大学数学的内容、方法与技巧丛书

实变函数
内容、方法与技巧

孙清华　孙昊

华中科技大学出版社

大学数学的内容、方法与技巧丛书

实变函数

内容、方法与技巧

孙清华　孙　昊

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

实变函数内容、方法与技巧/孙清华　孙昊

武汉:华中科技大学出版社,2004 年 9 月

ISBN 7-5609-3161-8

Ⅰ.实…

Ⅱ.①孙…　②孙…

Ⅲ.实变函数-高等学校-教学参考资料

Ⅳ.O174.1

实变函数内容、方法与技巧　　孙清华　孙昊

策划编辑:徐正达　　封面设计:刘　卉

责任编辑:吴锐涛　唐　岚　　责任监印:张正林

责任校对:陈　骏

出版发行:华中科技大学出版社

武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87557437

录　　排:武汉皇荣文化发展有限责任公司

印　　刷:仙桃市新华印刷厂

开本:850×1168　1/32　　印张:9.25　　字数:220 000

版次:2004 年 9 月第 1 版　　印次:2004 年 9 月第 1 次印刷　　定价:12.00 元

ISBN 7-5609-3161-8/O・317

内 容 简 介

本书是学习实变函数课程的一本极好的辅导书，主要内容有：集合与点集、勒贝格测度、可测函数、勒贝格积分、微分与不定积分、$L^p(p\geqslant 1)$空间等．本书的编写顺序与实变函数课程的教材同步，部分依据北京大学出版社出版、周民强编的《实变函数》，使读者在学习教材的同时，可通过本书更好地归纳内容、释疑解难，并通过大量而全面的例题融会知识、理解概念、熟悉技巧和掌握方法．认真地学习本书一定能帮助读者学好实变函数，掌握实变函数的思想与方法．

前言

“实变函数”是数学与应用数学专业的一门重要的专业基础课，是“数学分析”中微积分理论的发展与深化.“数学分析”主要研究定义在区间上的连续函数，“复变函数”主要讨论定义在区域上的解析函数的性质，而“实变函数”则将研究对象扩大到定义在可测集上的可测函数类，使微积分的理论得到在更宽松条件下的讨论与应用. 通过学习实变函数，将使我们受到更为严格的数学训练，思维能力产生一个飞跃，分析处理问题的思想方法更加灵活与细致.但是，实变函数的概念性强、内容抽象、推理严谨、逻辑周密，使我们学习起来比较困难，思维难以展开，解题难以入手，所以我们编写了此书来帮助读者解决学习中的困难.

本书的编写采取与教材同步的方法.每节分为三个部分：主要内容，疑难解析，方法、技巧与典型例题分析.本书主要内容部分依据北京大学出版社周民强编《实变函数》教材. 本书的特点是循序渐进地、扎扎实实地从理论、思维、方法上帮助读者消化知识，理解内容，学习方法，掌握技巧.特别是，作者利用大量的、全面的、难度恰当的例题，与读者一起讨论、分析、归纳、总结，从而达到融会知识、理解概念、熟悉技巧和掌握方法的目的.

由于实变函数的习题难易程度相差很大，因此，我们只选了一些难度恰当的题目. 在解题过程中力求分析深入、论证严密、概念准确、语言简明、方法多样、思路开阔，对于比较繁冗与过难的习题，请读者自行修习. 由于实变函数主要进行理论研究，所以本书的例题以证明题为主，计算题的数量很少.更由于各种教材的内容和体系不同，因此解题的方法与依据也可能不同，请读者学习时注意.

作者在本书的编写过程中，曾参阅了同行们的一些著作，在此向他们一一表示谢意．本书的出版得到了华中科技大学出版社领导与编辑的大力支持和帮助，出版工作人员为此做了许多精细的工作，在此，作者向他们表示谢意．

由于学识所限，本书的错误与不足之处在所难免，热忱欢迎读者与同行批评指正．希望本书能成为您的良师益友，欢迎您选用本系列丛书．

孙清华　孙昊

2004 年6 月

目　　录

第一章　集合与点集

第一节　集合与集合的运算

主 要 内 容

一、集合

集合是按照某种规定而能够识别的一类具体对象或事物的总体. 构成集合的这些对象或事物称为集合的元素.

