高等数学学习与考试指导

主编 尹金生 王伟平

石油大学出版社

高等数学学习与考试指导

主　编　尹金生　王伟平
副主编　张春明　史　昱
编　委　林少华　李宗强
　　　　杨振起　刘吉晓

石油大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习与考试指导/尹金生,王伟平主编.—东营:石油大学出版社,2004.1

ISBN 7-5636-1902-X

Ⅰ.高…　Ⅱ.尹…　Ⅲ.高等数学—高等学校—自学参考资料　Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第001113号

高等数学学习与考试指导

主　编　尹金生　王伟平

责任编辑:宋秀勇(电话　0546—8396155)
封面设计:傅荣治

出 版 者:石油大学出版社(山东　东营　邮编　257062)
网　　址:http://mail.hdpu.edu.cn/~upcpress
电子信箱:yibian@mail.hdpu.edu.cn
印 刷 者:泰安开发区成大印刷厂
发 行 者:石油大学出版社(电话　0546—8391797)
开　　本:185×260　1/16　印张:18.875　字数:510千字
版　　次:2004年3月第1版第1次印刷
印　　数:1—3000册
定　　价:28.00元

前　言

本书是根据《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，并参照近年来各高校专升本考试的复习要求编写而成的。本书汲取了全国高职高专工科类院校高等数学课程教学改革的成果，融入了编者多年来的教学经验及专升本辅导的经验。内容包括函数、极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、常微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、线性代数初步、概率统计初步。

编写过程中充分考虑到处理好基础与提高、内容与习题、平时学习与专升本考试的关系。本书对高等数学的知识结构和教学要求做了具体分析；范例解析的内容覆盖面广，例题典型；习题与自测题从基础知识的掌握、提高及专升本考试的需要出发，所选题目的类型全面、题量大、适应各种需求。

本书结构严谨，叙述详细，通俗易懂，例题较多，便于自学，在保证教学基本要求的前提下扩大了适用面，可作为各种层次专科学生学习高等数学课程的学习指导书，也可以作为教师教学参考书及习题课教材，是一本不可多得的专升本辅导用书。

本书由山东交通学院数学教研室尹金生、王伟平主编，负责全书的统一协调、编纂和定稿。由山东交通学院尹金生、王伟平、张春明、史昱、林少华、李宗强、杨振起、刘吉晓共同编写。由于编者水平有限，再加上各章内容由不同作者执笔，其语言习惯和写作风格有所差异，书中难免存在一些不足之处，欢迎广大读者批评指正。

