二十一世纪高等院校标准教材配套辅导

高等数学（下）
——教材习题详解及自测提高题

配同济五版

主　编　黄晓英　刘文芬
主　审　清华大学数学系教授谭泽光

北京工业大学出版社

院校标准教材配套辅

高等数学（下）

——教材习题详解及自测提高题

（配同济五版）

主　编　黄晓英　刘文芬
副主编　滕吉红　彭昌勇
主　审　清华大学数学系教授谭泽光

北京工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下:教材习题详解及自测提高题/黄晓英,刘文芬主编.—北京:北京工业大学出版社,2003.10 修订
ISBN 7-5639-1175-8

Ⅰ.高... Ⅱ.黄... Ⅲ.高等数学—高等学校—解题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第073934号

高等数学(下)
——教材习题详解及自测提高题
(配同济五版)
主编 黄晓英 刘文芬
*
北京工业大学出版社出版发行
邮编:100022 电话:(010)67392308
各地新华书店经销
徐水宏远印刷厂印刷
*
2003年10月第1版 2003年10月第1次印刷
787 mm×960 mm 16开本 26.25印张 580千字
印数:0001~5000
ISBN 7-5639-1175-8/G·661
定价:32.00元

序

高等数学是大学理工类专业的重要基础课，其知识和方法是研究连续模型的基本数学工具，是学习许多专业基础课和专业课的先选课程，在硕士研究生入学考试的数学科目中占到超过六成的分量．因此，掌握好这门课程，对理工科大学生来说，无疑是十分重要的．

要学好高等数学必须有一本好的教材和一本好的配套辅导书．好的教材是指它应具有科学性、可读性和启发性；而好的辅导书则应能起到引导、扩展和深入提高的作用．

同济大学编写的《高等数学》许多年来一直被不少大学选用为教科书．该教材经过多次修改与再版，在内容撰写与习题编选上日臻完善，特别是最近的第五版，在原有基础上又有较大的改进，应该说，这是目前国内一本较好的《高等数学》教材．

在这里向读者推荐一本与同济第五版《高等数学》配套的辅导书：《高等数学——教材习题详解及自测提高题》．这本书由黄晓英教授等编写，这是他们积讲授同济大学编写的《高等数学》教材十多年的经验和体会而写成的．该辅导书对同济五版教材中所有习题，依原有次序逐题作了比较详细的解答，为读者作出了解题的示范和适当的引导，如果读者能以正确的方法来利用这些材料，将会收到良好的效果．该辅导书还在相应章节配编了一批自测题，作为读者自我检测和深入提高之用，这些自测题按内容安排，题型比较多，由浅入深，不少题有较大难度，如果读者能认真习作，确能起到扩展、深入、提高的作用，是一本值得一读的参考书．

这里，我想对读者就使用数学习题辅导参考书的方法提出一点建议：一定不要把这种书当教材一样来“读题解”，而应该把它当作“验收清单”一样来检查学习的效果．也就是说，绝不能自己不动手，一道一道题去读解法．“数学不是读会的，是做会的”，这是许多数学成绩优秀者的共同经验．“读题解”的方法，不但使读者似懂非懂，似会不

会，而且使人眼高手低，变得懒惰，后患无穷．正确使用这种辅导书的方法应该是：首先认真阅读教材，尽量正确理解其概念及方法，在此基础上尽量独立地完成教材中的相应习题，把辅导书上的结果作为检查自做习题正确性的“尺子”；如果做法或结果与辅导书上的不一致，则应比较其优劣，判断谁是谁非，分析原因；有些题目实在做不出来，看辅导书时，也不应一下子将相应题的解答从头看到尾，可以先看一部分，希望由此受些启发，尽量争取自己做的部分多一些，实在做不出来，读完辅导书的完整解答后，也应总结一下自己不会做的原因．如果坚持这种使用辅导书的方法，很好地掌握高等数学是不难做到的．

清华大学数学系教授
谭泽光
2003 年 9 月

前　言

高等数学是工科院校的一门重要的基础课，它不仅是学生学习后续课程的基础，也是学生继续学习深造——考研的最重要的考试科目.我们根据多年的教学和辅导考研的经验，参考了大量的高等数学教辅材料，从学生的实际需要出发编写了本书.其内容包括两部分，一是给出了同济大学《高等数学》第五版教材中的所有习题的解答；二是精选了现行高等数学辅导教材中对概念理解和解题方法要求较高的题目并给出了详细解答.之所以如此安排本书内容，主要基于如下一些考虑：

(1) 同济大学版的《高等数学》是目前众多工科类高校选用的此课程的教材，该题解应拥有较为庞大的读者群体.