集合可用列举法或描述法表示,如

$$A=\{1,2,3,4,5\} \quad \text{或} \quad A=\{x:x<6,x\in \mathbf{N}\}.$$

1. 对于两个集合 A 与 B,若 $x\in A$ 必有 $x\in B$,则称 A 包含于 B 或 B 包含 A,记做 $A\subset B$,或 $B\supset A$. 若 $A\subset B$,且 B 中含有不属于 A 的元素,则称 A 是 B 的真子集,记做 $A\subsetneqq B$ 或 $B\supsetneqq A$.

2. 设 A,B 是两个集合,若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称集合 A 与 B 相等,记做 $A=B$.

3. 设 I 是任给的一个集合,对于每一个 $\alpha\in I$,我们指定一个集合 A_α,这样得到的集合的总体称为集合族,记为 $\{A_\alpha:\alpha\in I\}$. I 称为指标集. 当 $I=\mathbf{N}$ 时,$\{A_\alpha\}$ 也称集合列,记做 $\{A_k\}$.

集合可分为空集、有限集与无限集.

二、集合的运算

1. 设 A,B 是两个集合,则称集合 $\{x:x\in A \text{ 或 } x\in B\}$ 为 A 与 B 的并集或和集,记做 $A\cup B$.

2. 设 A,B 是两个集合,则称集合 $\{x:x\in A,x\in B\}$ 为 A 与 B 的交集或通集,记做 $A\cap B$. 若 $A\cap B=\varnothing$,称 A 与 B 不相交.

交与并及其联合运算，有以下规律.

(1)交换律　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

(2)结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

(3)分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

以上规律可以推广到任意多个集合情形.

(4)幂等性　$A\cup A=A$，$A\cap A=A$，

空集是求"并"运算的零元　$A\cup\varnothing=A$；

(5)保单调性　如果$A_\alpha\subset B_\alpha(\alpha\in I)$，则

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\subset\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha,\quad \bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\subset\bigcap_{\alpha\in I}B_\alpha.$$

3. 设A,B是两个集合，则称集合$\{x;x\in A,x\overline{\in}B\}$为$A$与$B$的差集，记做$A\backslash B$(读做$A$减$B$).

当B是A的子集时，称$A\backslash B$是集合B关于A的补集或余集，记做$B^{\mathrm{C}}=A\backslash B$或$\mathscr{C}_AB(\mathscr{C}B)$.

$A\backslash B$运算有以下性质：

(1)$A\cup A^{\mathrm{C}}=X$(全集)，$A\cap A^{\mathrm{C}}=\varnothing$，$(A^{\mathrm{C}})^{\mathrm{C}}=A$，$X^{\mathrm{C}}=\varnothing$，$\varnothing^{\mathrm{C}}=X$.

(2)$A\backslash B=A\cap B^{\mathrm{C}}$.

(3)若$A\supset B$，则$A^{\mathrm{C}}\subset B^{\mathrm{C}}$；若$A\cap B=\varnothing$，则$A\subset B^{\mathrm{C}}$.

还有德·摩根(De Morgan)律：

(4)$(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)^{\mathrm{C}}=\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^{\mathrm{C}}$.

(5)$(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)^{\mathrm{C}}=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha^{\mathrm{C}}$.

