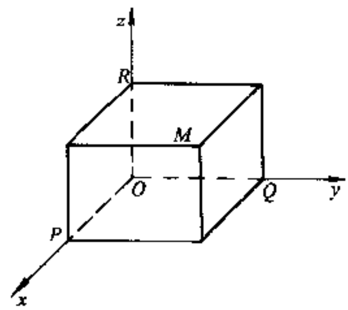

图　7-3

显然，原点的坐标为 $O(0, 0, 0)$. 若点 $M(x, y, z)$ 位于坐标面或坐标轴上时，其坐标分别有一个或两个为零. 例如，点 M 位于 xOy 面上或 x 轴上时的坐标分别为 $M(x, y, 0)$, $M(x, 0, 0)$.

二、空间两点间距离

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$、$M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间两点，过 M_1、M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面，这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体，如图 7-4 所示. 用 $|M_1M_2|$ 表示 M_1 和 M_2 两点间的距离，则有

$$|M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2$$
$$= |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2$$

由于

$$|M_1P| = |x_2 - x_1|,$$
$$|PN| = |y_2 - y_1|,$$
$$|NM_2| = |z_2 - z_1|$$

所以

$$|M_1M_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

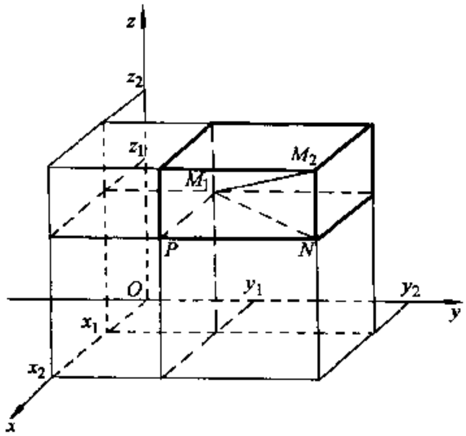

图　7-4

由此得 M_1、M_2 两点间距离为

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{7-1}$$

特殊地，点 $M(x, y, z)$ 与原点 $O(0, 0, 0)$ 的距离为

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

例 1　在 y 轴上求一点，使其与点 $A(3, 1, 2)$ 和点 $B(4, -1, 1)$ 的距离相等.

解　设 y 轴的点为 $P(0, y, 0)$. 依题意有 $|PA| = |PB|$，即

$$\sqrt{(0-3)^2 + (y-1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{(0-4)^2 + (y+1)^2 + (0-1)^2}$$

化简得　$y=-1$

所以点 $P(0,\ -1,\ 0)$为所求点.

例 2　求证以 $M_1(4,\ 3,\ 1)$、$M_2(7,\ 1,\ 2)$、$M_3(5,\ 2,\ 3)$三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

解　因为

$$|M_1M_2|=\sqrt{(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2}=\sqrt{14}$$

$$|M_2M_3|=\sqrt{(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{6}$$

$$|M_3M_1|=\sqrt{(4-5)^2+(3-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{6}$$

所以，$|M_2M_3|=|M_3M_1|$，即$\triangle M_1M_2M_3$为等腰三角形.

三、曲面方程的概念

已经知道，空间一个平面，可以用三元一次方程来表示；反之，一个三元一次方程的图形是一个平面. 一般情况下，任何曲面都可以看作动点 $M(x,\ y,\ z)$的轨迹，在此意义下，如果曲面 S 与三元方程$F(x,\ y,\ z)=0$ 有下述关系：

1) 曲面 S 上任一点的坐标都满足三元方程.

2) 不在曲面 S 上的点的坐标都不满足这个方程.

那么，这个方程就叫做曲面 S 的方程，而曲面 S 就叫做这个方程的图形.

如日常生活中，所看到的反光镜的镜面、管道外表面等都是空间曲面，如图 7-5 所示.

本书主要研究一些常见的二次曲面.

