21世纪高等院校教材

高等数学

（下册）

刘铁夫 主 编
文松龙 金承日 丁效华 副主编

科学出版社
www.sciencep.com

21 世纪高等院校教材

高 等 数 学

（下册）

刘铁夫 主 编

文松龙 金承日 丁效华 副主编

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书是由哈尔滨工业大学(威海)10余位数学教师根据面向21世纪教学内容和课程体系改革的要求，结合自身多年的教学实践经验而编写的数学教材．全书分上、下两册．本书为下册，主要内容包括：向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、级数．每节后都配有A、B两组习题，B组习题略难于A组习题．每章后配有复习题，读者可根据需要选用．

本书可作为理(非数学专业)工科大学本科教材或教学参考书．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(上、下)/刘铁夫主编．—北京：科学出版社，2005.8

(21世纪高等院校教材)

ISBN 7-03-015409-6

Ⅰ.高…　Ⅱ.刘…　Ⅲ.高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第036839号

责任编辑：赵　靖　祖翠娥/责任校对：张怡君

责任印制：安春生/封面设计：陈　敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

雨源印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2005年8月第 一 版　　开本：B5（720×1000）

2005年8月第一次印刷　　印张：12 1/4

印数：1—3 000　　字数：233 000

定价：35.00元(上下册)

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉)

前　　言

本书是哈尔滨工业大学(威海)数学系10余位教师根据面向21世纪教学内容和课程体系改革的要求,结合自身的教学实践编写出来的.

全书力求知识结构合理,论述严谨、清晰和简洁,内容少而精,力求使学生在较少的学时内不仅能掌握高等数学的基本知识,还能理解其丰富的数学内涵.除了每小节后的习题外,各章后还有复习题,供有更高要求的同学选用.全书分上、下两册.上册包括第1～6章,下册包括第7～11章.第1章、第2章和第8章由刘铁夫执笔,第3章、第4章、第5章、第6章、第7章、第9章、第10章、第11章分别由金承日、林迎珍、丁效华和邹巾英、李宝家、伊晓东、李福梅、文松龙、杨毅执笔.金承日、文松龙分别对上、下册进行了整体格式和行文的统一处理,李晓芳、吕敬亮提供了书中习题的答案.

成书后邹巾英、刘铁夫在校内试用两年,并对本书进行了校正修改.出版前丁效华、刘铁夫又进行了最后的定稿润色,崔明根、孙振绮、张宪君三位教授对本书进行了审阅,并提出了许多宝贵意见.

本书适用于高等工科院校不同专业的学生.书中带 * 号的内容可以不读,这不影响后面内容的学习.

我们对支持本书出版的崔令江教授和其他同志表示深深的谢意.

由于作者水平有限,错误和缺陷在所难免,恳请诸位专家和广大读者提出宝贵的批评和建议.

作　者

2005年3月

目　录

第 7 章　向量代数与空间解析几何

向量的概念起源于物理学，通过数学的抽象、研究和发展，已经成为自然科学和应用科学重要的研究工具．空间解析几何，就是用代数方法来研究空间中的点、线和面．

本章首先介绍向量代数的有关知识，再给出空间图形的方程和研究方程图形的方法．

7.1　向量及其运算

7.1.1　向量概念

既有大小又有方向的量，称之为向量．向量可以用有向线段表示，线段的长度表示向量的大小，线段的指向为向量的方向．若 A,B 为有向线段的起点和终点，则要表示的向量为 $\overrightarrow{AB}$．有向线段的长度称之为向量的模，记为 $|\overrightarrow{AB}|$．模为 1 的向量称为单位向量．模为 0 的向量称为零向量，其方向任意记为 $\mathbf{0}$．与向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反，模相等的向量为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记为 $-\boldsymbol{a}$．我们把与起点无关的向量称为自由向量，所以凡是模相等、方向相同的两个向量为相等的向量．

两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，如果它们的方向相同或相反，则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记为 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$．由于零向量的方向为任意的，所以 $\mathbf{0}$ 可以看成与任意向量平行．

7.1.2　向量的线性运算

1．向量的加减法

我们规定向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的加法如下，以任意点 A 为起点，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再以 B 为起点，作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AC}$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$．

算律：(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$．

我们称 $\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$ 为 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差，记为 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$．

2．向量与数的乘法

我们规定向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积为一个向量 $\lambda\boldsymbol{a}$．它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，它的

方向当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 同向,当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 反向,当 $\lambda=0$ 时,$|\lambda\boldsymbol{a}|=0$,故方向任意.

