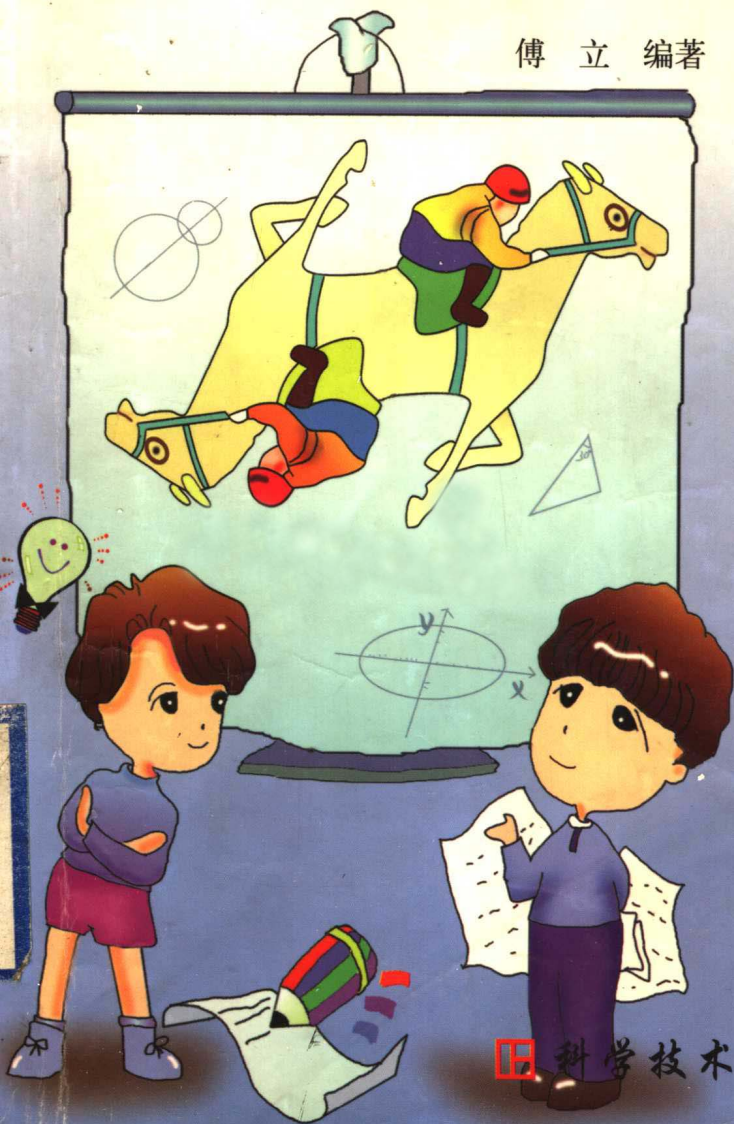


数学悖论

傅立 编著



新编

奥林匹克基础知识及素质教育丛书

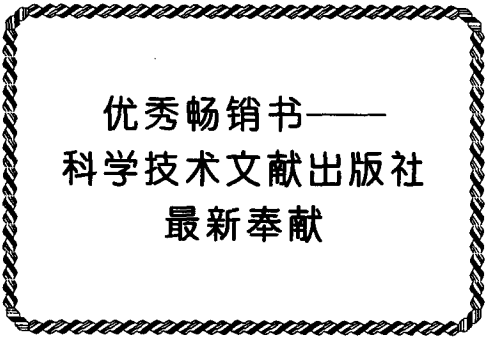


科学技术文献出版社

◇新编奥林匹克基础知识及素质教育丛书

数 学 悖 论

傅 立 编著



优秀畅销书——
科学技术文献出版社
最新奉献

科学技术文献出版社

Scientific and Technical Documents Publishing House

北 京

图书在版编目(CIP)数据

数学悖论/傅立编著.-北京:科学技术文献出版社,1999.8
(新编奥林匹克基础知识及素质教育丛书)