(2) 高等数学课程进度快，信息量大，课后练习多，学生很难将课后大量的练习按时完成，教师也不可能将所有作业全部批改.显然学生拥有一套与教材相互配套的参考书将会对课程的学习带来诸多方便.

(3) 学习的目的在于应用.要想得心应手地运用微积分的基本原理和公式就必须进行严格而充分的训练，多做练习才能达到理解和熟练.因而如能认真地做完本书中的习题，必能对牢固掌握所学知识大有裨益.

(4) 由于许多院校高等数学的课程考试试题均出自现有的试题库，而教材中的习题与试题库中的习题在题型上往往差距较大，而本书中的自测提高题由于题型多样、覆盖面广泛，恰恰能弥补这一缺陷.

(5) 当前大学生“考研热”方兴未艾，竞争日趋激烈，要想顺利通过研究生入学考试，就必须在一年级学习时打好基础，复习备考时多见识题型.本书的第二部分提高题中收入了许多历年入学试题的精华，同时注意了量与质的兼顾.

参加本书编写工作的均为长期工作在高等数学教学和考研辅导一线的教师，长期的教学实践使他们具有丰富的经验和对研究生入学考试发展过程的了解.全书分上、下两册，不仅可作为高校师生的教学参

考书，也可作为大学生考研的有效的辅导教材．我们衷心希望本书能为大家在高等数学的学习和考研复习时发挥重要的作用．

最后需要说明的是，本书习题题型丰富，不少题目的难度较大，如能认真习做，既可以巩固学到的知识又可以有效地提高运算能力，特别是有些难题还可以迫使我们学会综合运用所学知识分析问题和解决问题．正因为如此，我们期望读者，特别是初学者一定要刻苦钻研、多用脑子，千万不要轻易查抄书中答案，因为任何削弱独立思考的做法都是违背我们出版此书的初衷的．本书对所收入的习题均给出了解答，但数学题目的解法往往并非是惟一的，因此书中解答仅作参考，如有更好的解答或发现某些差错恳请告知，我们将不胜感谢！

编　者

2003 年 9 月

目　录

第八章　多元函数微分法及其应用

第九章　重积分

第十章　曲线积分与曲面积分

第十一章　无穷级数

一、教材习题详解

二、自测提高题与解答

第十二章　微分方程

一、教材习题详解

二、自测提高题与解答

第八章　多元函数微分法及其应用

一、教材习题详解

习题8－1

1. 判定下列平面点集中哪些是开集、闭集、区域、有界集、无界集？并分别指出它们的聚点所成的点集（称为导集）和边界．

(1) $\{(x,y)|x\neq 0,y\neq 0\}$；

(2) $\{(x,y)|1<x^2+y^2\leqslant 4\}$；

(3) $\{(x,y)|>x^2\}$；

(4) $\{(x,y)|x^2+(y-1)^2\geqslant 1\}\cap\{(x,y)|x^2+(y-2)^2\leqslant 4\}$

解答　(1) $\{(x,y)|x\neq 0,y\neq 0\}$；为开集、无界集．

聚点集为：$\{(x,y)|x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$；

边界为：$\{(x,y)|x=0$ 或 $y=0\}$.

(2) $\{(x,y)|1<x^2+y^2\leqslant 4\}$. 为有界集．

聚点集为：$\{(x,y)|1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$；

边界为：$\{(x,y)|x^2+y^2=1$ 或 $x^2+y^2=4\}$.

(3) $\{(x,y)|y>x^2\}$ 为开集、区域、无界集．

聚点集为：$\{(x,y)|y\geqslant x^2\}$；

边界为：$\{(x,y)|y=x^2\}$.

(4) $\{(x,y)|x^2+(y-1)^2\geqslant 1\}\cap\{(x,y)|x^2+(y-2)^2\leqslant 4\}$ 为闭集、有界集．

聚点集为集合本身；

边界为：$\{(x,y)|x^2+(y-1)^2=1\}\cup\{(x,y)|x^2+(y-2)^2=4\}$.

2. 已知函数 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan\dfrac{x}{y}$，试求 $f(tx,ty)$.