算律:(1) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a},\quad \lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量记为 $\boldsymbol{a}_0$,显然 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cdot\boldsymbol{a}_0$, $\boldsymbol{a}_0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

7.1.3 向量在轴上的投影

1. 轴

我们规定两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的正向所夹的最小角为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角,记为 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$. 显然,$0\leqslant\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\leqslant\pi$. 所谓轴为指定了正向的直线.

2. 向量在轴上的投影

过点 P 作垂直于轴 u 的平面 π, π 与轴 u 的交点 P' 称为点 P 在轴 u 上的投影. 若向量 $\overrightarrow{AB}$ 的始点 A 与终点 B 在轴 u 上的投影分别为 A', B',则有向线段 $\overrightarrow{A'B'}$ 的数量称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影,记为 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}$. 若 φ 为 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 的夹角,则

$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=\begin{cases}|\overrightarrow{A'B'}|, & 0\leqslant\varphi<\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \varphi=\dfrac{\pi}{2},\\ -|\overrightarrow{A'B'}|, & \dfrac{\pi}{2}<\varphi\leqslant\pi.\end{cases}$$

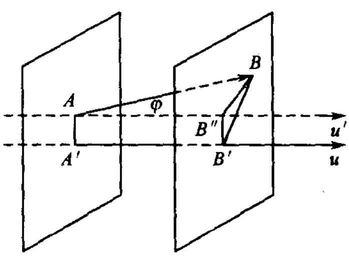

图 7.1

3. 投影定理

(1) $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cos\varphi$,其中 φ 为 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 的夹角.

证明　如图 7.1 所示,

$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=\mathrm{Prj}_{u'}\overrightarrow{AB}=AB''=|AB|\cos\varphi;$$

(2) $\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}$;

(3) $\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$.

7.1.4 向量的数量积、向量积、混合积

1. 向量的数量积

定义 7.1.1 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积为一个数量,记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.

显然,(1) 当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$, 所以 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$. $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}$.

(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

(3) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}}=|\boldsymbol{b}|\cdot\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{a}}$.

(4) $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{a}}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}_0$.

算律:(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

(2) $(k\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=k(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$;

(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

我们只就算律中的(2)加以证明,余者请读者自己完成.

$$(k\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cdot\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}^{(k\boldsymbol{a})}=k|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{a}}=k(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}).$$

命题 7.1.1 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

证明 $\Rightarrow$. 因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\dfrac{\pi}{2}=0$.

$\Leftarrow$. 因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, 所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$.

(1) 当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中至少有一个为零向量时, $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$;

(2) 当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均为非零向量时, 则 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$, 而 $0\leqslant\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\leqslant\pi$, 所以 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\pi}{2}$, 即 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

例 7.1.1 用向量的数量积,证明恒等式

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=2|\boldsymbol{a}^2|+2|\boldsymbol{b}^2|.$$

证明

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2&=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\\&=2|\boldsymbol{a}^2|+2|\boldsymbol{b}^2|.\end{aligned}$$

例 7.1.2 设 $(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})$, $(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$, 求 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.

解 因为 $(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})$, $(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$, 所以

$$(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=0,\qquad(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0.$$

故

$$\begin{cases}7|\boldsymbol{a}|^2-15|\boldsymbol{b}|^2+16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0,\\7|\boldsymbol{a}|^2+8|\boldsymbol{b}|^2-30\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0.\end{cases}$$

解得

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}},\quad|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}};$$

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=\frac{1}{2},\quad\theta=\frac{\pi}{3}.$$

2. 向量的向量积

$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足右手系:若把 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的起点放在一起,右手的四指(不含拇指)由

$\boldsymbol{a}$ 按 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 夹角转到 $\boldsymbol{b}$，那么伸开的拇指的指向就是 $\boldsymbol{c}$ 的方向，则称 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 构成右手系.

