21世纪高等学校教材

孙志忠 编

计算方法与实习 学习指导与习题解析

JISUAN FANGFA YU SHIXI XUEXI ZHIDAO YU XITI JIEXI

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

计算方法与实习
学习指导与习题解析

计算方法与实习
学习指导与习题解析

孙志忠　编

东 南 大 学 出 版 社
·南京·

内 容 提 要

本书是全国优秀畅销书《计算方法与实习》(第3版)一书的全部习题解答,涉及误差分析、方程求根、线性方程组数值解法、插值法、曲线拟合、数值积分与数值微分、常微分方程数值解法和矩阵特征值及特征向量的计算。书末附一份模拟试卷及其参考答案。

本书可作为理工科大学生学习计算方法课程的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

计算方法与实习学习指导与习题解析 / 孙志忠编. —南京:东南大学出版社,2005.1

ISBN 7-81089-831-0

Ⅰ.计… Ⅱ.孙… Ⅲ.电子计算机—计算方法—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.TP301.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第131028号

东南大学出版社出版发行

(南京四牌楼2号 邮编210096)

出版人:宋增民

江苏省新华书店经销 姜堰市晨光印刷有限公司印刷

开本:700mm×1000mm 1/16 印张:9 字数:174千字

2005年1月第1版 2005年1月第1次印刷

印数:1—5000 定价:12.00元

前　　言

《计算方法与实习》(第3版,袁慰平、孙志忠、吴宏伟、闻震初编)于2000年由东南大学出版社出版。此书出版4年来,承蒙广大读者的支持,已重印了7次。现已有不少高等院校采用此书作为理工科大学生“计算方法”课程的教材或主要参考书。该书被中国书刊发行业协会评为2001年全国优秀畅销书。

这几年在教材的使用过程中,作者收到了不少教师和同学的来信来电,他们除了表达对这本书的赞许外,感到书中部分习题比较难,或者不容易找到简洁明了的解题思路,希望能看到供参考的习题解法。读者的肯切要求和东南大学出版社的鼓励支持促成了本习题解析的出版。

本习题解析涵盖了《计算方法与实习》一书的全部习题,并尽可能采用简单的方法解答这些习题。部分习题给出了多种解法并作了一些评注。所有计算在Casio计算器上完成。书末附了一份模拟试卷,并给出了参考答案。

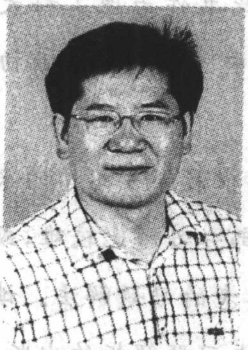
作者殷切地希望读者在对习题作了充分思考之后,再来阅读习题解答,使得本书对“计算方法”课程的学习真正有所帮助。

书中疏漏及不妥之处,恳请读者给以指正。电子信箱:zzsun@seu.edu.cn。

编　者

2004年10月

作者简介



孙志忠　1963 年 3 月生。1984 年获南京大学学士学位。1987 年获南京大学硕士学位。1990 年在中国科学院计算中心(现计算数学与科学工程计算研究所)获博士学位，专业为计算数学。1990 年至今在东南大学数学系任教，现为教授、博士生导师、教研室主任。

目　录

1　绪　论

本章要求掌握误差的来源、绝对误差及绝对误差限、相对误差及相对误差限、有效数字以及数据误差的影响，了解机器数系及如何尽量减少误差。

本章重点是绝对误差、有效数字、数据误差对函数值的影响和数值稳定性。

1.1　指出下列各数有几位有效数字：

$$x_1 = 4.867\,5;\qquad x_2 = 4.086\,75;\qquad x_3 = 0.086\,75;$$

$$x_4 = 96.473\,0;\qquad x_5 = 96\times 10^5;\qquad x_6 = 0.000\,96。$$

解　x_1 具有 5 位有效数字；x_2 具有 6 位有效数字；x_3 具有 4 位有效数字；x_4 具有 6 位有效数字；x_5 具有 2 位有效数字；x_6 具有 2 位有效数字。

评注　根据约定写出的数均为有效数，其有效位数为从末位数起向左数位数至左端第一位非零数字。

1.2　将下列各数舍入至 5 位有效数字：

$$x_1 = 3.258\,94;\qquad x_2 = 3.258\,96;\qquad x_3 = 4.382\,000;\qquad x_4 = 0.000\,789\,247。$$