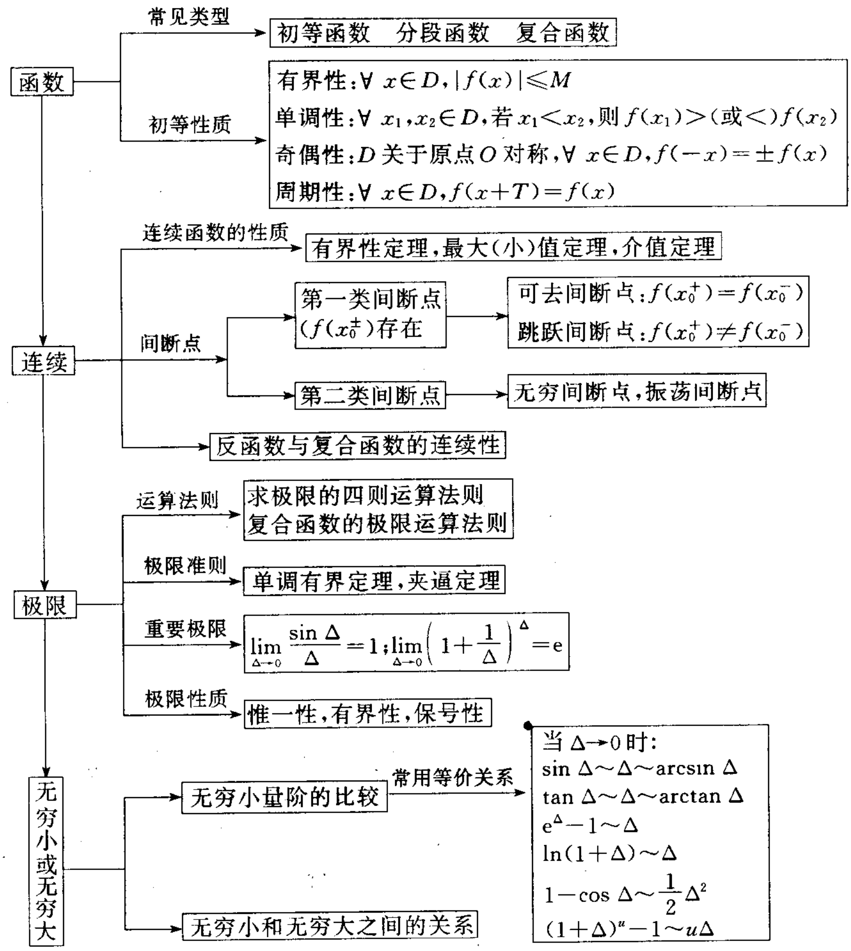
编　者

2004 年 2 月

目　录

第一章　函数、极限、连续

一、知识结构图



二、教学基本要求

1. 理解函数的概念、复合函数的概念，掌握函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性，能熟练列出简单问题的函数关系.

2. 了解分段函数，初等函数.

3. 理解极限的概念，会求函数在一点处的左、右极限，掌握左、右极限与极限的关系.

4. 了解极限的有关性质，掌握极限的四则运算法则.

5. 理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小量的性质，会对无穷小进行比较.

6. 知道夹逼准则和单调有界数列极限存在准则，熟练掌握用两个重要极限求极限的方法.

7. 理解函数在一点连续的概念，掌握判断函数(含分段函数)在一点连续的充要条件，会求函数的间断点及确定其类型.

8. 了解初等函数的连续性，掌握在闭区间上连续函数的性质，会用介值定理推证一些简单命题.

本章的重点是：熟练掌握求极限的方法，熟练掌握函数在一点连续的判定方法，会求间断点及判定其类型，熟练进行无穷小的比较.

§1 函　　数

一、要点知识及分析

1. *函数定义的两个要素：定义域和对应法则*

函数定义中的这两个要素是确定一个函数的必备条件，也是区分两个不同函数的依据. 例如，下面四对函数中，

① $f(x)=x+1, g(x)=\dfrac{1-x^2}{1-x}$.　　② $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$.

③ $f(x)=2\ln|x|, g(x)=\ln x^2$.　　④ $f(x)=\cot x, g(x)=\dfrac{1}{\tan x}$.

相同的只有③，①与④都是定义域不同的，②的定义域虽相同，但当$x<0$时，$g(x)$与$f(x)$对应法则不同.

2. *分段函数*

表示函数对应法则的记号$f(\quad)$有着广泛的含意，不要认为它只表示某个解析表达式，只要是对应法则，就可以用它表示. 它可以表示一个或在不同区间内的几个不同的解析表达式(分段函数)，也可以表示一个图形或一张表格.

一个分段函数无论它分成几段，在整体上仍表示一个函数而不是几个函数. 另外，在求分段函数的函数值时，要将自变量代入相应那一段的表达式去计算$f(x)$.

3. *复合函数*

复合函数的主要作用在于把一个比较复杂的函数，适当引入中间变量后，分解成若干个比较简单的函数，使我们对复杂函数的讨论可转化为对简单函数的讨论.

① 并非任何两个函数$y=f(u), u=\varphi(x)$都能构成复合函数$f[\varphi(x)]$，它们可以构成复合的条件是：内层函数$u=\varphi(x)$的值域与外层函数$y=f(u)$的定义域的交集非空. 例如，$y=\arcsin u$，$u=2+x^2$ 不能构成复合函数.

② 复合函数的定义域仅是$\varphi(x)$定义域的一个子集，即有

$$D_{f\cdot g}=\varphi^{-1}(R_\varphi\cap D_f)\subset D_\varphi.$$

③ 复合函数有两种运算，即"复合"与"分解".

"复合"即由$y=e^u, u=\sqrt{v}, v=1-x^2\Rightarrow y=e^{\sqrt{1-x^2}}$.

"分解"即由$y=\sqrt{\ln(1+x^2)}\Rightarrow y=\sqrt{u}, u=\ln v, v=1+x^2$.