定义 7.1.2　若 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 是两个向量，向量 $\boldsymbol{c}$ 满足：

(1) $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$；

(2) $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$ 且 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$；

(3) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 组成右手系，则称 $\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积，记为 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

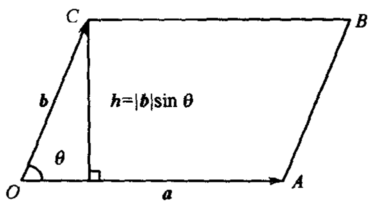

图 7.2

$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 的几何意义如图 7.2 所示. 因为 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，所以 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 的几何意义是以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形 $OABC$ 的面积.

算律：(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$；

(2) $(k\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} = k(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\times(k\boldsymbol{b})$；

(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$；

$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$.

命题 7.1.2　$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$（读者自证）.

例 7.1.3　试证，若 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$ 平行，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

证明　因为 $(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\times(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}) = 0$，所以 $-5\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} - 21\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = 0$，即

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}.$$

因此 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

3. 向量的混合积

定义 7.1.3　$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 的混合积，记为 $[\boldsymbol{abc}]$.

几何意义：$[\boldsymbol{abc}]$ 的绝对值表示以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积. 如果 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 组成右手系，那么混合积符号为正；如果 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 组成左手系，那么混合积的符号是负的.

事实上，如图 7.3 所示，设 $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}, \overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}, \overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}$，则 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 表示以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向垂直于这平行四边形所在的平面. 当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 组成右手系时，向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{c}$ 朝着这平面的同侧；当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 组成左手系时，向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{c}$ 朝着这平面的异侧. 所以，如果 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为 α，那么当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 组成右手系时，α 为锐角；当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 组成左手系时，α 为钝角. 由于 $[\boldsymbol{abc}] = |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\alpha$，所以当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 组成右手系时，显然以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积

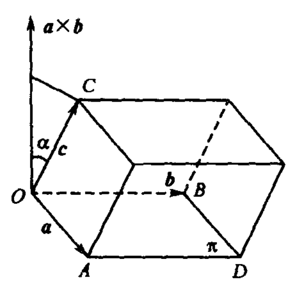

图 7.3

$V=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\alpha$.

算律：$[\boldsymbol{abc}]=[\boldsymbol{bca}]=[\boldsymbol{cab}]=-[\boldsymbol{bac}]=-[\boldsymbol{cba}]=-[\boldsymbol{acb}]$.

命题 7.1.3 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面$\Leftrightarrow[\boldsymbol{abc}]=0$.

证明 $\Leftarrow$.当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 平行，即 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 时，或 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 时，显然 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面.当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不平行且 $\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$ 时，由 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$ 知 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{c}$，而 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面.

$\Rightarrow$.因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面，所以 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{c}$，故 $[\boldsymbol{abc}]=0$.

习 题 7.1

A 组

1. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分，试用向量证明它是平行四边形.

2. 把$\triangle ABC$ 的 BC 边五等分，设分点依次为 D_1,D_2,D_3,D_4，再把各分点与点 A 连接，试以 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$ 表示向量 $\overrightarrow{D_1A}$，$\overrightarrow{D_2A}$，$\overrightarrow{D_3A}$ 和 $\overrightarrow{D_4A}$.

B 组

1. 设$\triangle ABC$ 的三边 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$.三边中点依次为 D,E,F，试用向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示 $\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BE}$，$\overrightarrow{CF}$，并证明 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\boldsymbol{0}$.

2. 设以向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为边作平行四边形，求平行四边形中垂直于 $\boldsymbol{a}$ 边的高线向量.

3. 试证 $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$ 垂直于 $\boldsymbol{c}$.

4. 已知 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，试证 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

5. 试证 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 的必要条件是 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面.