解　$x_1 \to 3.258\,9$；　$x_2 \to 3.259\,0$；　$x_3 \to 4.382\,0$；　$x_4 \to 0.000\,789\,25$。

评注　给出的数为精确值舍入至 5 位有效数字的近似值。

1.3　若近似数 x 具有 n 位有效数字，且表示为

$$x = \pm(a_1 + a_2\times 10^{-1} + \cdots + a_n \times 10^{-(n-1)})\times 10^m,\qquad a_1 \neq 0$$

证明其相对误差限为

$$\varepsilon_r \leqslant \frac{1}{2a_1}\times 10^{-(n-1)}$$

并指出近似数 $x_1 = 86.734$，$x_2 = 0.048\,9$ 的相对误差限分别是多少？

证明　设近似数 x 的精确值为 x^*，则有

$$|x^* - x| \leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-(n-1)}\times 10^m$$

$$|x| \geqslant a_1 \times 10^m$$

由相对误差的第二种定义式

$$\bar{e}_r(x) = \frac{x^* - x}{x}$$

得

$$|\bar{e}_r(x)| = \left|\frac{x^* - x}{x}\right| \leqslant \frac{\frac{1}{2}\times 10^{-(n-1)}\times 10^m}{a_1\times 10^m} = \frac{1}{2a_1}\times 10^{-(n-1)}$$

$$x_1 = 86.734 = 8.673\,4\times 10^1$$

$$|\bar{e}_r(x_1)| \leqslant \frac{1}{2\times 8}\times 10^{-(5-1)} = \frac{1}{16}\times 10^{-4}$$

$$x_2 = 0.048\,9 = 4.89\times 10^{-2}$$

$$|\bar{e}_r(x_2)| \leqslant \frac{1}{2\times 4}\times 10^{-(3-1)} = \frac{1}{8}\times 10^{-2}$$

评注 相对误差有两种定义，哪一种应用方便就用哪一种。

1.4 求下列各近似数的误差限：

(1) $x_1 + x_2 + x_3$；

(2) $x_1 x_2$；

(3) x_1/x_2。

其中，x_1，x_2，x_3 均为 1.1 题所给的数。

解 $|e(x_1)| \leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-4}$，　$|e(x_2)| \leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-5}$，　$|e(x_3)| \leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-5}$

(1) 由 $e(x_1+x_2+x_3) \approx e(x_1+x_2)+e(x_3) \approx e(x_1)+e(x_2)+e(x_3)$ 得

$$\begin{aligned}|e(x_1+x_2+x_3)| &\approx |e(x_1)+e(x_2)+e(x_3)| \quad ①\\ &\leqslant |e(x_1)|+|e(x_2)|+|e(x_3)| \quad ②\\ &\leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-4}+\frac{1}{2}\times 10^{-5}+\frac{1}{2}\times 10^{-5}\\ &= 6\times 10^{-5}\end{aligned}$$

(2) 由 $e(x_1x_2) \approx x_2 e(x_1) + x_1 e(x_2)$ 得

$$\begin{aligned}|e(x_1x_2)| &\approx |x_2 e(x_1)+x_1 e(x_2)| \quad ③\\ &\leqslant x_2\,|e(x_1)| + x_1\,|e(x_2)| \quad ④\\ &\leqslant 4.086\,75\times\frac{1}{2}\times 10^{-4} + 4.867\,5\times\frac{1}{2}\times 10^{-5}\\ &= 2.286\,75\times 10^{-4}\end{aligned}$$

(3) 由 $e\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \approx \frac{1}{x_2}e(x_1) - \frac{x_1}{x_2^2}e(x_2)$ 得

$$\begin{aligned}\left|e\left(\frac{x_1}{x_2}\right)\right| &\approx \left|\frac{1}{x_2}e(x_1) - \frac{x_1}{x_2^2}e(x_2)\right|\\ &\leqslant \frac{1}{x_2}|e(x_1)| + \frac{x_1}{x_2^2}|e(x_2)|\\ &\leqslant \frac{1}{4.086\,75}\times\frac{1}{2}\times 10^{-4} + \frac{4.867\,5}{4.086\,75^2}\times\frac{1}{2}\times 10^{-5}\\ &= 1.369\,2\times 10^{-5}\end{aligned}$$