重要的不是将几个简单函数"套"在一起构成复合函数，而是将一个复合函数"拆"开成几个简单函数的分解运算.

"分解"的方法是：由外往里，逐层拆开，而每层所得简单函数必须是基本初等函数或它们的和、差、积、商.

二、范例解析

1. 求函数表达式(或函数值)

已知 $f(u),u=\varphi(x)$,求 $f[\varphi(x)]$ 及已知 $f[\varphi(x)]$,求 $f(x)$.

例1 设 $f(x)=\begin{cases}-x^2, & x\geqslant 0,\\ -e^x, & x<0,\end{cases}\varphi(x)=\ln x.$

1) 求 $f[\varphi(x)]$ 及其定义域;

2) 可以复合成形如 $\varphi[f(x)]$ 的函数吗?

解 1) $\varphi(x)$ 定义域为 $(0,+\infty)$,值域为 $(-\infty,+\infty)$,$f(x)$ 定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}-\varphi^2(x), & \varphi(x)\geqslant 0,\\ -e^{\varphi(x)}, & \varphi(x)<0,\end{cases}\quad \text{所以}\ f[\varphi(x)]=\begin{cases}-\ln^2 x, & x\geqslant 1,\\ -x, & 0<x<1.\end{cases}$$

$f[\varphi(x)]$ 的定义域为 $(0,1)\cup[1,+\infty)=(0,+\infty)$.

2) 由于 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty,0)$,$\varphi(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,它们无公共部分,所以不能复合成形如 $\varphi[f(x)]$ 的函数.

例2 设 $f_1(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}},f_{k+1}(x)=f[f_k(x)],k=1,2,\cdots$,求 $f_n(x)$.

解 $$f_2(x)=f[f_1(x)]=\frac{f_1(x)}{\sqrt{1+f_1^2(x)}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

例3 设 $\varphi(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0,\end{cases}\quad f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\geqslant 1,\\ 0, & x<1,\end{cases}$ 求 $f[\varphi(x)]$.

解 $$f[\varphi(x)]=\begin{cases}\sin\varphi(x), & \text{当}\varphi(x)\geqslant 1,\\ 0, & \text{当}\varphi(x)<1,\end{cases}$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}x^2 & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}=\begin{cases}x^2<1, & \text{当}-1<x<0,\\ x^2\geqslant 1, & \text{当}x\leqslant -1,\\ 1, & \text{当}x\geqslant 0,\end{cases}$$

$$\text{所以}\ f[\varphi(x)]=\begin{cases}\sin x^2, & x\leqslant -1,\\ \sin 1, & x\geqslant 0,\\ 0, & -1<x<0.\end{cases}$$

例4 已知 $f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+1$,求 $f(x)$ 表达式.

解 令 $e^x+1=u$,则 $x=\ln(u-1)$,

所以 $f(u)=e^{2\ln(u-1)}+e^{\ln(u-1)}+1=(u-1)^2+(u-1)+1=u^2-u+1$.

即 $f(x)=x^2-x+1$.

例5 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}+3$,则 $f(x)=$________.

解 $f(x+\dfrac{1}{x})=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+1$, 所以 $f(x)=x^2+1$.

例6 $f\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)=x+6$,求 $f(x)$.

解 令 $\dfrac{x+3}{x+1}=u$,则 $x=\dfrac{u-3}{1-u}$.

代入原式，得 $f(u)=\dfrac{3-5u}{1-u}$. 即 $f(x)=\dfrac{3-5x}{1-x}\quad(x\neq 1)$.

2. 求定义域

例 7 $y=\sqrt{5-x}+\lg(x-1)$ 的定义域是 $\underline{(1,5]}$.

例 8 $y=\dfrac{\sqrt{\ln(x-1)}}{x(x-3)}$ 的定义域是 $\underline{[2,3)\cup(3,+\infty)}$.

3. 奇偶性判定

两个重要结论：

① 设 $\varphi(x)$ 是定义在对称域上的任一函数，则 $\varphi(x)$ 一定可以分解为一个偶函数与一个奇函数之和，即 $\varphi(x)=\dfrac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{2}+\dfrac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{2}$.

② $f(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)+f(-x)=0$；$f(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)-f(-x)=0$.