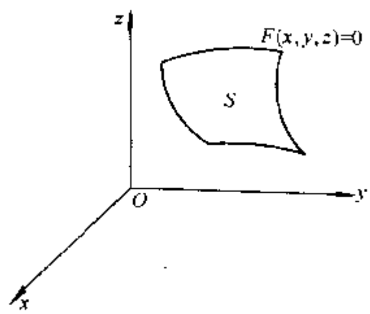

图　7-5

四、二次曲面

关于变量 $x,\ y,\ z$ 的二次方程$F(x,\ y,\ z)=0$所表示的曲面称为二次曲面. 常用的二次曲面有以下几种：

1. 球面方程

建立球心在点 $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$、半径为 R 的球面的方程.

设 $M(x,\ y,\ z)$是球面上的任一点(图 7-6)，则有

$$|M_0M|=R$$

据两点间距离公式，可得

$$|M_0M|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

两边平方后得所求球面方程

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

特别地，当球心为坐标系原点 O 时，球面方程为

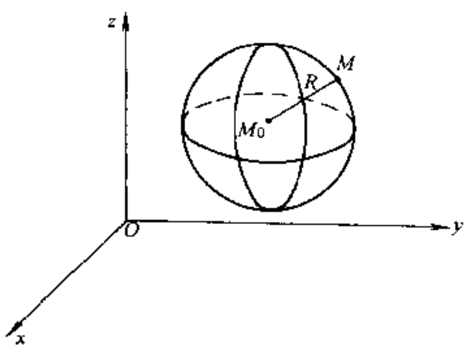

图　7-6

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

例 3 求方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y=0$ 表示的曲面.

解 原方程可以写成

$$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=5$$

经过配方，可见原方程表示球心在点 $M(1,\ -2,\ 0)$、半径为 $R=\sqrt{5}$的球.

一般地，三元二次方程 $Ax^2+Ay^2+Az^2+Dx+Ey+Fz+G=0$，缺 xy，yz，zx 各项(称为交叉项)，且平方项的系数相同，则其图形就是一个球面.

2. 旋转曲面

平面上一条曲线 C 绕同一平面上的一条定直线旋转而成的曲面叫做旋转曲面，旋转曲线 C 称为**母线**，定直线称为**旋转轴**.

设在 yOz 坐标面上有一已知曲线 C，它的方程为 $f(y,\ z)=0$. 曲线绕 z 轴旋转一周，得到一个以 z 轴为旋转轴，以 $f(y,\ z)=0$ 为母线的空间几何体(图 7-7).

设 $M_1(0,\ y_1,\ z_1)$为曲线 C 上的任一点，有 $f(y_1,\ z_1)=0$. 当曲线 C 绕 z 轴旋转时，点 M_1 也绕 z 轴转到另一点$M(x,\ y,\ z)$，这时 $z=z_1$ 保持不变，且点 M 到 z 轴的距离为

$$d=\sqrt{x^2+y^2}=|y_1|$$

将 $z_1=z$，$y=\pm\sqrt{x^2+y^2}$代入 $f(y_1,\ z_1)=0$，得到所求旋转曲面的方程为

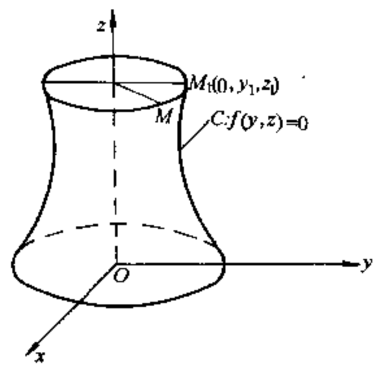

图 7-7

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z)=0$$

同理，曲线 C 绕 y 轴旋转所成的旋转曲面的方程为 $f(y,\ \pm\sqrt{x^2+z^2})=0$，如图 7-8 所示.

3. 柱面

直线 L 沿曲线C 平行移动所形成的曲面叫做**柱面**，定曲线 C 叫做柱面的**准线**，动直线 L 叫做柱面的母线.

由定义可以看出，只含 x，y 的方程$F(x,\ y)=0$ 在空间直角坐标系中表示母线平行于 z 轴的柱面，其准线是 xOy 面上的曲线C: $F(x,\ y)=0$(图 7-9).

