·高等学校辅导教材·

同济高等数学（五版）习题选解　是非题题解·综合题题解

新编高等数学题解

（下册）　（第四版）

王东升　周泰文　主　编

王东升　周泰文　刘后邗　俞　政　编

华中科技大学出版社

http://press.hust.edu.cn

高等学校辅导教材

新编高等数学题解

（第四版）

（下册）

同济高等数学（五版）习题选解

是非题题解·综合题题解

王东生　周泰文　主编

王东生　周泰文　刘后邗　俞　政　编

华中科技大学出版社

内容简介

本书是理工科学生学习高等数学、备考以及教师教学的参考书. 每章的“内容提要”系统简明,“习题选解”清晰典型,“是非题题解”引人深钻教材,“综合题题解”呈现考研水平.

本书分上、下两册出版. 下册内容有:多元函数微分法及其应用,重积分,曲线积分与曲面积分,无穷级数,微分方程.

第四版前言

本书以同济大学主编的《高等数学》(第五版)为蓝本,帮助学习高等数学的学生更好地掌握教材,以达到考研高中的水平.

本书自 1994 年出版第一版以来,共发行 30 多万册. 继 1996 年被全国大学出版社协会评为畅销书并授予荣誉奖以后,2000 年 12 月又被评为"全国优秀畅销书".

由于同济大学主编的《高等数学》教材已修订至第五版,因而本书再次做相应修订. 本版的特点是:

1. 原版结构基本不变;

2. 内容编排与同济大学主编的第五版教材一致;

3. 既辅导学生掌握教材,学会解答高等数学习题,又留给他们发挥才智、自我钻研的空间;

4. 反映了最新的考研动态和要求,收录近 5 年考研数学 1、2 的试题,并全部编入本书相应章节中.

这次改编仍由王东生、周泰文、刘后邗、俞政合作,按原来的分工完成.

编　者

2003 年 5 月

目　录

第八章　多元函数微分法及其应用

一、内容提要

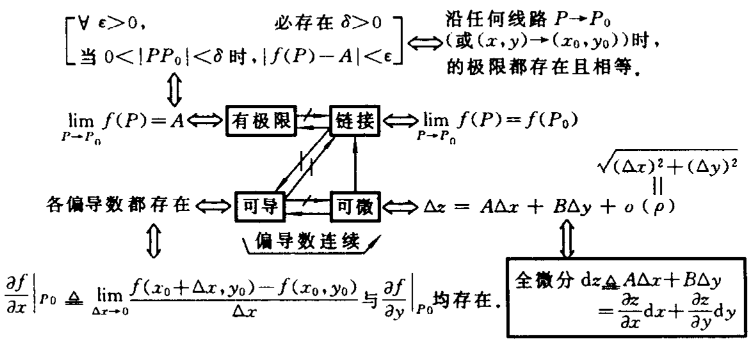
本章内容与一元函数微分法有很多类似之处，学习时应对比一元函数，搞清异同.

1. 基本概念和性质

设点函数 $U=f(P)$，点 P 可以是 $1,2,\cdots,n$ 维的. 当 $n\geqslant 2$ 时，称此函数为**多元函数**. 定义域 D 与对应法则 f 为其两要素.

(1)$z=f(x,y)$ 的图形 $M=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D,z=f(x,y)\}$ 是空中一张曲面.

(2)$f(P)$ 在点 P_0 处的**二重极限、连续、可导、可微**的定义及关联.



注意 1　$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{\substack{P沿某线\\ \to P_0}}f(x,y)$ 仅当前者存在时，方能相等.

注意 2　二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$ 与二次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}(\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y))$ 不同.

(3)多元函数中极限、连续、偏导数的运算法则、全微分形式的不变性、初等函数的连续性、最值定理、介值定理均有与一元函数类似或相应的性质.