ISBN 7-5023-3367-3

I. 数… II. 傅… III. 数学-悖论 IV. 01-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 28303 号

出 版 者:科学技术文献出版社

图 书 发 行 部:北京市复兴路 15 号(公主坟)中国科学技术信息研究所大楼
B 段/100038

图 书 编 务 部:北京市西苑南一院 8 号楼(颐和园西苑公汽站)/100091

邮 购 部 电 话:(010)68515544-2953

图书编务部电话:(010)62878310,(010)62877791,(010)62877789

图书发行部电话:(010)68515544-2945,(010)68514035,(010)68514009

门 市 部 电 话:(010)68515544-2172

图书发行部传真:(010)68514035

图书编务部传真:(010)62878317

E-mail:stdph@istic.ac.cn;stdph@public.sti.ac.cn

策 划 编 辑:科 文

责 任 编 辑:周巧龙

责 任 校 对:科 文

责 任 出 版:周永京

封 面 设 计:宋雪梅

发 行 者:科学技术文献出版社发行 新华书店总店北京发行所经销

印 刷 者:三河市富华印刷包装有限公司

版 (印) 次:1999 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

开 本:850×1168 32 开

字 数:117 千

印 张:4.375

印 数:1—8000 册

定 价:6.50 元

© 版权所有 违法必究

购买本社图书,凡字迹不清、缺页、倒页、脱页者,本社发行部负责调换。

(京)新登字 130 号

内 容 简 介

本书通过日常生活里的生动故事,提出了各种各样的数学悖论。其中既有自相矛盾的逻辑悖论,又有和直觉相反的概率悖论;既有异彩纷呈的图形悖论,又有令人大惑不解的时间悖论;既有考验你想象力的与数有关的悖论,又有请你识别数据结论真假的统计学悖论。有趣的图画和活泼的语言,使本书具有强烈的趣味和游戏味道。

本书能极大地激发读者的数学兴趣,使读者在轻松的气氛里锻炼自己的逻辑思维能力和解题技巧。适合广大中小学生阅读。

科学技术文献出版社 向广大读者致意

科学技术文献出版社成立于 1973 年,国家科学技术部主管,主要出版科技政策、科技管理、信息科学、农业、医学、电子技术、实用技术、培训教材、教辅读物等图书。

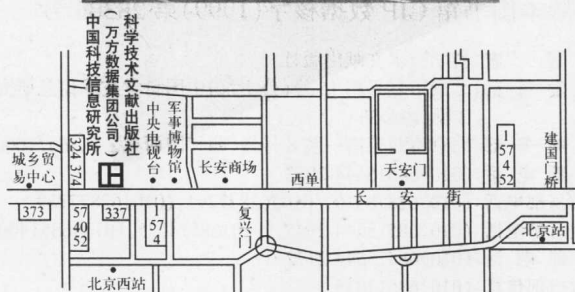
我们的所有努力,都是为了使您增长知识和才干。

悖论也叫逆论或反论,它包括一切与人的直觉和日常经验相矛盾的数学结论。这些结论会让你无比惊讶:它们有的看起来肯定错了,但实际上却是对的;有的看起来像是对的,但实际上却是错的;还有的会让你陷入对也不是、错也不是的困境。

悖论有点像魔术,看着它你会万分惊奇,恨不得立刻知道其中的秘密。在破解悖论秘密的过程中,你会不知不觉地进入深奥而有趣的数学世界之中。

当然,对于我们这些十二三岁的孩子来说,还不具备完全破解悖论秘密的数学基础,但是,就像不知道魔术的技巧,也可以尽情欣赏魔术的奇妙一样,我们仍然能够感受到数学悖论的奇妙。

现在,让我们一起去经历数学悖论奇景吧!



图书发行、经营处



图书编务处

目 录

自相矛盾的逻辑悖论

1. 荒诞的小楼.....	(2)
2. 说谎者悖论.....	(4)
3. 矛盾的说法.....	(5)
4. 柏拉图—苏格拉底悖论	(6)
5. 疯狂的计算机	(7)
6. 无穷的倒退.....	(7)
7. 无限的循环.....	(8)
8. 一句话和它的反话	(10)
9. 机智的母亲.....	(11)
10. 奇怪的法律	(12)
11. 预言家的预言	(13)
12. 理发师悖论	(14)
13. 乏味和有趣	(15)
14. 意料之外的考试	(16)
15. 意想不到的老虎	(18)