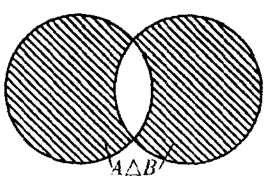

图1.1

设A,B为两个集合，则称集合$(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$为$A$与$B$的对称差集，记做$A\triangle B$，如图1.1所示，有下列事实：

$$A\triangle\varnothing=A,A\triangle A=\varnothing,A\triangle A^{\mathrm{C}}=X,A\triangle X=A^{\mathrm{C}},$$

$$A\triangle B=B\triangle A,(A\triangle B)\triangle C=A\triangle(B\triangle C),$$

$$A\cap(B\triangle C)=(A\cap B)\triangle(A\cap C),\ A^c\triangle B^c=A\triangle B.$$

对任意的集合A与B，存在惟一的集合E，使得$E\triangle A=B$. 实际上$E=B\triangle A$.

三、上限集与下限集

设$\{A_k\}$是一个集合列，若$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_k\supset\cdots$，则称此集合列为递减集合列. 其交集$\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k$称为集合列$\{A_k\}$的极限集，记做$\lim_{k\to\infty}A_k$. 若$\{A_k\}$满足$A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_k\subset\cdots$，则称$\{A_k\}$为递增集合列，其并集$\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$称为集合列$\{A_k\}$的极限集，记做$\lim_{k\to\infty}A_k$.

1. 设$\{A_k\}$是任意集合列，令$B_n=\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$，$n=1,2,\cdots$，则称

$$\lim_{k\to\infty}B_k=\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$$

为集合列$\{A_k\}$的上极限集，简称上限集，记做$\overline{\lim_{k\to\infty}}A_k=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$.

类似地，称集合$\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k$为集合列$\{A_k\}$的下极限集，简称下限集，记做

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}A_k=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k.$$

对上、下限集的运算，有

(1)$E\setminus\overline{\lim_{k\to\infty}}A_k=\underline{\lim_{k\to\infty}}(E\setminus A_k)$；　　(2)$E\setminus\underline{\lim_{k\to\infty}}A_k=\overline{\lim_{k\to\infty}}(E\setminus A_k)$.

2. 若$\{A_k\}$为一集合列，则

(1)$\overline{\lim_{k\to\infty}}A_k=\{x$：对任意自然数$n$，存在$k(k\geqslant n)$，$x\in A_k\}$；

(2)$\underline{\lim_{k\to\infty}}A_k=\{x$：存在自然数$n_0$，当$k\geqslant n_0$时，$x\in A_k\}$.

从而可知$\overline{\lim_{k\to\infty}}A_k\supset\underline{\lim_{k\to\infty}}A_k$.

四、集合的直积

设X,Y是两个集合，称一切有序"元素对"(x,y)(其中$x\in X$，$y\in Y$)构成的集合为X与Y的直积集，记做$X\times Y$，即

$$X\times Y=\{(x,y):x\in X,y\in Y\},$$

其中$(x,y)=(x',y')$是指$x=x',y=y'$，$X\times X$也记做X^2.

疑难解析

1. 叙述$\in$和$\subset$的区别.

答 "$\in$"表示集合与其元素之间的从属关系，而"$\subset$"表示集合与集合之间的包含关系. $a\in A$不能写成$a\subset A$，但可以写做$\{a\}\subset A$，此时$\{a\}$表示只含元素a的"单元素集".

2. 怎样理解集合族的概念？

答 集合族也称集族，即若有任意集合I（有限集或无限集）. 如果对I中每个元素α，都有一个集合A_α与之对应，则所有的A_α组成一个集合（此时集合A_α作为一个元素）称为以I为指标集的集族，记做$\{A_\alpha:\alpha\in I\}$或$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$.

集族即以集合为元素的集合.

若$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$是任意集族，则$\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$是$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$的并集，$\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$是$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$的交集.

3. 怎样理解上限集与下限集概念？它们有什么现实意义？

答 在利用点集分析讨论函数性质时，经常要用到上限集与下限集的概念.