例 9 $F(x)=(2^x+2^{-x})f(x)$，$f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 内的奇函数，则 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是<u>奇</u>函数.

例 10 $f(x)$ 是奇函数，判定 $F(x)=f(x)\left(\dfrac{1}{a^x+1}-\dfrac{1}{2}\right)$ 的奇偶性，其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$.

解 令 $g(x)=\dfrac{1}{a^x+1}-\dfrac{1}{2}$，

则
$$g(x)+g(-x)=\left(\frac{1}{a^x+1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{a^{-x}+1}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{a^x+1}+\frac{1}{a^{-x}+1}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{a^x+1}+\frac{a^x}{a^x+1}-1=0.$$

所以 $g(x)$ 是奇函数，又 $f(x)$ 是奇函数，故 $F(x)$ 是偶函数.

例 11 判定 $f(x)=x\left(\dfrac{1}{2^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$ 的奇偶性.

解
$$f(x)-f(-x)=x\left(\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2}\right)+x\left(\frac{1}{2^{-x}-1}+\frac{1}{2}\right)=x\left(\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2^{-x}-1}+1\right)$$
$$=x\left(\frac{1}{2^x-1}+\frac{2^x}{1-2^x}+1\right)=0.$$

所以 $f(x)$ 是偶函数.

§2 极　　限

一、要点知识及分析

1. 左、右极限与极限

① $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow$ 左、右极限 $f(x_0^-)$，$f(x_0^+)$ 存在且相等.

② $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow f(+\infty)$，$f(-\infty)$ 存在且相等.

结论①常用来判定分段函数在分段点处的极限是否存在.

2. 极限存在的两个准则

① 单调有界准则

若数列 x_n 单调递增有上界（或单调递减有下界），则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 必定存在.

常用该准则判定数列极限的存在性，再通过对 x_n 的递推表达式两边取极限，进而求出 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

② 夹逼准则

若 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$ （或 $g(n)\leqslant f(n)\leqslant h(n)$）

且 $\lim g(x)=\lim h(x)=A$

则 $\lim f(x)=A$

3. 两个重要极限

① $\lim\limits_{\Delta\to 0}\dfrac{\sin\Delta}{\Delta}=1$ 其中 $\Delta=\varphi(x)\to 0$ 是任一函数.

② $\lim\limits_{\square\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\square}\right)^{\square}=\mathrm{e}$，$\square=\psi(x)\to\infty$ 是任一函数或 $\lim\limits_{\nabla\to 0}(1+\nabla)^{\frac{1}{\nabla}}=\mathrm{e}$，$\nabla=\omega(x)\to 0$ 是任一函数.

要注意其特点是幂指函数 $[u(x)]^{v(x)}$ 的"1^{∞}"型，且"$\dfrac{1}{\square}$"与"$\square$"须互为倒数.

4. 无穷小的性质及比较

① 有限多个无穷小的和、差、积仍是无穷小.

无穷小与(局部)有界函数之积仍是无穷小.

这里的"有界函数"是指在自变量变化趋势的邻近(局部)范围内有界，而非整个定义域内有界.

② 两个无穷小之商的极限，一般说来随着无穷小的不同而变化，从而产生了两个无穷小之间的高阶、低阶、同阶、等价的概念，它们反映了两个无穷小趋于零的快慢程度.

5. 无穷小等价替换

① 若 $\alpha,\alpha_1,\beta,\beta_1$ 均是同一自变量变化趋势下的无穷小，且 $\alpha\sim\alpha_1,\beta\sim\beta_1$；

则 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$.

② 常用的等价关系有：

$\Delta\to 0$ 时：$\sin\Delta\sim\Delta,\tan\Delta\sim\Delta,\ln(1+\Delta)\sim\Delta,$

$$\mathrm{e}^{\Delta}-1\sim\Delta,1-\cos\Delta\sim\frac{1}{2}\Delta^2,(1+\Delta)^{\alpha}-1\sim\alpha\Delta.$$

二、范例解析

1. 计算极限的方法

① 生成无穷小量法(适用于"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型的极限)

例 1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-3}{x^3-x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^3}}{1-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}=2.$

例 2 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}=1.$

例 3 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-1)^{300}(3x-2)^{200}}{(2x+1)^{500}}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{200}.$

② 根式有理化法(适用于含有根式的极限)

例 4 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n})(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n})}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{1}{n}}}=1.$$

例5 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{1+2x}+3)}$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(2x-8)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}=\lim_{x\to 4}\frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{1+2x}+3}=\frac{4}{3}.$$

例6 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$.

