中国教育电视台主讲教师任学科主编

总主编 张盛如

图文普及版

学科主编 乔家瑞

考点 精解精练大全

高中数学

最新修订版

购书可获“读者奖”及“1+2推荐购书奖”

详情参见书内可裁切彩页

70%精解+30%精练=轻松夺冠

练习有方向 复习有重点

所有考点逐一列出，每个考点精细讲解

北京出版社出版集团
BEIJING PUBLISHING HOUSE (GROUP)
北京教育出版社
BEIJING EDUCATION PUBLISHING HOUSE

图书在版编目(CIP)数据
高中数学考点精解精练大全:普及版/张盛如主编. -北京:北京教育出版社,2004
ISBN 7-5303-3927-3
Ⅰ.高… Ⅱ.张… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634.603
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 095648 号

出版人:李利军 黄颖
策划:刘毅然 路丽梅
封面设计:薄晓波 牛志强 / 封面绘图:姜南 / 内文绘图:路春梅 姜南 / 制作:王志梅
责任编辑:鲁婧 / 编辑统筹:何丽 / 制作统筹:徐成芳
印务统筹:柴晓勇 刘敬然

考点精解精练大全·高中数学

KAODIANJINGJIEJINGLIANDAQUAN·GAOZHONGSHUXUE

张盛如 总主编

*

北京教育出版社出版
100011 北京北三环中路 6 号
网址:www.bph.com.cn
北京出版社出版集团总发行
新华书店经销
北京四季青印刷厂印刷

*

889×1194 16 开本 17.75 印张 472 320 字
2005 年 7 月第 1 次修订 2005 年 7 月第 1 次印刷
印数 1-20 000
ISBN 7-5303-3927-3 / G·3857
定价:19.80 元

北京教育出版社 / 北京路丽梅图书编辑中心倾情奉献

前言

总主编 张盛如

为什么要编写《中、高考考点精解精练大全》这套书呢?

我们不妨从考点说起。

什么是考点?考点就是考纲规定测试的知识能力要求的切入点。这是一个抽象的概念。具体体现考点知识能力要求的是各种类型的"题"。因为"题"是知识能力要求的一种具体表达方式,是知识能力的载体。所以通过"题"来诠释考点,是最恰当不过的。而考生通过解题,来把握考点,提高运用知识解决问题的能力,也是获取优异成绩的关键之所在。正因如此,受北京教育出版社和北京路丽梅图书编辑中心之约,我们特邀全国著名特级教师、中国教育台高考各科主讲人为学科主编,编写了这套《中、高考考点精解精练大全》供全国考生参加 2006 年中、高考复习使用。

为了通过考点精解、精练帮助考生取得优异的成绩,考上自己理想的学校,在丛书编写中,我们特别注意解决了以下问题。

一、选材"精"

本书所选之题,均系近五年(含 2005 年)中、高考经典试题。这些题都是由全国或各省、市专家命题组根据中学各科教学大纲、课程标准和中考考纲、高考考试说明规定的考试范围和知识能力要求精心编制的。它是专家集体智慧的结晶,也是考改成果的体现,而这些入选的题所涉及的内容,基本上做到了横有跨度,纵有深度,具有"全、新、深"的特点,并由相应考点构成一个良性的知识能力网络,而覆盖全部考试内容。所以,用这些题来对考点进行解析,复习起点高,针对性强,全面深入、有预测性。

二、解析"精"

本丛书采取试题分类解析法。全书以各考点为中心,分别集结近年该考点所涉各类试题,用比较法对试题进行讲解。重点帮助考生分析这类试题的命题思路、解题方法、技巧和运用知识解题的规律等,以培养和提高考生的发散思维和创新思维能力。这种以考点为单元或者为小专题的解析方法,对教师来说,可从一点展开,对该考点所涉题群隐含的问题进行全方位、多层次、多角度的深层分析和进行科学的总结、归纳。对学生来说,一是难点分散,便于各个突破;二是比较复习,便于把握知识的内在联系与区别;三是由分解到综合地复习,便于掌握运用知识解决问题的规律。由此可见,对考点进行"精解"的复习法,由于始终围绕考点的知识能力要求这个中心做文章,所以能使考生的复习深入而到位,精练而高效。