解

$$f(tx,ty)=(tx)^2+(ty)^2-txty\tan\frac{tx}{ty}$$

$$=t^2\left(x^2+y^2-xy\tan\frac{x}{y}\right)=t^2f(x,y)$$

3. 试证函数 $F(x,y)=\ln x\cdot\ln y$ 满足关系式：

$$F(xy,uv)=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v)$$

证明

$$F(xy,uv)=\ln(xy)\cdot\ln(uv)$$

$$=(\ln x+\ln y)(\ln u+\ln v)$$

$$= \ln x \cdot \ln u + \ln x \cdot \ln v + \ln y \cdot \ln u + \ln y \cdot \ln v$$
$$= F(x,u) + F(x,v) + F(y,u) + F(y,v)$$

4. 已知函数 $f(u,v,w) = u^w + w^{u+v}$，试求 $f(x+y,x-y,xy)$.

解 $$f(x+y,x-y,xy) = (x+y)^{xy} + (xy)^{(x+y)+(x-y)}$$
$$= (x+y)^{xy} + (xy)^{2x}$$

5. 求下列各函数的定义域：

(1)$z = \ln(y^2 - 2x + 1)$；

(2)$z = \dfrac{1}{\sqrt{x+y}} + \dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$；

(3)$z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$；

(4)$z = \ln(y-x) + \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$；

(5)$u = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}} \quad (R > r > 0)$；

(6)$u = \arccos \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 (1) 由 $y^2 - 2x + 1 > 0$ 得函数的定义域为
$$D = \{(x,y) \mid y^2 - 2x + 1 > 0\}$$

(2) 由 $x + y > 0, x - y > 0$ 得函数的定义域为
$$D = \{(x,y) \mid x + y > 0, x - y > 0\}$$

(3) 由 $y \geqslant 0, x - \sqrt{y} \geqslant 0$ 得 $x \geqslant \sqrt{y}$，即 $x \geqslant 0$ 且 $x^2 \geqslant y$，故函数定义域为
$$D = \{(x,y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2 \geqslant y\}$$

(4) 由 $y - x > 0, x \geqslant 0, 1 - x^2 - y^2 > 0$ 知函数的定义域为
$$D = \{(x,y) \mid y - x > 0, x \geqslant 0, x^2 + y^2 < 1\}$$

(5) 由 $R^2 - x^2 - y^2 - z^2 \geqslant 0$，即 $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ 和 $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 > 0$，即 $x^2 + y^2 + z^2 > r^2$，知函数的定义域为
$$D = \{(x,y,z) \mid r^2 < x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2\}$$

(6)$x^2 + y^2 \neq 0$，即 x, y 不同时为零，且
$$\left|\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqslant 1$$
即 $z^2 \leqslant x^2 + y^2$，故函数定义域为
$$D = \{(x,y,z) \mid z^2 \leqslant x^2 + y^2,\quad x^2 + y^2 \neq 0\}$$

6. 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$；

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$；

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$；

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\sin(xy)}{x}$；　　(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$.

解　(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}=\dfrac{1-0}{0+1}=1.$

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1+0}}=\ln 2.$

(3) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$$
$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(2-\sqrt{xy+4})(2+\sqrt{xy+4})}{xy(2+\sqrt{xy+4})}$$
$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-1}{2+\sqrt{xy+4}}=-\frac{1}{4}.$$

(4) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$$
$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{(\sqrt{xy+1}+1)(\sqrt{xy+1}-1)}$$
$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{xy}$$
$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}(\sqrt{xy+1}+1)=2.$$

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin xy}{x}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin xy}{xy}\cdot y=1\cdot 0=0.$

(6) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$$
$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2\sin^2\dfrac{x^2+y^2}{2}}{\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)^2}\cdot\frac{x^2+y^2}{4e^{x^2y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{4e^{x^2y^2}}=0.$$

7. 证明下列极限不存在：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+y}{x-y}$；　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

证明　(1) 若动点 $P(x,y)$ 沿直线 $y=2x$ 趋向于 $(0,0)$，则

$$\lim_{\substack{x\to0\\ y=2x\to0}}\frac{x+y}{x-y}=\lim_{x\to0}\frac{x+2x}{x-2x}=\lim_{x\to0}\frac{3x}{-x}=-3$$

若动点 $P(x,y)$ 沿直线 $x=2y$ 趋向于 $(0,0)$，则

$$\lim_{\substack{y\to0\\ x=2y\to0}}\frac{x+y}{x-y}=\lim_{y\to0}\frac{3y}{y}=3$$

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+y}{x-y}$ 不存在.

(2) 若动点 $P(x,y)$ 沿直线 $y=x$ 趋向于 $(0,0)$，则

$$\lim_{\substack{x\to0\\ y=x\to0}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^4}{x^4}=1$$

若动点 $P(x,y)$ 沿直线 $y=2x$ 趋向 $(0,0)$，则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=2x\to 0}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{4x^4}{4x^4+x^2} = 0$$

所以极限不存在.