解 $\sin(\pi\sqrt{n^2+n})=\sin[\pi(\sqrt{n^2+n}-n)+n\pi]=(-1)^n\sin[\pi(\sqrt{n^2+n}-n)]$

$$=(-1)^n\sin\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}.$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}=\dfrac{\pi}{2}$,

故原式 $=\sin^2\dfrac{\pi}{2}=1$.

③ 用两个重要极限求极限(适用于"1^∞"型和含有三角函数的"$\frac{0}{0}$"型)

结论:对于极限 $\lim[u(x)]^{v(x)}$,若 $\lim u(x)=A>0$,$\lim v(x)=B$,

则 $\lim[u(x)]^{v(x)}=A^B$.

例7 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^x\quad(a\neq 0)$.

解 $\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^x=\left(1+\dfrac{-2a}{x+a}\right)^x=\left[\left(1+\dfrac{-2a}{x+a}\right)^{\frac{x+a}{-2a}}\right]^{\frac{-2ax}{x+a}}$

$\lim\limits_{x\to\infty}u(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-2a}{x+a}\right)^{\frac{x+a}{-2a}}=\lim\limits_{\square\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\square}\right)^{\square}=\mathrm{e}$,

$\lim\limits_{x\to\infty}v(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2ax}{x+a}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2a}{1+\frac{a}{x}}=-2a$,

所以 原极限 $=\mathrm{e}^{-2a}$.

例8 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n-1}\right)^n$.

解 令 $\dfrac{2}{n-1}=t$,则 $n=\dfrac{2}{t}+1$,当 $n\to\infty$ 时,$t\to 0$,

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n-1}\right)^n=\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{2}{t}+1}=\lim\limits_{t\to 0}[(1+t)^{\frac{1}{t}}]^2\cdot\lim\limits_{t\to 0}(1+t)=\mathrm{e}^2\times 1=\mathrm{e}^2$.

例9 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{1+x^2}\sin\dfrac{1}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{1+x^2}\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{1+x^2}\cdot\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right]=\left(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)=1\times 1=1$.

例10 $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}\quad(x\neq 0$ 为常数).

解 $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sin\dfrac{x}{2^n}}{\dfrac{x}{2^n}}\cdot x\right]=x\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2^n}}{\dfrac{x}{2^n}}=x\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=x.$

例 11 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}+\dfrac{x^2}{2n^2}\right)^{-n}$.

解 $\left(1+\dfrac{x}{n}+\dfrac{x^2}{2n^2}\right)^{-n}=\left\{\left(1+\dfrac{2nx+x^2}{2n^2}\right)^{\frac{2n^2}{2nx+x^2}}\right\}^{\frac{(2nx+x^2)(-n)}{2n^2}}$.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2nx+x^2}{2n^2}\right)^{\frac{2n^2}{2nx+x^2}}=\mathrm{e}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2nx+x^2)(-n)}{2n^2}=-x$,

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}+\dfrac{x^2}{2n^2}\right)^{-n}=\mathrm{e}^{-x}$.

④ 分解因式约分法(适用于“$\dfrac{0}{0}$”型可分解因式约去公共“零因子”的情形)

例 11 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

解 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{2x+1}=\dfrac{2}{3}$.

例 12 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3-(1+x+x^2)}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-x)(2+x)}{(1-x)(1+x+x^2)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2+x}{1+x+x^2}=1.$

⑤ 等价无穷小替换法(适用于“$\dfrac{0}{0}$”型有等价关系可以使用的情形)

例 13 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$.

解 $x\to 0$ 时,$\sin^3 x\sim x^3$,$\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim x\cdot\dfrac{1}{2}x^2$.

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2}x^3}{x^3}=\dfrac{1}{2}$.