评注 本题是为学生掌握数据四则运算误差公式而设计。自己要能借助于微分公式推出四则运算误差公式。

1.5 证明：

$$\bar{e}_r - e_r = \frac{\bar{e}_r^2}{1+\bar{e}_r} = \frac{e_r^2}{1-e_r}$$

证明 设 x^* 为精确值，x 为其近似值，

$$e(x) = x^* - x, \qquad e_r(x) = \frac{x^* - x}{x^*}, \qquad \bar{e}_r(x) = \frac{x^* - x}{x}$$

$$\begin{aligned}\bar{e}_r - e_r &= \frac{x^* - x}{x} - \frac{x^* - x}{x^*} \\ &= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^*}\right)(x^* - x) \\ &= \frac{(x^* - x)^2}{xx^*}\end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned}\bar{e}_r - e_r &= \left(\frac{x^* - x}{x}\right)^2 \cdot \frac{x}{x^*} = \bar{e}_r^2 \cdot \frac{x}{x + e(x)} \\ &= \bar{e}_r^2 \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{e(x)}{x}} = \frac{\bar{e}_r^2}{1 + \bar{e}_r}\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}\bar{e}_r - e_r &= \left(\frac{x^* - x}{x^*}\right)^2 \frac{x^*}{x} = e_r^2 \cdot \frac{x^*}{x^* - e(x)} \\ &= e_r^2 \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{e(x)}{x^*}} = \frac{e_r^2}{1 - e_r}\end{aligned}$$

评注 从本题结果可知，$\bar{e}_r$，e_r 中只要有一个为小量，则 e_r 与 $\bar{e}_r$ 的差为该小量的二阶小量。

1.6 一台10进制、4位字长、阶码 $p \in [-2,3]$ 的计算机，可以表示的机器数有多少个?给出它的最大数与最小数，以及距原点最近的非零数，并求 $\mathrm{fl}(x)$ 的相对误差限。

解 $\beta = 10, \quad t = 4, \quad L = -2, \quad U = 3$

机器数的个数为

$$2(\beta - 1)\beta^{t-1}(U - L + 1) + 1 = 2 \times 9 \times 10^3 \times (3 + 2 + 1) + 1 = 108\,001$$

最大数为

$$0.999\,9 \times 10^3 = 999.9$$

最小数为

$$-0.999\,9 \times 10^3 = -999.9$$

距离原点最近的非零数为

$$\pm 0.1\,000 \times 10^{-2} = \pm 0.001$$

$$|e_r(\mathrm{fl}(x))| \leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{2} \times 10^{1-4} = \dfrac{1}{2} \times 10^{-3}, & \text{舍入机} \\ 10^{1-4} = 10^{-3}, & \text{截断机} \end{cases}$$

评注　该题为掌握机器数系的结构所设。

1.7　设 $y_0 = 28$,按递推公式

$$y_n = y_{n-1} - \frac{1}{100}\sqrt{783}, \qquad n = 1,2,\cdots$$

计算到 y_{100},若取 $\sqrt{783} \approx 27.982$(5 位有效数字),试问计算到 y_{100} 将有多大误差?

解
$$\begin{cases} y_n = y_{n-1} - \dfrac{1}{100}\sqrt{783}, & n = 1,2,\cdots \\ y_0 = 28 \end{cases} \qquad ①$$

设

$$\begin{cases} \tilde{y}_n = \tilde{y}_{n-1} - \dfrac{1}{100} \times 27.982, & n = 1,2,\cdots \\ \tilde{y}_0 = 28 \end{cases} \qquad ②$$

记 $e_n = y_n - \tilde{y}_n$,将 ① 和 ② 相减,得

$$\begin{cases} e_n = e_{n-1} - \dfrac{1}{100} \times (\sqrt{783} - 27.982), & n = 1,2,\cdots \\ e_0 = 0 \end{cases}$$

递推可得

$$e_n = -\frac{n}{100}(\sqrt{783} - 27.982), \qquad n = 1,2,\cdots$$

因而

$$e_{100} = -(\sqrt{783} - 27.982)$$

$$|e_{100}| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

评注　本题为掌握运算过程中舍入误差的传播而设计。

1.8　序列$\{y_n\}$满足递推关系

$$y_n = 5y_{n-1} - 2, \qquad n = 1,2,\cdots$$

若 $y_0 = \sqrt{3} \approx 1.73$(3 位有效数字),计算到 y_{10} 时误差有多大?这个计算过程稳定吗?