设$A_1,A_2,\cdots,A_k,\cdots$是任意一列集合，则由属于上述集列中无限多个集的那种元素的全体所组成的集称为这一列集合的上限集，记做$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k$或$\limsup\limits_{k\to\infty}A_k$，即

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}A_k=\{x:\text{存在无限多个}A_k,\text{使}x\in A_k\}.$$

而由属于集列中从某指标$k(x)$（指标与x有关）以后的所有集合A_k的那种元素x的全体（即除去有限多个集以外的所有集合A_k都含有的那种元素）组成的集称为这一列集合的下限集，记做$\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k$或$\liminf\limits_{k\to\infty}A_k$，即

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}A_k=\{x:\text{当}k>k(x)\text{时},x\in A_k\},$$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}A_k=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k,\quad \underline{\lim_{k\to\infty}}A_k=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k.$$

我们来证第一个等式，第二个等式可类似证明. 设$P=\overline{\lim_{k\to\infty}}A_k$，$Q=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$. 若$x\in P$，则由上限集定义，$x$属于$\{A_k\}$中无限个集，不妨设$x$同时属于$A_{k_1},A_{k_2},\cdots,A_{k_m},\cdots(k_m<k_{m+1},m=1,2,\cdots)$，故对任意自然数$n$，当$k_m>n$时，$x\in A_{n_k}\subset\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$，即$x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$，于是$P\subset Q$. 反之，设有$y\in Q$，则对任意自然数$n$，$y\in\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$，取$k=1$，因为$y\in\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$，所以存在自然数$k_1$，使$y\in A_{k_1}$；又因为$y\in\bigcup_{k=k_1+1}^{\infty}A_k$，所以存在自然数$k_2$，使$y\in A_{k_2}$. 如此继续，得一自然数列$\{k_m\}$，$k_1<k_2<\cdots<k_m<\cdots$，而$y$属于一切$A_{k_m}$，故$y\in P$，于是$Q\subset P$. 综合得$P=Q$，命题得证.

对任意一列集$\{A_k\}$和任意集合$\{S\}$，有

$$S\setminus\overline{\lim_{k\to\infty}}A_k=\underline{\lim_{k\to\infty}}(S\setminus A_k),\quad S\setminus\underline{\lim_{k\to\infty}}A_k=\overline{\lim_{k\to\infty}}(S\setminus A_k),$$

因为

$$S\setminus\overline{\lim_{k\to\infty}}A_k=S\setminus\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Big(S\setminus\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\Big)\quad(\text{狄·摩根律})$$
$$=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}(S\setminus A_k)=\underline{\lim_{k\to\infty}}(S\setminus A_k).$$

如果集列$\{A_k\}$的上限集与下限集相等，即$\overline{\lim_{k\to\infty}}A_k=\underline{\lim_{k\to\infty}}A_k=A$，则称集列$\{A_k\}$收敛，集合$A$是集列$\{A_k\}$的极限，记做$A=\lim_{k\to\infty}A_k$.

方法、技巧与典型例题分析

对一门新的学科，重要的是理解概念，利用概念辨析问题、证明问题体现了对概念的理解和掌握的深度.

例 1 设r,s,t是三个互不相同的数，且$A=\{r,s,t\}$，$B=\{r^2,s^2,t^2\}$，$C=\{rs,st,tr\}$. 若$A=B=C$，证明：$(r,s,t)=(1,w,w^2)$，其中$w=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i})$.

证 因为$A=B=C$，则有

$$r+s+t=r^2+s^2+t^2=rs+st+tr=k,$$

从而 $k^2=(r+s+t)^2=(r^2+s^2+t^2)+2(rs+st+tr)=3k$,

解得$k=0$或$k=3$. 又有

$$rst=r^2\cdot s^2\cdot t^2=(rst)^2,$$

所以$rst=1$. 于是当$k=3$时，r,s,t为方程

$$x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3=0$$

的根，从而解得$r=s=t=1$，不合题意.

当$k=0$时，r,s,t为方程$x^3-1=0$的根. 解得$x=1$，$x=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i})$，即$w=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i})$.

例2 设三集合A,B,C有关系$A\subset B,B\subset C$. 证明：$A\subset C$.

证 因为$A\subset B,B\subset C$，所以对$x\in A$，有$x\in B$，又有$x\in C$，于是$A\subset C$.