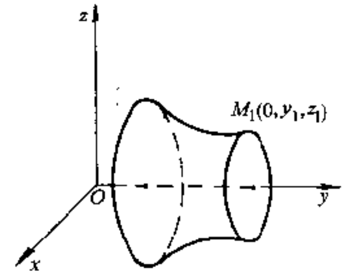

图 7-8

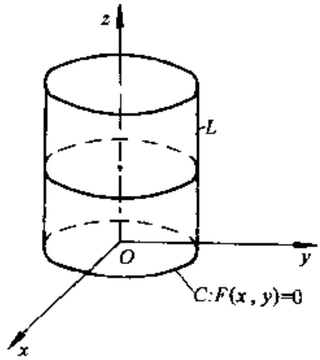

图 7-9

只含 x，z 的方程 $G(z, x)=0$，表示母线平行于 y 轴的柱面.例如，方程 $x-z=0$ 表示母线平行于 y 轴的柱面(图 7-10).

只含 y，z 而缺 x 的方程 $E(y, z)=0$，表示母线平行于 x 轴的柱面.例如，方程 $y-z=0$ 表示母线平行于 x 轴的柱面(图 7-11).

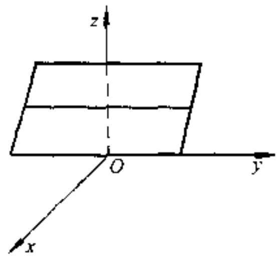

图 7-10

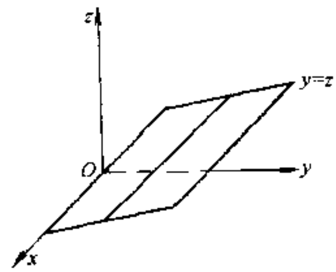

图 7-11

4. 椭球面

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{7-2}$$

所确定的曲面叫做椭球面(图 7-12).

对常见的二次曲面，一般采用平行截面法来确定方程面的形状.所谓的平行截面法，即用坐标面及一系列的平行于坐标面的平面去截曲面，对所截出的交线(或截痕)进行分析，从中得出曲面大致形状，进而大致地勾画出曲面的形状.

下面用平行截面法来认识椭球面的形状.首先，用三个坐标面去截椭球面，则截线方程分别为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases},\quad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases},\quad \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases}$$

它们是分别位于 xOy 面，yOz 平面、zOx 平面上的椭圆.

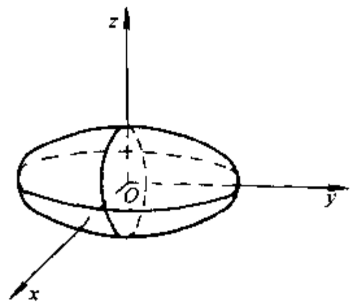

图 7-12

用平行于 xOy 面的平面 $z=k(|k|<c)$ 的平面截椭球面，则得到交线为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\left(\dfrac{k}{c}\right)^2\\ z=k\end{cases}$$

可以看出，这是平面 $z=k$ 上的上一个椭圆.

综上所述，方程(7-2)表示的曲面为椭球面(图 7-12).

特别地，当 $a=b=c$ 时，方程(7-2)表示了球心在坐标原点、半径为 a 的球面.当 a、b、c 三个数中有两个数相等时，则式(7-2)表示以某一坐标轴为旋转轴的旋转椭球面.

5. 抛物面

由方程

$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z \qquad (p\text{ 与 }q\text{ 同号})$$

所表示的曲面叫做椭圆抛物面(图 7-13).

为了解抛物面的形状，先用坐标面 $z=0$ 与去截曲面，截得一点，即为原点 $O(0,0,0)$，用平面 $z=z_1(z_1>0)$截这曲面，所得截痕为中心在 z 轴上的椭圆

$$\frac{x^2}{2pz_1}+\frac{y^2}{2qz_1}=1$$

再用坐标面 $xOz(y=0)$或平面 $y=y_1$ 截这曲面所得截痕分别为抛物线

$$x^2=2pz \text{ 和 } x^2=2p\left(z-\frac{y_1^2}{2q}\right)$$

同理可知，用坐标面 $yOz(x=0)$及平面 $x=x_1$ 截曲面所得截痕分别为抛物线

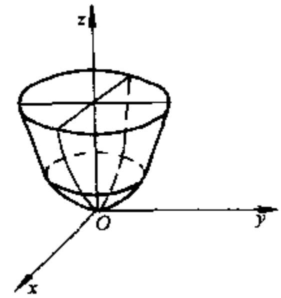

图 7-13

$$y^2=2qz \text{ 和 } y^2=2q\left(z-\frac{x_1^2}{2p}\right)$$

习 题 7-1

1. 在空间直角坐标系中，指出下列各点所在的卦限.