解
$$\begin{cases} y_n = 5y_{n-1} - 2, & n = 1,2,\cdots \\ y_0 = \sqrt{3} \end{cases} \qquad ①$$

设

$$\begin{cases} \tilde{y}_n = 5\tilde{y}_{n-1} - 2, & n = 1,2,\cdots \\ \tilde{y}_0 = 1.73 \end{cases} \tag{②}$$

记 $e_n = y_n - \tilde{y}_n$，将 ① 和 ② 相减，得

$$\begin{cases} e_n = 5e_{n-1}, & n = 1,2,\cdots \\ e_0 = \sqrt{3} - 1.73 \end{cases} \tag{③}$$

递推可得

$$e_n = 5^n e_0 = 5^n(\sqrt{3} - 1.73), \qquad n = 1,2,\cdots$$

$$e_{10} = 5^{10}(\sqrt{3} - 1.73) = 9\ 765\ 625 \times (\sqrt{3} - 1.73)$$

计算过程不稳定。

评注 本题为掌握递推算法的数值稳定性而设计。

1.9 推导出求积分

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{10 + x^2}\mathrm{d}x, \qquad n = 0,1,2,\cdots,10$$

的递推公式，并分析这个计算过程是否稳定。若不稳定，试构造一个稳定的递推公式。

解 $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是一个以零为极限的单调递减非负数列，由

$$I_0 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{10 + x^2} = \frac{1}{\sqrt{10}}\arctan\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{10 + x^2} = \frac{1}{2}\ln 1.1$$

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \frac{x^n + 10x^{n-2} - 10x^{n-2}}{10 + x^2}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(x^{n-2} - 10\frac{x^{n-2}}{10 + x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n-1} - 10I_{n-2}, \qquad n = 2,3,\cdots \end{aligned}$$

可得递推算法

$$\begin{cases} I_n = \dfrac{1}{n-1} - 10I_{n-2}, \qquad n = 2,3,\cdots & ① \\ I_0 = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\arctan\dfrac{1}{\sqrt{10}} & ② \\ I_1 = \dfrac{1}{2}\ln 1.1 & ③ \end{cases}$$

若已知 I_{n-2} 的一个近似值 $\tilde{I}_{n-2}$，则由上式可得 I_n 的一个近似值 $\tilde{I}_n$，即有

$$\tilde{I}_n = \frac{1}{n-1} - 10\tilde{I}_{n-2} \tag{④}$$

将 ① 和 ④ 相减，得

$$I_n - \tilde{I}_n = (-10)(I_{n-2} - \tilde{I}_{n-2})$$

两边取绝对值得

$$| I_n - \tilde{I}_n | = 10 \, | I_{n-2} - \tilde{I}_{n-2} |$$

I_{n-2} 的误差放大 10 倍传给 I_n，因而递推公式 ① ～ ③ 是数值不稳定的。

从 ① 可解得

$$I_{n-2} = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{n-1} - I_n\right), \qquad n = N, N-1, \cdots, 2 \tag{5}$$

则只要给出 I_N, I_{N-1} 就可依次递推得到 $I_{N-2}, I_{N-3}, \cdots, I_1, I_0$。

若已知 I_n 的一个近似值 $\tilde{I}_n$，由 ⑤ 可得 I_{n-2} 的一个近似值 $\tilde{I}_{n-2}$，即有

$$\tilde{I}_{n-2} = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{n-1} - \tilde{I}_n\right) \tag{6}$$

将 ⑤ 和 ⑥ 相减，得

$$I_{n-2} - \tilde{I}_{n-2} = \left(-\frac{1}{10}\right)(I_n - \tilde{I}_n)$$

两边取绝对值，得

$$| I_{n-2} - \tilde{I}_{n-2} | = -\frac{1}{10} | I_n - \tilde{I}_n |$$

递推一步，误差缩小 10 倍，因而递推公式 ⑤ 是数值稳定的。

由积分第二中值定理有

$$I_N = \int_0^1 \frac{x^N}{10 + x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{10 + \xi_N^2} \int_0^1 x^N \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{(10 + \xi_N^2)(N+1)}, \qquad \xi_N \in (0,1)$$