(4)方向导数

$$\frac{\partial f}{\partial l}\triangleq\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\rho}\text{(是数量)}$$

[此处,动点$(x+\Delta x,y+\Delta y)$在起点为(x,y)的向量$\boldsymbol{l}$的方向上]

$$=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi\text{[}\varphi\text{是从 }x\text{ 轴正向到 }\boldsymbol{l}\text{ 方向的转角①]}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta\text{[}\alpha,\beta\text{ 为 }\boldsymbol{l}\text{ 的方向角 }\alpha=(\widehat{\boldsymbol{i},\boldsymbol{l}}),\beta=(\widehat{\boldsymbol{j},\boldsymbol{l}})\text{]}.$$

注意 $\frac{\partial f}{\partial l}$是单侧极限,$\rho\to 0$ 时,由于 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$,所以是 $\rho\to 0^+$,而$\frac{\partial f}{\partial x}$是双侧极限,$\Delta x\to 0$ 时,Δx 可正、可负.因此,$\alpha=0$ 时,$\frac{\partial f}{\partial l}$与$\frac{\partial f}{\partial x}$不一定相等;$\alpha=\frac{\pi}{2}$时,$\frac{\partial f}{\partial l}$与$\frac{\partial f}{\partial y}$也不一定相等.

(5)梯度 $\mathbf{grad}f(x,y)\triangleq\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$是向量.

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot(\cos\alpha,\cos\beta)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot\boldsymbol{l}^0$$

$$=\mathbf{grad}f(x,y)\cdot\boldsymbol{l}^0=|\mathbf{grad}f(x,y)|\cos(\widehat{\mathbf{grad}f(x,y),\boldsymbol{l}^0}).$$

由此可知:当$\boldsymbol{l}$的方向与梯度方向相同时,方向导数$\frac{\partial f}{\partial l}$达到最大值$|\mathbf{grad}f(x,y)|$.

2. 求导运算

(1) 复合函数求导

1° 若 $z=f\left\langle\begin{array}{l} u \\ v \\ x \end{array}\right.\begin{array}{l} x \\ y \\ \ \end{array}$,则$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}$.

2° 若 $z=f\left\langle\begin{array}{l} x \\ y \end{array}\right\rangle t$,则$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$.

---

① 按规定,$\begin{smallmatrix}\text{逆}\\\text{顺}\end{smallmatrix}$时针方向旋转生成的角是$\begin{smallmatrix}\text{正}\\\text{负}\end{smallmatrix}$角.转角与方向角可以相等,但不一定相等,转角可正可负,但方向角$\in[0,\pi]$.

注意　导数记号中“∂”与“d”的区别.

(2) 隐函数求导

1° 若 $F(x,y,z)=0$ 确定一个两元隐函数 $z=z(x,y)$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

2° 若 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$，确定两个一元隐函数 $y=y(x)$，$z=z(x)$，则不必显化，用复合函数求导及解方程组的方法即可求出 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 与 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

(3) 高阶偏导数，仿一元，按指定自变量逐阶求. 求混合偏导数时，一般与求导次序有关，但是当 f_{xy} 与 f_{yx} 均连续时，则有 $f_{xy}=f_{yx}$.

注意　当 $z=f(x,y)$ 时，f、f_x、f_{xy} 均为 x,y 的函数.

当 $z=$
$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & u \arrow[r, dash] \arrow[ddr, dash] & x \\ f \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & \\ & v \arrow[r, dash] \arrow[uur, dash] & y \end{tikzcd}$$
时，f、f_1、f_2、f_{12} 均为以 u,v 为中间变量 x,y 为自变量的复合函数.

3. 应用

(1)几何应用

1°　空间曲线 Γ：$x=x(t)$，$y=y(t)$，$z=z(t)$ 在其上对应 t_0 的点 (x_0,y_0,z_0) 处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)};$$

法平面方程为

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0.$$

对于面交式曲线 Γ，可将一自变量 x 看成参数，按上述方法求其切线及法平面方程；

2°　空间曲面 $F(x,y,z)=0$，在其上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{(F_x)_0}=\frac{y-y_0}{(F_y)_0}=\frac{z-z_0}{(F_z)_0}.$$

(此处，$(F_x)_0$ 表示偏导数 $F_x(x,y,z)$ 在 M_0 处的值).

切平面方程为

$$(F_x)_0(x-x_0)+(F_y)_0(y-y_0)+(F_z)_0(z-z_0)=0.$$

对于显函数 $z=f(x,y)$ 表示的曲面，可变为

$$F(x,y,z)=z-f(x,y)=0$$

来求其切线及法平面.