注意:等价关系可以在乘积、商运算中使用,但在和、差运算中不能使用等价关系.即若$\alpha\sim\alpha_1$,$\beta\sim\beta_1$,但 $\alpha\pm\beta\sim\alpha_1\pm\beta_1$ 未必能成立.如 $x\to 0$ 时,$\tan x\sim x$,$\sin x\sim x$,但 $\tan x-\sin x\sim x-x=0$ 是不成立的.

例 14 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}$.

解 $x\to 0$ 时,$\sin 4x^2\sim 4x^2$,$\sqrt{x^2+1}-1\sim\dfrac{1}{2}x^2$,所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2}{\dfrac{1}{2}x^2}=8$.

例 15 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x^3+\sin 2x}$.

解 $x\to 0$ 时 $\sqrt{1+x+x^2}-1\sim\dfrac{1}{2}(x+x^2)\sim\dfrac{1}{2}x$,$x^3+\sin 2x\sim\sin 2x\sim 2x$,

所以,原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2}x}{2x}=\dfrac{1}{4}$.

例 16 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos x}{x(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}$,

$x\to 0$ 时,$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$,$1-\cos\sqrt{x}\sim\dfrac{1}{2}x$,原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2}x^2}{x\cdot\dfrac{1}{2}x(1+\sqrt{\cos x})}=\dfrac{1}{2}$.

例 17 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x+\sin^2x-2x^3}{\tan x+4x^2}=$__5__.

例 18 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\tan x}{\sqrt{1+x}-1}=$__2__.

⑥ 有界函数乘无穷小量仍是无穷小量的方法.

例 19 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x}{\sin x}\cdot\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)\right]$, 因为 $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$,且$x=o(1)$ $(x\to 0)$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$,

所以 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)=1\times 0=0$.

例 20 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\cos n!}{n^2+1}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{n^2+1}=0$,且$|\cos n!|\leqslant 1$, 所以 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{n^2+1}\cdot\cos n!=0$.

例 21 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x\sin x}{\sqrt{1+x^2}}\arctan\dfrac{1}{x}=$__0__.

⑦ 变量代换法

例 22 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi-x}$.

解 令$\pi-x=t$,则$x=\pi-t$;$x\to\pi$ 时,$t\to 0$,原式$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin(\pi-t)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$.

例 23 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

解 令 $e^x-1=t$,则$x=\ln(1+t)$;$x\to 0$ 时,$t\to 0$,

原式$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\ln(1+t)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{1}{t}\ln(1+t)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\dfrac{1}{\ln e}=1$.

例 24 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.

解 令$\sqrt[6]{1+x}=t$,则$x\to 0$ 时,$t\to 1$,原式$=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^3-1}{t^2-1}=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{(t-1)(t^2+t+1)}{(t-1)(t+1)}=\dfrac{3}{2}$.

⑧ 单调有界数列必有极限的方法

例 25 $a>0$,$x_1>0$,且$x_n=\dfrac{1}{2}\left(x_{n-1}+\dfrac{a}{x_{n-1}}\right)$,$n=2,3,\cdots$,证明极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证 $x_n>0, x_n=\frac{1}{2}(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}})\geqslant\sqrt{x_{n-1}\cdot\frac{a}{x_{n-1}}}=\sqrt{a}$，即数列$\{x_n\}$有下界

$$x_n-x_{n-1}=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}}\right)-x_{n-1}=\frac{a}{2x_{n-1}}-\frac{1}{2}x_{n-1}=\frac{1}{2x_{n-1}}(a-x_{n-1}^2)\leqslant 0,$$

即数列$\{x_n\}$是单调递减数列. 于是$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，对$x_n=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}}\right)$两边取极限，

得 $A=\frac{1}{2}(A+\frac{a}{A})$，解得$A=\sqrt{a}$，$A=-\sqrt{a}$（舍去）.

例26 设$x_1=1, x_{n+1}=2-\frac{1}{1+x_n}, n=1,2,\cdots$，证明数列$\{x_n\}$的极限存在，并求其极限.

证 $x_2=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}>x_1$，设$x_n>x_{n-1}$，则$x_{n+1}=2-\frac{1}{1+x_n}>2-\frac{1}{1+x_{n-1}}=x_n$.
按归纳法可知，对任何n，有$x_{n+1}>x_n$，即$\{x_n\}$为单调增加数列.