例3 设有集合A,B,C,D，证明

(1)$(A-B)\cap(C-D)=(A\cap C)-(B\cup D)$;

(2)$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

(3)$A-(B-C)\subset(A-B)\cup C$;

(4)$(A-B)-(C-D)\subset(A-C)\cup(D-B)$;

(5)$(A-B)\cup C=A-(B-C)\Leftrightarrow C\subset A$.

证 (1)$x\in(A-B)\cap(C-D)\Leftrightarrow x\in(A-B)$且$x\in(C-D)$ $\Leftrightarrow x\in A,x\overline{\in}B,x\in C,x\overline{\in}D\Leftrightarrow x\in A\cap C,x\overline{\in}B\cup D\Leftrightarrow x\in(A\cap C)-(B\cup D)$.

也可以用补集概念来证：

$$\begin{aligned}&(A-B)\cap(C-D)\\&=(A\cap B^{c})\cap(C\cap D^{c})=(A\cap C)\cap(B^{c}\cap D^{c})\\&=(A\cap C)\cap(B\cup D)^{c}=(A\cap C)-(B\cup D).\end{aligned}$$

(2)$x\in(A\cap B)\cup C\Leftrightarrow x\in A\cap B$或$x\in C\Leftrightarrow x\in A$且$x\in B$或$x\in C\Leftrightarrow x\in A\cup C$且$x\in B\cup C\Leftrightarrow x\in(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

(3) $x\in A-(B-C)\Longleftrightarrow x\in A, x\overline{\in} B-C\Longleftrightarrow x\in A,$

$x\overline{\in} B$ 或 $x\in A, x\overline{\in} B, x\in C\Longleftrightarrow x\in A-B$ 或 $x\in C$

$\Longleftrightarrow x\in(A-B)\cup C.$

由 x 的任意性，关系式成立. 也可用补集概念来证:

$$\begin{aligned}A-(B-C)&=A\cap(B\cap C^{c})^{c}=A\cap(B^{c}\cup C)\\&=(A\cap B^{c})\cup(A\cap C)\subset(A\cap B^{c})\cup C\\&=(A-B)\cup C.\end{aligned}$$

(4) $(A-B)-(C-D)$

$$\begin{aligned}&=(A\cap B^{c})\cap(C\cap D^{c})^{c}=(A\cap B^{c})\cap(C^{c}\cup D)\\&=(A\cap B^{c}\cap C^{c})\cup(A\cap B^{c}\cap D)\subset(A\cap C^{c})\cup(B^{c}\cap D)\\&=(A-C)\cup(D-B).\end{aligned}$$

(5) **充分性** 因为 $(A-B)\cup C=(A-B)\cup(A\cap C)$，而 $A-(B-C)=(A-B)\cup C$，所以 $A\cap C=C$，即 $C\subset A$ 是等式成立的充分条件.

必要性 若 $C\not\subset A$，则有 $x\in C$ 且 $x\overline{\in} A$，从而 $x\overline{\in}(A-B)$ 且 $x\overline{\in} A\cap C$. 于是 $x\overline{\in}(A-B)\cup(A-C)$，而 $x\in(A-B)\cup C$，从而等式不成立，矛盾.

例3 证明 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

证 $(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$$\begin{aligned}&=[(A\cap B)\cup A]\cap[(A\cap B)\cup C]\\&=A\cap[(A\cup C)\cap(B\cup C)]=A\cap(B\cup C).\end{aligned}$$

例4 证明 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

证 $(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$$\begin{aligned}&=[(A\cup B)\cap A]\cup[(A\cup B)\cap C]\\&=A\cup[(A\cap C)\cup(B\cap C)]=A\cup(B\cap C).\end{aligned}$$

例5 设 $A_i=(0,i], i=1,2,\cdots$. 证明:

(1) $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=(0,\infty)$; (2) $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i=(0,1]$.

证 (1) 对每个 $A_i=(0,i], i=1,2,\cdots$，有 $A_i\subseteq(0,\infty)$，故 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$