7.2 向量的坐标

7.2.1 空间直角坐标系

过空间一个定点 O 作三条互相垂直的坐标轴，它们都以 O 为原点且一般具有相同的长度单位.这三条轴分别叫 x 轴(横轴)，y 轴(纵轴)，z 轴 (竖轴)，统称**坐标轴**. Ox，Oy，Oz 的正方向符合右手系，这样的三条坐标轴就构成了**空间直角坐标系**(见图 7.4)，记为 $Oxyz$，点 O 叫做**坐标原点**.

三个坐标轴中任意两条构成了一个平面，它们决定出的三个平面称为**坐标面**，即 xOy 面，yOz 面和 xOz 面.三个坐标面把空间分成 8 个部分，每一个部分称为一个**卦限**，在 xOy 面上方含有 x 轴，y 轴，z 轴正半轴的那个卦限为第一卦限，其余从上往下看按逆时针方向分别为第二、三、四卦限，在 xOy 面下方，相对于第一、二、三、四卦限的下方部分，分别为第五、六、七、八卦限.

设 M 是空间中任一点(见图 7.5)，P,Q,R 分别是点 M 在 x,y,z 轴上的投

影. 记 P, Q, R 在 x, y, z 轴上的坐标分别为 $(x,0,0)$, $(0,y,0)$, $(0,0,z)$,则点 M 唯一地确定了一个三元有序实数组 (x, y, z);反之,任给一个三元有序数组 (x, y, z),在空间中也唯一决定出一个点,称这组数 x, y, z 为定点 M 的坐标,记为 $M(x, y, z)$.

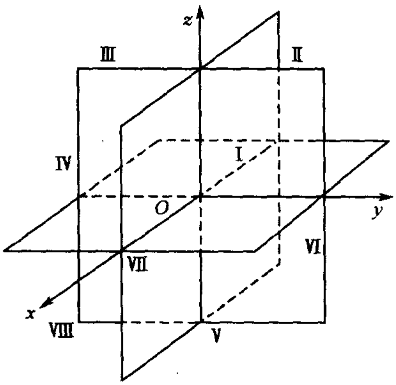

图 7.4

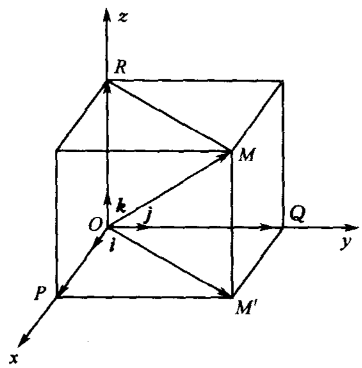

图 7.5

7.2.2 向量坐标

空间直角坐标系 $Oxyz$ 的三条轴 Ox, Oy, Oz 的正方向依次取三个单位向量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 称其为基本单位向量.

取点 $M(x, y, z)$ 使 $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{a}$,则

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} = (\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a})\boldsymbol{i} + (\mathrm{Prj}_y\boldsymbol{a})\boldsymbol{j} + (\mathrm{Prj}_z\boldsymbol{a})\boldsymbol{k} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

定义 7.2.1　向量 $\boldsymbol{a}$ 在三个坐标轴上的投影 a_x, a_y, a_z 称为向量的坐标,记为 $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$.

显然 $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$.

若向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点为 $A(x_1, y_1, z_1)$,终点为 $B(x_2, y_2, z_2)$,则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k} - (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}) \\ &= (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

故 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标为 $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

7.2.3 向量运算的坐标表示

设 $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} = (a_x, a_y, a_z)$, $\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k} = (b_x, b_y, b_z)$, $\boldsymbol{c} = c_x\boldsymbol{i} + c_y\boldsymbol{j} + c_z\boldsymbol{k} = (c_x, c_y, c_z)$,则

(1) $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x, a_y\pm b_y, a_z\pm b_z)$;

(2) $\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$;

(3) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$;

(4) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$;

(5) $[\boldsymbol{abc}]=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$.

我们只证(3),(4),余者读者自己证明.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\ &=a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+a_yb_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}\\ &\quad+a_yb_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+a_zb_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\\ &=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\ &=a_xb_x\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}+a_yb_x\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}\\ &\quad+a_yb_z\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}+a_zb_x\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}\\ &=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}\\ &=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

显然,$\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$, $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$.