16. 外星人的试验	(19)
------------------	------

直觉引出的错误——概率悖论

1. 超生游击队的困惑	(22)
2. 带着炸弹乘飞机	(22)
3. 新弹坑和老弹坑	(23)
4. 赌徒的谬误	(23)
5. “2:2”还是“3:1”	(24)
6. 扑克牌的花色	(26)
7. 箱子的悖论	(27)
8. 三枚硬币朝向一致的概率有多大	(27)
9. 谁能赢	(28)
10. 三张卡片的骗局	(29)
11. 电梯悖论	(32)
12. 哪里出了问题	(32)
13. 三个贝壳的游戏	(34)
14. 小花招	(35)
15. 谁最走运	(36)
16. 问话的技巧	(37)
17. 钱包游戏	(39)
18. 中立原理	(40)
19. 立方体悖论	(41)

色彩斑斓的图形悖论

- 1. 不可靠的视觉 (44)
- 2. 是姑娘, 还是老太太 (46)
- 3. 凸与凹 (49)
- 4. 不真实的形体 (51)
- 5. 神秘的瀑布 (52)
- 6. 绕着什么转圈 (54)
- 7. 月亮之谜 (54)
- 8. 镜子的魔力 (56)
- 9. 奇异的地毯(一) (58)
- 10. 奇异的地毯(二) (59)
- 11. 奇异的地毯(三) (61)
- 12. 计算机诈骗案 (63)
- 13. 可内外翻转的轮胎 (63)
- 14. 奇妙的编织术 (65)
- 15. 躲不掉的点 (66)
- 16. 怪诞的雪花曲线 (67)
- 17. 各种各样的世界 (72)
- 18. 在扭曲的宇宙中 (74)

时间的悖论

- 1. 坏钟的悖论 (78)

2. 迷惑人的车轮	(79)
3. 难以实现的愿望	(80)
4. 无法跑到终点	(81)
5. 短跑冠军和海龟	(83)
6. 一半时间和整个时间相等	(83)
7. 沿着橡皮绳爬行的蠕虫	(84)
8. 电灯开关的难题	(86)
9. 玻璃球在哪里	(87)
10. 来回跑的小狗(一)	(88)
11. 来回跑的小狗(二)	(89)
12. 时间能够倒流吗	(90)
13. 时间机器	(91)
14. 比光跑得还快	(93)
15. 并存着的世界	(94)
16. 向着未来旅行	(95)

关于数的悖论

1. 席位之谜	(99)
2. 究竟赚了多少钱	(100)
3. 人口是在减少吗	(101)
4. 难以想象的快速增长	(102)
5. 神秘的 9	(103)
6. 有特异功能的老师	(105)
7. 老师的疑问	(106)

8. 小把戏	(107)
9. 酒多? 还是水多	(108)
10. 1元钱哪儿去了	(108)
11. 奇妙的方阵	(110)
12. 奇怪的遗嘱	(112)
13. 无穷大的旅馆	(113)
14. 整数多? 还是偶数多	(115)

统计学中的学问

1. 骗人的“平均数”	(117)
2. 平均人数的家庭	(118)
3. 轻率的结论	(119)
4. 小世界悖论	(120)
5. 你在什么星座	(121)
6. 随机成群效应	(121)
7. 纸牌把戏	(122)
8. 哪种派最好吃	(123)
9. 新药到底有没有效果	(125)



逻辑学悖论



自相矛盾的逻辑悖论

广义地说,一切与人的直觉和日常经验相矛盾的数学结论都可以称做悖论。如果加以细分,悖论可以分成三种。第一种悖论是结论看起来肯定错了,但实际上却是对的,这种悖论又叫做佯谬;第二种悖论是结论看起来像是对的,但实际上却是错的,是一种似是而非的悖论;还有一种就是逻辑悖论,这种悖论的主要特点是,在一个思维的过程中,一系列的推理看起来全是对的、无懈可击的,可最终得到的结论却是和出发点相矛盾的,形成了一个逻辑上自相矛盾的怪圈。

一个逻辑悖论将直接导致彼此矛盾的结果,就像证明了 $1+1$ 既等于2,又不等于2一样。而且,这种矛盾是恶性的,是逻辑悖论自身无法回避的矛盾。换句话说,逻辑悖论是不可解的,除非采用某些方法来消除这种恶性的矛盾,比如设定一些规则禁止某些情况发生。