   $A(1,-2,3)$； $B(2,3,-4)$； $C(2,-3,-4)$； $D(-2,-3,1)$

2. 在坐标面上和在坐标轴上的点的坐标各有什么特征，指出下列各点的位置 $A(3,4,0)$，$B(0,4,3)$，$C(3,0,0)$，$D(0,-1,0)$.

3. 在 yOz 面上，求与三点 $A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$和 $C(0,5,1)$等距离的点.

4. 试证明以三点 $A(4,1,9)$，$B(10,-1,6)$，$C(2,4,3)$为顶点的三角形是等腰直角三角形.

5. 画出下列各方程所表示的曲面.

   (1) $(x-1)^2+(y+4)^2+z^2=25$ (2) $x^2-y^2=0$

   (3) $\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$ (4) $y^2-z=0$

   (5) $x^2+y^2=3z$ (6) $x^2+2y^2+3z^2=9$.

6. 指出下列方程在空间解析几何中表示什么图形.

   (1) $x=2$ (2) $y=x+1$ (3) $x^2+y^2=4$

7. 说明下列旋转曲面是怎样形成的.

   (1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{9}=1$ (2) $x^2+y^2+z^2=1$

8. 指出下列方程所表示的曲线.

   (1) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=25\\x=3\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x^2+4y^2+9z^2=36\\y=1\end{cases}$

9. 描绘下列各组曲面在第一卦限内所围成的图形.

(1) $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=2$, $y=1$, $3x+4y+2z-12=0$

(2) $x=0$, $y=0$, $z=1$, $y=2$, $z=\frac{1}{4}y$

(3) $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x^2+y^2=R^2$, , $y^2+z^2=R^2$

(4) $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y=1$, $z=x^2+y^2$

第二节　二元函数的概念

一、二元函数的概念

(1) **邻域**　设 $p_0(x_0, y_0)$是 xOy 平面上的一个点，δ 为一正数，与点 $p_0(x_0, y_0)$距离小于 δ 的点 $p(x, y)$的全体称为点 p_0 的 δ **邻域**，记为 $U(p_0, \delta)$，即

$$U(p_0, \delta)=\{(x, y)\mid\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$

在几何上，$U(p_0, \delta)$就是 xOy 平面上以点 $p_0(x_0, y_0)$为中心、$\delta>0$ 为半径的圆的内部的点 $p(x, y)$的全体.

(2) **区域**　设 E 是平面上的一个点集，p 是平面上的一个点，如果存在点 p 的某一邻域 $U(p)$，使 $U(p)\subset E$，则称 p 为 E 的**内点**(图 7-14).

可见，点集 E 的内点属于 E. 如果点集 E 的点都是内点，则称 E 为**开集**. 例如，点集 $E_1=\{(x, y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$中每个点都是 E_1 的**内点**，因此 E_1 为开集. 如果点 p 的任一邻域内既有属于 E 的点，也有不属于 E 的点(点 p 本身可以属于 E，也可以不属于 E)，则称 p 为 E 的**边界点**(图 7-15). E 的边界点的全体称为 E 的**边界**. 如上例中 E_1 的边界是圆周 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=4$.