于是

$$I_N \in \left(\frac{1}{11(N+1)}, \frac{1}{10(N+1)}\right)$$

取

$$\tilde{I}_N = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{11(N+1)} + \frac{1}{10(N+1)}\right] = \frac{21}{220(N+1)}$$

则

$$| I_N - \tilde{I}_N | < \frac{1}{2}\left[\frac{1}{10(N+1)} - \frac{1}{11(N+1)}\right] = \frac{1}{220(N+1)}$$

从以上分析，可由递推算法

$$\tilde{I}_{n-2} = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{n-1} - \tilde{I}_n\right), \qquad n = 20, 19, 18, \cdots, 2$$

$$\tilde{I}_{20} = \frac{21}{220 \times (20+1)}$$

$$\tilde{I}_{19} = \frac{1}{220 \times (19+1)}$$

得到 $I_{10}, I_9, \cdots, I_1, I_0$ 的近似值 $\tilde{I}_{10}, \tilde{I}_9, \cdots, \tilde{I}_1, \tilde{I}_0$。

评注 该题是为掌握数值稳定性而设计，其难度比课本中例题有所增加。

1.10 设 $f(x) = 8x^5 - 0.4x^4 + 4x^3 - 9x + 1$，用秦九韶法求 $f(3)$。

解 $f(x) = 8x^5 - 0.4x^4 + 4x^3 - 9x + 1$

	8	−0.4	4	0	−9	1
$x = 3$		24	70.8	224.4	673.2	1 992.6
	8	23.6	74.8	224.4	664.2	1 993.6

因而 $f(3) = 1\,993.6$。

评注 本题为掌握秦九韶算法而设计，完全类似于主教材中例9。注意将降幂系数排成一行时需将缺项看成系数为0。

2　方程求根

通过本章的学习，读者应了解根、单根及重根的定义，求根的两个步骤，如何判断给定方程存在几个根并找出每个根的隔离区间，会用二分法、简单迭代法、牛顿法和割线法求单个方程的根。了解代数方程求根的劈因子法。

本章重点是用简单迭代法和牛顿迭代法求给定方程的根，并用有关定理判断所用迭代格式的收敛性。

2.1　证明方程 $1-x-\sin x=0$ 在[0,1]中有且只有1个根，使用二分法求误差不大于$\frac{1}{2}\times10^{-3}$的根需要迭代多少次？(不必求根)

解　记 $f(x)=1-x-\sin x$，则

$$f'(x)=-1-\cos x$$

$$f(0)=1,\qquad f(1)=-\sin1<0$$

又当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，所以方程 $f(x)=0$ 在[0,1]内有惟一根 x^*。由 $|x_k-x^*|\leqslant\frac{1-0}{2^{k+1}}$ 知，要使

$$|x_k-x^*|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-3}$$

只要

$$\frac{1}{2^{k+1}}\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-3} \tag{①}$$

解 ① 得

$$2^k\geqslant10^3,\qquad k\lg2\geqslant3 \tag{②}$$

$$k\geqslant\frac{3}{\lg2}=9.966$$

所以需要二分10次，才能满足精度要求。

评注　(1) 本题为学生掌握在给定的区间上判断已知方程根的存在惟一性并掌握二分法的先验估计式而设计。判断根的存在惟一性的常用方法是高等数学中介绍的介值定理及单调性定理。计算方法中的先验估计式，即主教材中的(2.2)式，是一个很重要的概念，借助于这一估计式，在具体计算出近似根 x_k 之前就可知道其误差。

(2) 对 ② 可取以e为底的对数，也可取以10为底的对数。最后是等分的次数取为整数。

(3) 注意到 $f(0.1)=1-0.1-\sin0.1\geqslant0$，所以 $x^*>0.1$，因此易知要求求

得误差不大于$\frac{1}{2}\times 10^{-3}$的近似根等价于要求求得具有3位有效数字的近似根。

2.2 用二分法求方程$2e^{-x}-\sin x=0$在区间[0,1]内的根,精确到3位有效数字。

解　记$f(x)=2e^{-x}-\sin x$,则

$$f'(x)=-2e^{-x}-\cos x$$

$$f(0)=2,\qquad f(1)=2e^{-1}-\sin 1=-0.105\,71$$

当$x\in(0,1)$时$f'(x)<0$。因而$f(x)=0$在[0,1]内有惟一根。

记$a_0=0,b_0=1$,令

$$x_0=\frac{1}{2}(a_0+b_0)=0.5$$

则

$$f(x_0)=0.733\,64$$

因为

$$f(x_0)f(b_0)<0$$

所以取$a_1=x_0=0.5,b_1=b_0=1$。再令

$$x_1=\frac{1}{2}(a_1+b_1)=0.75$$

计算得$f(x_1)=0.263\,09$。因为$f(x_1)f(b_1)<0$,所以取$a_2=x_1=0.75,b_2=b_1=1$。如此继续,即得计算结果,列表如下:

k	$a_k(f(a_k))$	$x_k(f(x_k)$的符号)	$b_k(f(b_k)$的符号)
0	0(+)	0.5(+)	1(−)
1	0.5(+)	0.75(+)	1(−)
2	0.75(+)	0.875(+)	1(−)
3	0.875(+)	0.937 5(−)	1(−)
4	0.875(+)	0.906 25(+)	0.937 5(−)
5	0.906 25(+)	0.921 875(−)	0.937 5(−)
6	0.906 25(+)	0.914 062 5(+)	0.921 875(−)
7	0.914 062 5(+)	0.917 968 75(+)	0.921 875(−)
8	0.917 968 75(+)	0.919 921 875(+)	0.921 875(−)
9	0.919 921 875(+)	0.920 898 437(+)	0.921 875(−)
10	0.920 898 437(+)	0.921 386 718	0.921 875(−)

$$f(x_{10}) = -5.073\,754\,12 \times 10^{-4}$$

取 $x^* \approx 0.921$，即满足精度要求。

评注　(1) 本题为学生掌握二分法而设计，题型同主教材例 3。

(2) 经过第一步计算可知 $x^* \in (0.5,1)$，即 x^*的第一位小数大于 5，因而要求所得结果有 3 位有效数，即要求绝对误差限为$\frac{1}{2}\times 10^{-3}$，由$\frac{1-0}{2^{k+1}} \leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-3}$ 解得 $k \geqslant 3\ln 10/\ln 2 \geqslant 9.965$，所以需要二分 10 次才能得到满足精度要求的根。也可由 $(b_{10}-a_{10})/2 = 0.48\cdots \times 10^{-3}$ 知 x_{10} 为满足要求的近似值。

(3) 使用计算器进行运算时，应将模式选定为弧度，将 $f(x)$ 写成 $2/e^x - \sin x$ 更便于计算。

2.3　用简单迭代法求下列方程的根，并验证收敛性条件，精确至 4 位有效数字。

(1) $x^3 - x - 1 = 0$；

(2) $e^x - 4x = 0$；

(3) $4 - x = \tan x, x \in [3,4]$；

(4) $e^x - 3x^2 = 0$。

解　(1) 记 $f(x) = x^3 - x - 1$，则

$$f(x) = x(x^2-1)-1, \qquad f'(x) = 3x^2 - 1, \qquad f''(x) = 6x$$

当 $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ 时，$f'(x) < 0$；当 $|x| > \frac{1}{\sqrt{3}}$ 时 $f'(x) > 0$。

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3}-1\right) - 1 = \frac{2\sqrt{3}}{9} - 1 < 0$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3}-1\right) - 1 = -\frac{2\sqrt{3}}{9} - 1 < 0$$

$$f(0) = -1, \qquad f(1) = -1, \qquad f(2) = 5$$

作 $f(x)$ 的草图如右图。方程 $f(x) = 0$ 有惟一根 $x^* \in [1,2]$。

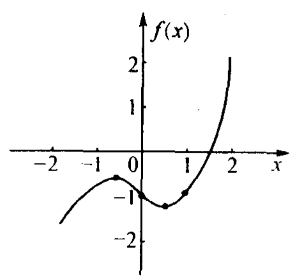
在[1,2]内将方程 $f(x) = 0$ 改写成同解方程，

$$x = \sqrt[3]{x+1}, \qquad x \in [1,2]$$

构造迭代格式

$$x_{k+1} = \sqrt[3]{x_k + 1}, \qquad k = 0,1,\cdots$$

①



记 $\varphi(x) = \sqrt[3]{x+1}$，则

$$\varphi'(x) = \frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}$$

当 $x \in [1,2]$ 时，