8. 函数 $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$ 在何处是间断的？

解　为使函数表达式有意义，需 $y^2-2x\neq 0$，所以，函数的定义域 $D=\{(x,y)\mid y^2-2x\neq 0\}$ 且在定义域内连续，故在 $y^2-2x=0$ 处，函数 $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$ 间断.

9. 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

证明　因为 $x^2+y^2\geqslant 2|xy|$，即

$$|xy|\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}$$

所以

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant\frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$$

对于任意给定的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=2\varepsilon$ 时，就有

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|\leqslant\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}<\frac{\delta}{2}=\varepsilon$$

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

10. 设 $F(x,y)=f(x)$，$f(x)$ 在 x_0 处连续，证明：对任意 $y_0\in\mathbf{R}$，$F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

证明　因为 $f(x)$ 在 x_0 处连续，所以对 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

对上述 $\varepsilon>0$，当 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，$|x-x_0|<\delta$，所以

$$|F(x,y)-F(x_0,y_0)|=|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

故 $F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

习题 8－2

1. 求下列函数的偏导数：

(1) $z=x^3y-y^3x$；　　(2) $s=\dfrac{u^2+v^2}{uv}$；

(3) $z=\sqrt{\ln(xy)}$；　　(4) $z=\sin(xy)+\cos^2(xy)$；

(5) $z=\ln\tan\dfrac{x}{y}$；　　(6) $z=(1+xy)^y$；

(7) $u=x^{\frac{y}{z}}$；　　(8) $u=\arctan(x-y)^z$.

解　(1)　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2y-y^3$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^3-3xy^2$

(2)　$$\frac{\partial s}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u}{v}+\frac{v}{u}\right)=\frac{1}{v}-\frac{v}{u^2}$$

$$\frac{\partial s}{\partial v}=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u}{v}+\frac{v}{u}\right)=\frac{1}{u}-\frac{u}{v^2}$$

(3)
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{\ln(xy)}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\ln(xy)}}\cdot\frac{y}{xy}$$
$$=\frac{1}{2x\sqrt{\ln(xy)}}$$

由对称性，有

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2y\sqrt{\ln(xy)}}$$

(4)
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos(xy)y+2\cos(xy)[-\sin(xy)]y$$
$$=y[\cos(xy)-\sin(2xy)]$$

由对称性，有

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x[\cos(xy)-\sin(2xy)]$$

(5)
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\tan\frac{x}{y}}\cdot\sec^2\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y}=\frac{2}{y}\csc\frac{2x}{y}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\tan\frac{x}{y}}\cdot\sec^2\frac{x}{y}\cdot\frac{-x}{y^2}=-\frac{2x}{y^2}\csc\frac{2x}{y}$$

(6)
$$\frac{\partial z}{\partial x}=y(1+xy)^{y-1}\cdot y=y^2(1+xy)^{y-1}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}e^{y\ln(1+xy)}$$
$$=e^{y\ln(1+xy)}\left[\ln(1+xy)+y\cdot\frac{x}{1+xy}\right]$$
$$=(1+xy)^y\left[\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}\right]$$

(7)
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}x^{(\frac{y}{z}-1)}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^{\frac{y}{z}}\cdot\ln x\cdot\frac{1}{z}=\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}=x^{\frac{y}{z}}\cdot\ln x\cdot\left(-\frac{y}{z^2}\right)=-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x$$

(8)
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{(x-y)^z\ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}$$

2. 设 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$，求证 $l\frac{\partial T}{\partial l}+g\frac{\partial T}{\partial g}=0$.

解　因为

$$\frac{\partial T}{\partial l}=2\pi\cdot\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{l}{g}}}\cdot\frac{1}{g}=\frac{\pi}{\sqrt{lg}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial g}=2\pi\cdot\sqrt{l}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot g^{-\frac{3}{2}}=-\pi\cdot\frac{\sqrt{l}}{g\sqrt{g}}$$

所以
$$l\frac{\partial T}{\partial l}+g\frac{\partial T}{\partial g}=\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}-\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}=0$$

3. 设 $z=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$，求证 $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z$.

解　因为$\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}\cdot\dfrac{1}{x^2}$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}\cdot\dfrac{1}{y^2}$，所以

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}+e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}=2z$$

4. 设 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，求 $f_x(x,1)$.