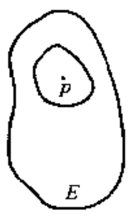

图　7-14

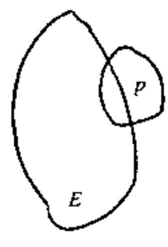

图　7-15

设 D 为开集，如果对于 D 内任何两点，都可用折线联结起来，且该折线上的点都属于 D，则称 D 是连通的，连通的开集称为**区域或开区域**，例如，$\{(x, y)\mid x+y>0\}$是区域. 开区域连同它的边界一起，称为**闭区域**，例如$\{(x, y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$是闭区域. 对于点集 E，如果存在正数 k，使一切点 $p\in E$ 与某一定点 A 间的距离$|Ap|$不超过 k，即

$$|Ap|\leqslant k$$

对一切 $p\in E$ 成立，则称 E 为**有界点集**，否则称为**无界点集**，例如，$\{(x, y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant$

$4\}$是有界闭区域，$\{(x, y)|x+y>0\}$是无界开区域.

二、二元函数

定义 设D是平面上的一个点集，如果对于每一个点$p(x, y)\in D$，变量$z=f(x, y)$按照一定法则总有确定的值和它对称，则称z是变量x、y的**二元函数**(或点p的函数)，记为$z=f(x, y)$(或$z=f(p)$).

点集D称为该函数的**定义域**，x，y称为**自变量**，z称为**因变量**，数集$\{z|z=f(x, y), (x, y)\in D\}$称为该函数的**值域**.

z是x、y的函数，也可记为$z=z(x, y)$或$z=\varphi(x, y)$等.

设函数$z=f(x, y)$的定义域为D，对于任意取定的点$p(x, y)\in D$，对应的函数值为$z=f(x, y)$.这样，以x为横坐标、y为纵坐标、$z=f(x, y)$为竖坐标，在空间就确定一点$M(x, y, z)$，当(x, y)取遍D上的一切点时，得到一个空间点集$\{(x, y, z)|z=f(x, y), (x, y)\in D\}$，这个点集称为二元函数$z=f(x, y)$的图形(图 7-16).

通常也说二元函数的图形是一张曲面.

例如，$y=f(x)$为平面曲线；$x^2+y^2+z^2=a^2$，即$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的图形为球心在原点、半径为a的球面，它的定义域是圆形闭区域$D=\{(x, y)|x^2+y^2\leqslant a^2\}$.

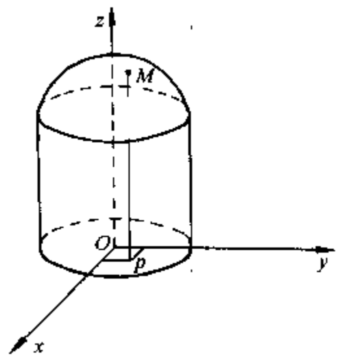

图 7-16

三、二元函数的极限

定义 设函数$f(x, y)$在开区域(或闭区域)D内有定义，$p_0(x_0, y_0)$是D的内点或边界点，如果对于任意给定的正数ε，总存在正数δ，使得对于满足

$$0\leqslant|pp_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

的一切点$p(x, y)\in D$，都有

$$|f(x, y)-A|<\varepsilon$$

成立，则称常数A为函数$f(x, y)$当$x\to x_0$，$y\to y_0$时的**极限**，记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x, y)=A \text{ 或 } f(x, y)\to A(\rho\to 0)$$

这里$\rho=|pp_0|$.

例 1 求$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 2}}\dfrac{\sin xy}{x}$.

解 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 2}}\dfrac{\sin xy}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 2}}\dfrac{y\sin xy}{xy}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 2}}y\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 2}}\dfrac{\sin xy}{xy}=2$

例 2 判断函数$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x^2+y^2\neq 0)\\ 0 & (x^2+y^2=0)\end{cases}$在点(0, 0)的极限是否存在.

解 首先，$p(x, y)$分别沿x轴或y轴向(0, 0)点趋近，有

$$\lim_{x\to0} f(x,\ 0)=\lim_{x\to0}0=0 \qquad \lim_{y\to0} f(0,\ y)=\lim_{y\to0}0=0$$

然后，$p(x,\ y)$再沿直线 $y=kx$ 向(0，0)点趋近，有

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=kx\to0}} f(x,\ y)=\lim_{\substack{x\to0\\y=kx\to0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

可见，$p(x,\ y)$从不同方向向点(0，0)趋近的极限不等，从而

$$f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x^2+y^2\neq0)\\ 0 & (x^2+y^2=0)\end{cases}$$

在点(0，0)不存在极限.