(2)极值应用

1° 求一个二元函数的极值.

利用必要条件求出各驻点,再用充分条件逐点检验.

2° 求一个多元函数的条件极值.

若目标函数为 $u=f(x,y,z)$;

条件方程为 $\varphi_1(x,y,z)=0$; $\varphi_2(x,y,z)=0$.

设 $F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=f(x,y,z)+\lambda_1\varphi_1(x,y,z)+\lambda_2\varphi_2(x,y,z)$,

解方程组 $\begin{cases} F_x=0, \\ F_y=0, \\ F_z=0, \\ F_{\lambda_1}=0, \\ F_{\lambda_2}=0, \end{cases}$ 求出 x,y,z.

则(x,y,z)就是可能的极值点. 再根据具体问题判定.

* (3)二元函数的泰勒公式和最小二乘法

二、习题选解

习题 8-1 多元函数的基本概念

8.1.2 已知函数 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan\dfrac{x}{y}$, 试求$f(tx,ty)$.

解 $$f(tx,ty)=(tx)^2+(ty)^2-tx\cdot ty\cdot\tan\frac{tx}{ty}$$
$$=t^2\left(x^2+y^2-xy\tan\frac{x}{y}\right)=t^2f(x,y).$$

8.1.4 已知函数 $f(u,v,w)=u^w+w^{u+v}$,试求$f(x+y,x-y,xy)$.

解 $$f(x+y,x-y,xy)=(x+y)^{xy}+(xy)^{(x+y)+(x-y)}$$
$$=(x+y)^{xy}+(xy)^{2x}.$$

8.1.5 求下列各函数的定义域：

分析 二元函数的定义域一般是平面区域，三元函数的定义域一般是空间区域. 这些点集可用使函数有定义的自变量所应满足的不等式或不等式组表示. 怎样去找用不等式或不等式组具体表示的这种区域呢？可用"试点法". 以 $\varphi(x,y)>0$ 或 $\varphi(x,y)<0$ 为例，先用曲线 $\varphi(x,y)=0$ 将平面分为两个区域，在一个区域内任取一点 (x_0,y_0) 代入 $\varphi(x,y)$，如果 $\varphi(x_0,y_0)$ 为正，则在此区域内恒有 $\varphi(x,y)>0$；如果 $\varphi(x_0,y_0)$ 为负，则在此区域内恒有 $\varphi(x,y)<0$（读者可用反证法证明）.

(3) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$.

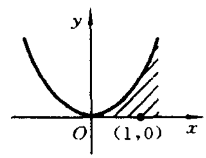


图 8-1

解 $y\geqslant 0$ 和 $x-\sqrt{y}\geqslant 0$，即 $x\geqslant\sqrt{y}$， $x^2\geqslant y$，得 $D=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,x^2\geqslant y\}$，如图 8-1 所示.

(6) $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 若 $x^2+y^2\neq 0$，即 x，y 不同时为零；且 $\left|\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant 1$，即 $z^2\leqslant x^2+y^2$，则

$$D=\{(x,y,z)\mid z^2\leqslant x^2+y^2,x^2+y^2\neq 0\}.$$

8.1.6 求下列各极限：

分析 求多元函数的极限可利用函数的连续性和一元函数求极限的一些方法.

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$.

解 用一元函数求极限的方法.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{4-(xy+4)}{xy(2+\sqrt{xy+4})}$$
$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-1}{2+\sqrt{xy+4}}=-\frac{1}{4}.$$

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\sin xy}{y}$.

解 用一元函数的重要极限.

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)}\frac{\sin xy}{y}=\lim_{(x,y)\to(2,0)}\frac{\sin xy}{xy}\cdot\lim_{x\to 2}x=1\cdot 2=2.$$

(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$.

解 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2\sin^2\frac{x^2+y^2}{2}}{\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2}\cdot\frac{x^2+y^2}{4x^2y^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)=+\infty.$$

8.1.7 证明下列极限不存在:

分析 因为二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$ 存在,是指 $P(x,y)$ 以任何方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时,函数都无限接近于某常数 A. 所以证明极限不存在,只要 P 以某一特殊方式趋于 P_0 时,函数不趋于某一确定值,或以两个不同方式趋于 P_0 时,函数趋于不同的值,便可断定函数的极限不存在.