7.2.4 向量的模、方向余弦

若向量 $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)$, 则 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$. 若向量$\overrightarrow{AB}$的起点为$A(x_1, y_1, z_1)$,终点为 $B(x_2, y_2, z_2)$,则

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},$$

此即为空间两点 A, B 间距离公式.

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 Ox 轴, Oy 轴, Oz 轴夹角分别为 α, β, γ, 则

$$\cos\alpha=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{i}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

同理

$$\cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \qquad \cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

显然

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

$$\boldsymbol{a}_0 = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{1}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}(a_x, a_y, a_z) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

习 题 7.2

A 组

1. 一向量的终点在点 $B(2, -1, 7)$，它在 x 轴，y 轴和 z 轴上的投影依次为 4，-4 和 7，求这向量的起点 A 的坐标.

2. 求平行于向量 $\boldsymbol{a} = (6, 7, -6)$ 的单位向量.

3. 设 $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$，求

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$； (2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$； (3) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 夹角的余弦； (4) $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$.

B 组

1. 已知 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$，且向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 长度相等，两两夹角也相等，试求 $\boldsymbol{c}$.

2. 已知向量 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$，求一单位向量 $\boldsymbol{d}$，使 $\boldsymbol{d} \perp \boldsymbol{c}$ 且 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}$ 共面.

3. 已知 $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$，$\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$，$\boldsymbol{c} = (c_x, c_y, c_z)$，试利用行列式的性质证明 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$.

7.3 空间平面及直线

本节将以向量为工具，在空间直角坐标系中建立平面和直线的方程，并进一步研究它们的相互关系. 给出点到平面及点到直线的距离，最后给出平面束方程.

7.3.1 空间中平面的方程

设平面 π 经过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，且垂直于非零向量 $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$，称垂直于平面 π 的任意非零向量为平面 π 的**法线向量**.

1. 平面方程

(1) **向量式方程**. 设点 $M(x, y, z)$ 是平面 π 上任一点. **向量式方程**为

$$\overrightarrow{M_0M}\cdot\boldsymbol{n} = 0. \tag{7.3.1}$$

(2) **点法式方程**. 在(7.3.1)式中，$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$，$\boldsymbol{n} = \{A, B, C\}$. **点法式方程**为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{7.3.2}$$

(3) **一般方程**. 由(7.3.2)式得 $Ax+By+Cz-(Ax_0+By_0+Cz_0)=0$. 设 $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$, 一般方程为

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{7.3.3}$$

由(7.3.3)式知, 任意平面都可写成三元一次方程的形式; 反之任意三元一次方程都确定法向量为 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$ 的平面.

下面对一般方程进行简单的讨论.

①当 $D=0$ 时, $Ax+By+Cz=0$, 平面 π 过原点.

②当 $A=0$ 时, $By+Cz+D=0$. 因为平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 为 $\{0,B,C\}$, 而 Ox 轴上单位向量为 $\boldsymbol{i}=\{1,0,0\}$, 所以 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{i}=0$, 即 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{i}$. 故此时平面 π 平行于 Ox 轴. 又当 $D=0$ 时, 平面 $By+Cz=0$ 过 Ox 轴.

③当 $A=B=0$ 时, 平面 π 方程为 $Cz+D=0$. 此时, 平面 π 的法线向量 $\boldsymbol{n}$ 为 $(0,0,C)$. 所以 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{k}=\{0,0,1\}$ 平行, 于是平面 π 平行于 xOy 面. 又若 $D=0$, 则 $Cz=0$, 进而 $z=0$ (A,B,C 不同时为 0, 故 $C\neq0$). $z=0$ 为 xOy 面方程.

(4) **三点式方程**. 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$ 是空间中不在同一条直线上的三点. 过三点 M_1,M_2,M_3 的平面为 π. 由于 M_1,M_2,M_3 在平面 π 上, 所以, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ 都平行于平面 π. 而 M_1,M_2,M_3 不共线, 所以 $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ 不共线, 故 $\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}$ 为平面 π 的法线向量 $\boldsymbol{n}$.