按归纳法容易证明$0<x_n<2$，故$\{x_n\}$有界. 因此$\{x_n\}$有极限. 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，对$x_n=2-\frac{1}{1+x_{n-1}}$两边取极限，得$A=2-\frac{1}{1+A}$.

解得 $A=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\left(\text{舍去}A=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$， 所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

⑨ 用夹逼定理求极限的方法

例27 证明$\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3$.

证 令$(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=x_n$，则$3=(3^n)^{\frac{1}{n}}\leqslant x_n\leqslant(3\times 3^n)^{\frac{1}{n}}=3\times 3^{\frac{1}{n}}$，且$\lim\limits_{n\to\infty}3\times 3^{\frac{1}{n}}=3\lim\limits_{n\to\infty}3^{\frac{1}{n}}=3$，
由夹逼定理，得

$$\lim_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3.$$

例28 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$.

解 令$x_n=\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}$.

则 $$\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n+n}=\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}\leqslant x_n\leqslant\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n+1}.$$

且 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)}=\frac{1}{2},\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}=\frac{1}{2},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$.

例29 $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\frac{2}{x}\right]$.

解 $\frac{2}{x}-1\leqslant\left[\frac{2}{x}\right]\leqslant\frac{2}{x}$，$x>0$时，$2-x\leqslant x\left[\frac{2}{x}\right]\leqslant 2$；$x<0$时，$2-x\geqslant x\left[\frac{2}{x}\right]\geqslant 2$.

且$\lim\limits_{x\to 0}(2-x)=2$，故$\lim\limits_{x\to 0}x[\frac{2}{x}]=2$.

2. 分段函数的极限

分段函数在分段点处的极限，要用左、右极限存在并且相等来求解.

例 30 $f(x)\begin{cases}(x-1)\sin\dfrac{1}{x-1}, & x>1,\\ x^2, & x<1,\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$.

解 $f(1^-)=\lim\limits_{x\to1^-}x^2=1$, $\left|\sin\dfrac{1}{x-1}\right|\leqslant1$, $f(1^+)=\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)\sin\dfrac{1}{x-1}=0$.
因为 $f(1^-)\neq f(1^+)$,所以 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 不存在.

例 31 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{x}{|x|}\right)$.

解 $x\to0^+$ 时,$\dfrac{1}{x}\to+\infty$,$e^{\frac{1}{x}}\to+\infty$,$e^{\frac{2}{x}}\to+\infty$,

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\dfrac{2}{e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}}}{\dfrac{1}{e^{\frac{2}{x}}}+1}+\frac{x}{x}\right)=0+1=1.$$

$x\to0^-$ 时,$\dfrac{1}{x}\to-\infty$,$e^{\frac{1}{x}}\to0$,$e^{\frac{2}{x}}\to0$,$\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{x}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}-\dfrac{x}{x}\right)=2-1=1$.

所以 $\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{x}{|x|}\right)=1$.

3. 极限的反问题

已知函数的极限,反过来求函数表达式中的参数,这类问题称为极限的反问题.

例 32 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$,求常数 a,b.

解 $\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b=\dfrac{(1-a)x^2-(a+b)x+(1-b)}{x+1}$,
由题设知 $1-a=0,a+b=0$,即 $a=1,b=-1$.

例 33 已知 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-x+a}{x-2}=3$,求 a.

解 由题设得 $x^2-x+a=(x-2)\varphi(x)$,令 $x=2$,得 $a=-2$.

例 34 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan ax}{x}, & x<0,\\ x+2, & x\geqslant0,\end{cases}$ 已知 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在,求 a.

解 $f(0^-)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\tan ax}{x}=a$,$f(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}(x+2)=2$.
因为 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在,所以 $f(0^-)=f(0^+)$,即有 $a=2$.

例 35 若 $\lim\limits_{x\to\pi}f(x)$ 存在,且 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x-\pi}+2\lim\limits_{x\to\pi}f(x)$,求 $f(x)$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to\pi}f(x)$ 存在,设 $\lim\limits_{x\to\pi}f(x)=A$,

则 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x-\pi}+2A$,对此式两边取极限,得

$$A=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}+2A,$$

从而 $A=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi-x}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin[\pi-(\pi-x)]}{\pi-x}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin(\pi-x)}{\pi-x}=1$,

所以 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x-\pi}+2$.