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

证 如果动点 $P(x,y)$ 沿 $y=x$ 趋于 $(0,0)$,则

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x\to0}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^4}{x^4}=1;$$

如果动点 $P(x,y)$ 沿 $y=2x$ 趋于 $(0,0)$,则

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=2x\to0}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to0}\frac{4x^4}{4x^4+x^2}=0,$$

所以极限不存在.

8.1.9 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

证 因为 $x^2+y^2\geqslant2|xy|$,即 $|xy|\leqslant\dfrac{x^2+y^2}{2}$,所以

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant\frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}.$$

对于任意给定的 $\varepsilon>0$,取 $\delta=2\varepsilon$,当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时,就有

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|\leqslant\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}<\frac{\delta}{2}=\varepsilon.$$

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

8.1.10 设 $F(x,y)=f(x)$，$f(x)$ 在 x_0 处连续，证明：对任意 $y_0\in\mathbf{R}$，$F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

证 因为 $F(x,y)=f(x)$，$f(x)$ 在 x_0 处连续，所以对任意 $y_0\in\mathbf{R}$，有

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}F(x,y)=\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=F(x_0,y_0).$$

故 $F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

习题 8-2 偏 导 数

8.2.1 求下列函数的偏导数：

(4) $z=\sin(xy)+\cos^2(xy)$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\cos(xy)\cdot y+2\cos(xy)\cdot[-\sin(xy)]\cdot y$

$=y[\cos(xy)-\sin(2xy)]$.

根据对称性可知

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x[\cos(xy)-\sin(2xy)].$$

(6) $z=(1+xy)^y$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y(1+xy)^{y-1}\cdot y=y^2(1+xy)^{y-1}$；

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}e^{y\ln(1+xy)}=e^{y\ln(1+xy)}\left[\ln(1+xy)+y\cdot\dfrac{x}{1+xy}\right]$

$=(1+xy)^y\left[\ln(1+xy)+\dfrac{xy}{1+xy}\right]$.

(7) $u=x^{\frac{y}{z}}$,

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}$；

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^{\frac{y}{z}}\cdot\ln x\cdot\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x$；

$\dfrac{\partial u}{\partial z}=x^{\frac{y}{z}}\cdot\ln x\cdot\left(-\dfrac{y}{z^2}\right)=-\dfrac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x$.

(8) $u=\arctan(x-y)^z$.

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$；　$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{-z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$；

$\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{(x-y)^z\ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}$.

8.2.3 设 $z=\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$，求证 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=2x$.

证 $z=\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$， $\frac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}\cdot\frac{1}{x^2}$， $\frac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}\cdot\frac{1}{y^2}$，

所以
$$x^2\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=x^2\cdot\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}+y^2\cdot\frac{1}{y^2}\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$$
$$=2\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}=2z.$$

8.2.4 设 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$，求 $f_x(x,1)$.

解 $$f_x(x,y)=1+\frac{y-1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{y},$$
$$f_x(x,1)=1+0=1.$$

另解
$$f(x,1)=x, f_x(x,1)=1.$$

8.2.5 曲线 $\begin{cases}z=\frac{x^2+y^2}{4},\\ y=4\end{cases}$ 在点(2,4,5)处的切线与 x 轴正向所成的倾角是多少？

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{4}=\frac{x}{2}$， $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,4,5)}=1=\tan\alpha$，故 $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

8.2.6 求下列函数的 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$：

(2) $z=\arctan\frac{y}{x}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{-y}{x^2+y^2}$； $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$；

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-(x^2+y^2)+2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

(3) $z=y^x$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=y^x\ln y$， $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^x\ln^2 y$；

$\frac{\partial z}{\partial y}=xy^{x-1}$， $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x(x-1)y^{x-2}$；

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=xy^{x-1}\ln y+y^x\frac{1}{y}=y^{x-1}(x\ln y+1).$$

8.2.7 设 $f(x,y,z)=xy^2+yz^2+zx^2$. 求 $f_{xx}(0,0,1)$, $f_{xz}(1,0,2)$, $f_{yz}(0,-1,0)$及 $f_{zzx}(2,0,1)$.