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\},$$

$$\overrightarrow{M_1M_3}=\{x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1\},$$

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}$$

$$=\left(\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}\right),$$

且点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 在平面 π 上, 所以平面 π 方程为

$$\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}(x-x_1)-\begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}(y-y_1)+$$

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}(z-z_1)=0.$$

则三点式方程为 $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$

(5) **截距式方程**. 设平面 π 与 x, y, z 轴分别交于 $P(a,0,0)$, $Q(0,b,0)$, $R(0,0,c)$(a,b,c 全不为 0),则过 P,Q,R 的平面 π 的方程为

$$\begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ 0-a & b-0 & 0-0 \\ 0-a & 0-0 & c-0 \end{vmatrix} = 0,$$

即 $bcx+acy+abz=abc$,则截距式方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

2. 平面与平面的位置关系

设平面 $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, 平面 $\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

(1) 两个平面 π_1, π_2 法线向量所夹的角 $\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 为两个平面的夹角.

(2) 平面 π_1 与 π_2 平行 $\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$ (平行不重合);平面 π_1 与 π_2 垂直 $\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

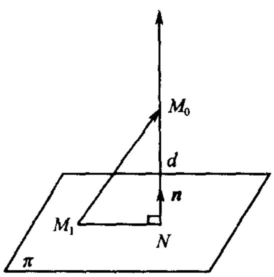

图 7.6

3. 点到平面的距离

设平面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$(见图 7.6), $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为平面 π 外一点, $M_1(x,y,z)$ 为 π 上任意一点,则 M_0 到 π 的距离 d 为

$$d=\left|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{M_0M_1}\right|=\left|\overrightarrow{M_0M_1}\cdot\boldsymbol{n}_0\right|.$$

而 $\overrightarrow{M_0M_1}=(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)$, $\boldsymbol{n}_0=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(A,B,C)$. 所以

$$d=\left|\overrightarrow{M_0M_1}\cdot\boldsymbol{n}_0\right|=\left|\frac{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|$$
$$=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\left|Ax+By+Cz-(Ax_0+By_0+Cz_0)\right|$$
$$=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|.$$

例 7.3.1　求通过 x 轴和点 $M(4,-3,-1)$ 的平面 π 方程.

解　(方法一)在 x 轴上取两点 $O(0,0,0)$, $P(1,0,0)$. 由三点式的平面方程知

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

即 $y-3z=0$.

(方法二)由于 OM 与 x 轴都平行平面 π,所以平面 π 的法线向量为

$$n=\overrightarrow{OM}\times i=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-j+3k.$$

π 的点法式方程为 $-(y-0)+3(z-0)=0$, 即 $y-3z=0$.

(方法三)因为 π 经过 x 轴,所以可设 π 的一般方程为 $By+Cz=0$. 又过点 M,故 $-3B-C=0$,即 $C=-3B$. 平面 π 方程为 $y-3z=0$.

7.3.2 空间中直线方程

如果非零向量 S 平行于一条已知直线 L,则称 S 为 L 的方向向量.

1. 直线方程

(1) **标准方程**. 设点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$在 L 上, L 的方向向量 $S=(m,n,p)$. 在直线 L 上任取一点 $M(x,y,z)$, $\overrightarrow{M_0M}\,/\!/\,S$. 直线的标准方程为

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \tag{7.3.4}$$

注意 当(7.3.4)式分母为 0 时,分子必然为 0.

(2) **参数方程**. (7.3.4)式中令比值为 t. 参数方程为

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt. \end{cases} \tag{7.3.5}$$

(3) **一般方程**. 设平面 $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, 平面 $\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 相交于直线 L. 直线 L 的一般方程为

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

通过空间一直线 L 的平面有无限多个,只要在这无限多个平面中任选两个(不重合)平面,把它们的方程联立起来,所得的方程就表示空间直线 L.

例 7.3.2 用标准方程及参数方程表示直线 $L:\begin{cases} x+y+z+1=0, \\ 2x-y+3z+4=0. \end{cases}$

解 在 L 上找出一点 $M_0(1,0,-2)$,再找出 L 的方向向量 s. s 显然为 L 定义式中两个平面的法线向量的向量积 $n_1\times n_2$. 故 $s=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=4i-j-3k$.