四、二元函数的连续性

定义　设函数 $f(x,\ y)$在开区域(或闭区域)D 内有定义，$p_0(x_0,\ y_0)$是 D 的内点或边界点，且 $p_0\in D$. 如果

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,\ y)=f(x_0,\ y_0)$$

则称函数 $z=f(x,\ y)$在点 $p_0(x_0,\ y_0)$**连续**.

如果函数 $f(x,\ y)$在开区域(或闭区域)D 内的每一点连续，那么，就称函数 $f(x,\ y)$在 D 内连续，也称函数 $f(x,\ y)$是 D 内的连续函数.

若函数 $f(x,\ y)$在点 $p_0(x_0,\ y_0)$不连续，则 p_0 称为函数 $f(x,\ y)$的**间断点**.

如，函数 $f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x^2+y^2\neq0)\\ 0 & (x^2+y^2=0)\end{cases}$ 在点(0，0)间断.

初等二元函数在其定义域内是连续的.

一般地，若 $f(p)$是初等函数，且 p_0 是 $f(p)$的定义域内的内点，则 $f(p)$在点 p_0 处连续，有

$$\lim_{p\to p_0} f(p)=f(p_0).$$

例 3　求$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

解　$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{(\sqrt{xy+1}-1)(\sqrt{xy+1}+1)}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}=\dfrac{1}{2}$

习　题　7-2

1. 求下列各函数的定义域.

(1) $z=\ln(y^2-2x+1)$　　(2) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$

(3) $z=\ln(y-x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

2. 求下列各极限.

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to0}}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$　　(4) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\y\to0}}\dfrac{\sin xy}{y}$　　(6) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$

3. 求函数 $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$ 的间断点.

第三节　偏　导　数

一、偏导数的概念

定义　设函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内有定义，当 y 固定在 y_0，而 x 在 x_0 处有改变量 Δx 时，函数的相应改变量

$$f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)$$

称为 z **偏** x **的改变量**，记为 Δz_x，即

$$\Delta z_x=f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)$$

同理，当 x 固定在 x_0，而 y 在 y_0 处有改变量 Δy 时，函数相应的改变量

$$\Delta z_y=f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)$$

称为 z **偏** y **的改变量**.

定义　设函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内有定义，当 y 固定在 y_0，而 x 在 x_0 处有改变量 Δx，函数有相应的改变量

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)$$

如果

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 x 的**偏导数**，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\text{或}\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\text{或}\ z_x\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$$

类似地，函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 y 的偏导数定义为

$$\lim_{\Delta y\to0}\frac{f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

记为 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ 或 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ 或 $z_y\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$.

如果函数 $z=f(x, y)$ 在区域 D 内每一点 (x_0, y_0) 处对 x 的偏导数都存在，那么，这个偏导数就是 x、y 的函数，称为函数 $z=f(x, y)$ 对自变量 x 的偏导函数，记作

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x},\ z_x$$

类似地，可以定义函数 $z=f(x,\ y)$对自变量 y 的偏导函数，记为

$$\frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ z_y$$

由偏导函数的概念可知，$f(x,\ y)$在点$(x_0,\ y_0)$处对 x 的偏导数$f_x(x_0,\ y_0)$是偏导函数 $f_x(x,\ y)$在点$(x_0,\ y_0)$处的函数值；$f(x,\ y)$在点$(x_0,\ y_0)$处对 y 的偏导数$f_y(x_0,\ y_0)$是偏导函数 $f_y(x,\ y)$在点$(x_0,\ y_0)$处的函数值.同一元函数的导函数一样，在不引起混淆的地方把偏导函数，简称为**偏导数**.

至于实际求函数 $z=f(x,\ y)$的偏导数的方法，采用的仍然是一元函数的方法.因为这里的自变量是一个一个的在变动，也就是在求$\frac{\partial f}{\partial x}$时，只需把 y 暂时看作常量，对变量 x 求导数；同理在求$\frac{\partial f}{\partial y}$时，只需把 x 暂时看作常量，对变量 y 求导数即可.