解 $f_x=y^2+2zx$, $f_{xx}=2z$, $f_{xx}(0,0,1)=2z|_{(0,0,1)}=2$;

$f_{xz}=2x$, $f_{xz}(1,0,2)=2x|_{(1,0,2)}=2$;

$f_y=2xy+z^2$, $f_{yz}=2z$, $f_{yz}=(0,-1,0)=0$;

$f_z=2yz+x^2$, $f_{zz}=2y$, $f_{zzx}=0$, $f_{zzx}=(2,0,1)=0$.

另解. 求 $f_{xx}(x,y,z)$时，总是将 y,z 看作常量. 而 $f_{xx}(0,0,1)$中，$y=0$, $z=1$，由 $f(x,y,z)$得 $f(x,0,1)=x^2$.

所以，$f_x(x,0,1)=2x$, $f_{xx}(x,0,1)=2$. 故 $f_{xx}(0,0,1)=2$.

仿此，可求 $f_{xz}(1,0,2)$、$f_{yz}(0,-1,0)$、$f_{zzx}(2,0,1)$的值，读者试算之.

8.2.8 设 $z=x\ln(xy)$，求$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$及$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\ln(xy)+x\cdot\dfrac{y}{xy}=\ln(xy)+1$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y}{xy}=\frac{1}{x},\qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=0;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{x}{xy}=\frac{1}{y},\qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=-\frac{1}{y^2}.$$

8.2.9 验证：

(2) $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$满足$\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\dfrac{2}{r}$.

证 $\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\dfrac{x}{r}$,

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{r-x\dfrac{\partial r}{\partial x}}{r^2}=\frac{r-x\cdot\dfrac{x}{r}}{r^2}=\frac{r^2-x^2}{r^3};$$

由于函数关于自变量的对称性，所以

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\frac{r^2-y^2}{r^3};\qquad \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{r^2-z^2}{r^3}.$$

因此
$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{r^2-x^2}{r^3}+\frac{r^2-y^2}{r^3}+\frac{r^2-z^2}{r^3}=\frac{3r^2-x^2-y^2-z^2}{r^3}=\frac{2}{r}.$$

注意 如果一函数表达式中任意两个自变量对调后仍是原来的函数，我们称此函数关于自变量对称，在计算中利用此对称性可简化运算.

习题 8-3　全微分及其应用

8.3.1　求下列函数的全微分：

(3)　$z=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解　因为　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{-y}{x^2+y^2}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$；

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-y\cdot\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

所以

$$\mathrm{d}z=\frac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}\mathrm{d}x+\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y).$$

(4)　$u=x^{yz}$.

解　因为　$\dfrac{\partial u}{\partial x}=yz\cdot x^{yz-1}$；$\dfrac{\partial u}{\partial y}=zx^{yz}\ln x$；$\dfrac{\partial u}{\partial z}=yx^{yz}\ln x$，所以

$$\mathrm{d}u=yzx^{yz-1}\mathrm{d}x+zx^{yz}\ln x\mathrm{d}y+yx^{yz}\ln x\mathrm{d}z.$$

8.3.3　求函数 $z=\dfrac{y}{x}$ 当 $x=2,y=1,\Delta x=0.1,\Delta y=-0.2$ 时的全增量和全微分.

解　因为　$\Delta z=\dfrac{y+\Delta y}{x+\Delta x}-\dfrac{y}{x}$；$\mathrm{d}z=-\dfrac{y}{x^2}\Delta x+\dfrac{1}{x}\Delta y$，所以

当 $x=2$，　$y=1$，　$\Delta x=0.1$，　$\Delta y=-0.2$ 时，

$$\Delta z=\frac{1+(-0.2)}{2+0.1}-\frac{1}{2}=-0.119,$$

$$\mathrm{d}z=-\frac{1}{4}\cdot 0.1+\frac{1}{2}\cdot(-0.2)=-0.125.$$

***8.3.5**　计算 $\sqrt{(1.02)^3+(1.97)^3}$ 的近似值.

解　设 $f(x,y)=\sqrt{x^3+y^3}$，则

$$\mathrm{d}f(x,y)=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}\Delta x+\frac{3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}\Delta y,$$

当 $x=1$，　$y=2$，　$\Delta x=0.02$，　$\Delta y=-0.03$ 时，