解　因为

$$f_x(x,y)=1+\frac{y-1}{\sqrt{1-\dfrac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{y}$$

$$=1+\frac{y-1}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{y-x}}$$

所以
$$f_x(x,1)=1+0=1$$

5. 曲线$\begin{cases}z=\dfrac{x^2+y^2}{4}\\ y=4\end{cases}$，在点(2,4,5)处的切线对于 x 轴的倾角是多少？

解
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{4}=\frac{x}{2},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,4,5)}=1=\tan\alpha$$

故所求倾角 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$.

6. 求下列函数的$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 和$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$：

(1)$z=x^4+y^4-4x^2y^2$；　　(2)$z=\arctan\dfrac{y}{x}$；　　(3)$z=y^x$.

解　(1)
$$\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3-8xy^2,\frac{\partial z}{\partial y}=4y^3-8x^2y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2-8y^2,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y^2-8x^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(4y^3-8x^2y)=-16xy$$

(2)
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

(3) $$\frac{\partial z}{\partial x}=y^x\ln y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^x\ln^2 y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=xy^{x-1},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x(x-1)y^{x-2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=xy^{x-1}\ln y+y^x\cdot\frac{1}{y}=y^{x-1}(x\ln y+1)$$

7. 设 $f(x,y,z)=xy^2+yz^2+zx^2$，求 $f_{xx}(0,0,1)$，$f_{xz}(1,0,2)$，$f_{yz}(0,-1,0)$ 及 $f_{zzx}(2,0,1)$.

解　因为

$$f_x=y^2+2xz,f_y=z^2+2xy$$

$$f_z=x^2+2yz,f_{xx}=2z,f_{xz}=2x$$

$$f_{yz}=2z,f_{zz}=2y$$

$$f_{zzx}=0$$

所以

$$f_{xx}(0,0,1)=2,f_{xz}(1,0,2)=2$$

$$f_{yz}(0,-1,0)=0,f_{zzx}(2,0,1)=0$$

8. 设 $z=x\ln(xy)$，求 $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$ 及 $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$.

解　因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=\ln(xy)+x\cdot\frac{y}{xy}=\ln(xy)+1$，所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y}{xy}=\frac{1}{x},\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{x}{xy}=\frac{1}{y},\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=-\frac{1}{y^2}$$

9. 验证：

(1) $y=e^{-kn^2t}\sin nx$ 满足 $\frac{\partial y}{\partial t}=k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$；

(2) $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 满足 $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{2}{r}$.

证明　(1)

$$\frac{\partial y}{\partial t}=e^{-kn^2t}\cdot\sin nx(-kn^2)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=ne^{-kn^2t}\cos nx,\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-n^2e^{-kn^2t}\sin nx$$

所以

$$\frac{\partial y}{\partial t}=-kn^2e^{-kn^2t}\sin nx=k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

(2) 因为

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}$$

由函数关于自变量的对称性，有

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$$

又因为 $$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{1}{r^2}\left(r-\frac{x^2}{r}\right)=\frac{r^2-x^2}{r^3}$$

再由对称性得

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\frac{r^2-y^2}{r^3};\quad \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{r^2-z^2}{r^3}$$

所以 $$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{r^2-x^2}{r^3}+\frac{r^2-y^2}{r^3}+\frac{r^2-z^2}{r^3}$$

$$=\frac{3r^2-x^2-y^2-z^2}{r^3}=\frac{2}{r}$$

习题 8－3

1. 求下列函数的全微分:

(1) $z=xy+\frac{x}{y}$; (2) $z=e^{\frac{y}{x}}$;

(3) $z=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$; (4) $u=x^{yz}$.

解 (1) 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=y+\frac{1}{y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x-\frac{x}{y^2}$, 所以

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$=\left(y+\frac{1}{y}\right)dx+\left(x-\frac{x}{y^2}\right)dy$$

(2) $$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=-\frac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}}dx+\frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}dy$$

$$=-\frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}\left(\frac{y}{x}dx-dy\right)$$

(3) 因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{-xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-y\cdot\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

所以 $$dz=\frac{-xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dx+\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dy$$

$$=-\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}(ydx-xdy)$$

(4) 因为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yz\cdot x^{yz-1};\ \frac{\partial u}{\partial y}=zx^{yz}\ln x;\ \frac{\partial u}{\partial z}=yx^{yz}\ln x$$

所以 $$du=yzx^{yz-1}dx+zx^{yz}\ln x dy+yx^{yz}\ln x dz$$

2. 求函数 $z=\ln(1+x^2+y^2)$ 当 $x=1$, $y=2$ 时的全微分.

解 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{1+x^2+y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{1+x^2+y^2}$, 所以