逻辑悖论能将人们的思路一步一步地引入一种矛盾之中,

却又让人搞不清楚到底出了什么问题,在哪里出了问题。所以,逻辑悖论在使我们的主意忽左忽右的同时,激发起我们强烈的好奇心:为什么我的每一步推理都是无懈可击的,可得出的结论却是互相矛盾的,究竟什么地方错了呢? 从古希腊起到今天,几千年的时间里,对逻辑悖论的这种探究一直都给人们带来了极大的乐趣。

当然,逻辑悖论带给人们的可不仅仅是乐趣,许多大数学家都以极为严肃认真的态度对待它、研究它、想方设法解决它,正是这种努力大大地推动了现代逻辑学和数学集合论的发展。

要知道,逻辑学是一切演绎推理的基础,一个学生如果不懂基础逻辑就没有能力掌握数学基础。虽然对这些基础的理解常常是具有一定难度的,但是,下面的一组逻辑悖论告诉我们,逻辑学可不是什么枯燥无味的东西,它包含了许许多多对数学来说很重要的课题,这些课题生动有趣,理解其中奥秘的过程将是令人兴奋的。

1. 荒诞的小楼

荷兰著名艺术大师埃舍尔的画中常常表现出一些很奇妙的东西,在一幅名叫《上升与下降》的版画中,画有一座奇怪的小楼(见图1)。

楼看起来不高,但说不清有几层;楼看起来不大,但好像有许许多多的房间。楼顶不是平的,高高低低的构成了一个回廊。

最让人奇怪的是,回廊上的人排成了两队往前走,其中一队总是沿着楼梯向上走,可是却总能回到原地;另一队总是沿着同样的楼梯向下走,也总能回到原地。

像这种从一个地方出发,一步一步地上升,或一步一步地下

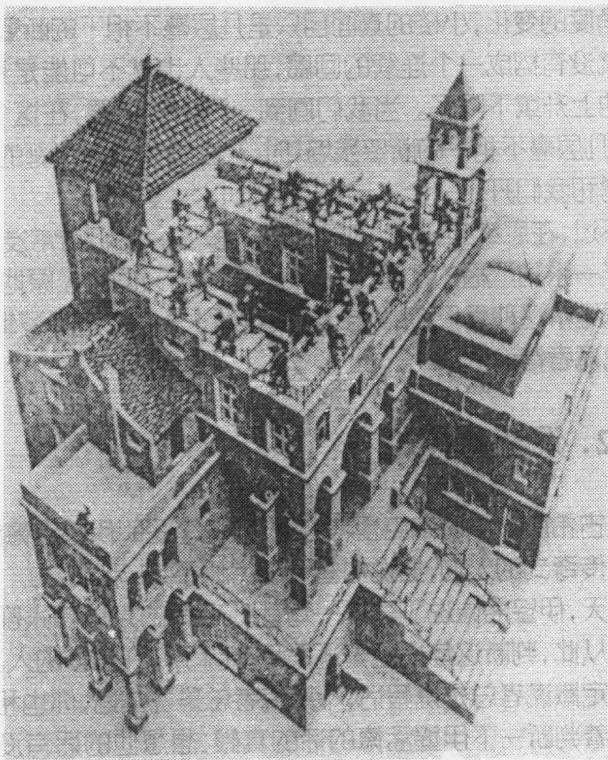


图1 上升与下降 M·C·埃舍尔(版画,1960)

降,结果却意外地又回到原来起点的现象,叫做怪圈。

像荒诞的小楼这样的怪圈,你可以在画中找到,就像埃舍尔许多的画所表现的那样。但在现实的物质世界中,却很难真正碰到真实的、实实在在的怪圈。画中的荒诞不经往往产生于眼

睛的某种错觉。在一部介绍埃舍尔艺术作品的三维动画片中，我们便看到，如果在三维的立体空间中，我们碰到了一座荒诞的小楼，那么，当我们能够绕着这座小楼看的时候，就会发现，随着观察角度的变化，小楼的真面目只是几层毫不相干的断壁残墙，根本就没有构成一个连续的回廊，那些人也就不可能是真的在持续地上升或下降了。当我们回到一开始的位置，在这个角度看那“几层毫不相干的断壁残墙”时，又会重新看到荒诞的小楼。视错觉和我们开了一个大玩笑。