例 1　求 $z=x^2+3xy+y^2$ 在点(1，2)处的偏导数.

解　把 y 看作常量，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+3y$$

把 x 看作常量，得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=3x+2y$$

再将(1，2)代入上面的结果，就得

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=2\times1+3\times2=8$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=3\times1+2\times2=7$$

例 2　求 $z=x^2\sin2y$ 的偏导数.

解　$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\sin2y$　　$\frac{\partial z}{\partial y}=2x^2\cos2y$

例 3　设 $z=x^y$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解　$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$　　$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$

二、二元函数偏导数的几何意义

设 $M_0(x_0,\ y_0,\ f(x_0,\ y_0))$为曲面 $z=f(x,\ y)$上的一点，过 M_0 作平面 $y=y_0$ 截此曲面得一曲线.此曲线在平面$y=y_0$上的方程为 $z=f(x,\ y_0)$，则偏导数 $f_x(x_0,\ y_0)$的几何意义就是这条曲线在点 M_0 处的切线 M_0T_x 对 x 轴的斜率，如图 7-17 所示.

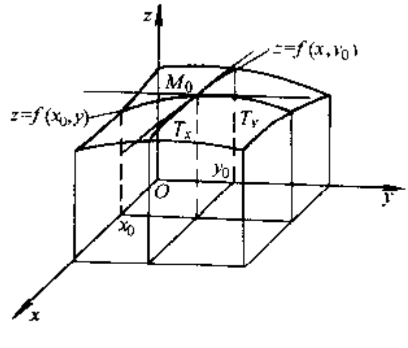

图　7-17

同样过 M_0 作平面 $x=x_0$ 截此曲面得一曲线，此曲线在平面 $x=x_0$ 上的方程为 $z=f(x_0,\ y)$,则偏导数 $f_y(x_0,\ y_0)$的几何意义就是，这条曲线在点 M_0 处的切线 M_0T_y 对 y 轴的斜率.

三、高阶偏导数

定义 设函数 $z=f(x,\ y)$在区域 D 内具有连续的偏导数 $f_x(x,\ y)$、$f_y(x,\ y)$，如果 x、y 的函数 $f_x(x,\ y)$、$f_y(x,\ y)$的偏导数仍然存在，则称它们的偏导数是函数 $z=f(x,\ y)$的**二阶偏导数**，分别为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \tag{7-3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \tag{7-4}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \tag{7-5}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \tag{7-6}$$

式(7-4)、式(7-5)所示为混合偏导数.应注意的是，当混合偏导数连续时则必相等，即与求导顺序无关;进而可以得到三阶、四阶以至于 n 阶偏导数.即$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$，$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}$，…，$\frac{\partial^n z}{\partial x^n}$等，二阶及其以上的偏导数统称为高阶偏导数.

例 4 设 $z=x^3y^2-3xy^3-xy+1$，求二阶偏导数.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2-3y^3-y$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6xy^2$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6x^2y-9y^2-1$

$\frac{\partial z}{\partial y}=2x^3y-9xy^2-x$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x^3-18xy$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=6x^2y-9y^2-1$

四、多元复合函数的偏导数

定义 设函数 $z=f(u,\ v)$，而 $u=u(x,\ y)$，$v=v(x,\ y)$均为 x、y 的函数，则函数 $z=f[u(x,\ y),\ v(x,\ y)]$叫做 x，y 的**复合函数**，其中 u，v 叫做中间变量，x，y 叫做自变量.

定理 若函数 $u=u(x,\ y)$，$v=v(x,\ y)$在点$(x,\ y)$都具有对 x 及 y 的偏导数，函数 $z=f(u,\ v)$在对应点$(u,\ v)$处具有连续偏导数，则复合函数 $z=f[u(x,\ y),\ v(x,\ y)]$在点(x,y)处存在两个偏导数，且具有下列公式

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{7-7}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \tag{7-8}$$

定理中的公式叫做多元复合函数的偏导数的**链锁法则**，它可以推广到各种复合关系的复合函数中去.