不过，在思维中，类似的怪圈就太多了。人们常常发现，在经历了一系列严格的推理之后，自己的思维又回到了原地。

思维中这种怪圈的根源可以追溯到一个古老的逻辑悖论——说谎者悖论。

2. 说谎者悖论

在古希腊一个叫做克里特的地方，有个名叫伊壁孟德的人。他是个传奇式的人物，据说他曾经一觉睡了 57 年。

一天，伊壁孟德说了这样一句话：“所有的克里特人都是撒谎者。”从此，判断这句话是真还是假难倒了许许多多的人。

假定撒谎者总是说假话，不撒谎者总是说真话，你也和我们一起试着判断一下伊壁孟德的活的真假，想想他的话有没有问题吧。

因为伊壁孟德是一个克里特人，所以我们断定他所说的话不可能是真的。可如果伊壁孟德这句话是假话，那么克里特人就不是撒谎者，而是讲真话的，因为他是克里特人，他说的话必然是真话，所以这句话不可能是假话。

换个角度看看，如果假定伊壁孟德说的是真话，那么克里特

人都是撒谎者，可是伊壁孟德正是一个克里特人呀，他说的话必然是假话。

唉，伊壁孟德的这句话怎么可能既是谎话，同时又是真话呢？它可真是引出了逻辑上不可避免的矛盾。

这就是逻辑悖论中著名的说谎者悖论。

3. 矛盾的说法

说谎者悖论还有许多变形。我们来看看下面的话。

“这句话是错的。”

上面这个句子对吗？如果是对的，这句话就是错的。如果是错的，那这个句子就对了。互相矛盾！

所以，这也是个悖论。这是说谎者悖论的一种最简单形式。因为不需要考虑撒谎者总是撒谎，不撒谎者总是说真话这样的前提，所以它变得很清晰，有矛盾很容易看出来。

其实，像这样矛盾的说法多得很，试一试，你也能想出很多很多这类的说谎者悖论。

比如说：

“我平生从不撒谎，除了这一次。”

“这本书中所有的内容都是可靠的，除了这一句。”

“一切规则都有例外。”

“所有知识都值得怀疑。”……

另外还有：“颁发一枚勋章，勋章上刻着：‘禁止授勋！’”

“在墙上写：‘不准在墙上写字！’”……

仔细地观察说谎者悖论的这些变形，我们会发现：这些叙述之所以是矛盾的，原因是它们都违背了它们自己所提出的要求。这一点也正是说谎者悖论的本质。

4. 柏拉图—苏格拉底悖论

让我们来想一想。在说谎者悖论中，一个撒谎者说的是全部撒谎者，一句话说的是这句话本身，一个勋章上表达的是关于全部勋章的论断。所有这些句子谈论的都是关于句子本身的事，都出现了自相关。它们是不是因为自相关才引起了麻烦？如果我们能够想办法避免自相关，是不是就能够消除矛盾了？

不幸的是，这样做不行。古希腊人已经认识到了这一点，知道就是能够避免自相关也不足以消除矛盾，他们以当时最著名的两个哲学家的名字设计了一段对话，构成了柏拉图—苏格拉底悖论。

柏拉图：苏格拉底下面要说的话是假的。

苏格拉底：柏拉图说的是真话。

这段对话可以简化成两个句子：

“句子 A：句子 B 是真的。”

“句子 B：句子 A 是假的。”

柏拉图—苏格拉底悖论，实际上是说谎者悖论的翻版，不信你试试看，不管你让哪一句话是真的，另一句都会与之矛盾。在两句对话中，每一句谈的都不是它本身，都不出现自相关。但是只要把它们放到一起，仍然出现了说谎者悖论。让我们一起来分析：

假若句子 A 是真的，那么句子 B 必然是真的；但是，如果句子 B 是真的，句子 A 就必须是假的。

假若句子 A 是假的，那么句子 B 必然是假的；但如果句子 B 是假的，句子 A 就必须是真的。

这样一来，只要这两个句子放在一起，就会不断地改变自己