三、练习"精"

为巩固考生已学知识及运用知识解决问题的能力,本丛书以中学各科教学大纲、课程标准及中考考纲、高考考试说明对各科考试科目规定的考测知识能力要求为准绳,以近年全国高考和各省市中考的试题为蓝本,并汲取全国各省市会考题、模拟考试题、各类竞赛题的精华,按各科考点,逐一精心编选了同层级的单一性和综合性能力训练题,供考生对应考点复习使用。由于这些题完全受考点知识能力的规范,所以在知识范围和能力要求上以及题型难易度上,都与试题完全一致,而且在命题思路与角度上"求新""求变",具有预测功能。这样,便可使考生在"精解"的基础上,进行"举一反三"的能力训练,并把"精练"作为教师"精解"的自然延伸和补充,从根本上提高考生的应试能力。

由此可见,《中、高考考点精解精练大全》的确是一套以经典试题为蓝本,融解析和同步能力训练为一体的复习备考指导丛书,是参加全国中、高考考生复习考试攻坚的锐利武器。

我们深信,在名师的指点下,考生如能坚持在全面复习的基础上学好、用好这套丛书,就一定会迈着轻松的步伐跨进理想学校的大门。

2005年 7 月于北京

修订说明

张盛如

《考点精解精练大全》自去年出版以来，深受广大读者关注。

为更好地为考生服务，根据市场反馈的信息和2005年中、高考试题的变化，以及我们对2006年中、高考情势的预测，作了如下修订：

一、以课标和考纲的知识能力要求，对全书所列考点涵盖的知识能力，进行了逐一的审核，并用2005年全国中、高考试题中最能体现课标、考纲能力要求的新题，更换了原书中一些不甚典型或过时的试题及同步能力训练题。在文科学科的修订中，注意选用强化认识、理解、分析、综合能力，特别是联系历史和现实社会生活实际的"材料题""情景题""条件题"等开放性试题和训练题，以加强对考生"自主、合作、探究"学习能力的培养和测试。在理科学科修订中，既注意加大选用基础知识新题的力度，也注意选用增强实际能力的应用性试题。特别对2005年中、高考试卷出现的那些"信息给予题""探究体验题""调查研究题""实验印证题"，以及理论联系实际的综合题，都尽数囊括其中并加以解析说明。

二、根据考纲的变化，对书中内容作了相应的删改、增补。例如在《中考考点精解精练大全》(数学)中，就按新课标教材增写了"视图与投影""图形变幻""图形与坐标""概率"等内容的测试题与训练题。在《高考考点精解精练大全》(文科综合)的历史部分，就按新考纲增写了："先秦"部分的试题和训练题。凡此种种，只要不符现行课标教学内容和考纲要求的，不管是多是少，我们都遵本按纲地作了修订。

三、根据题型变化，对相应学科的相应试题和训练题，进行了改写。例如，在2005年语文的高考试题中有的题发生了结构性的变化，尽管作者已经成稿，但还是舍弃原稿重新选编试题和训练题以与考试同步。又如在2005年各地中考试题都加大主观试题力度的情况下，还普遍新设了各类开放性的试题。据此，我们对《中考考点精解精练大全》(语文)的这些变化也作了相应的调整和改写。

修订的目的是使我们的书能适应教改、考改的需要，能完美地体现课标和考纲的知识能力要求，能更准确地诠释考点并通过同步训练帮助考生把握考点以取得考试成功。但是，由于时间过于仓促，水平所限，我们不可能把一切都做得尽善尽美，不到之处，还望战斗在一线的老师们用你们的经验、智慧为我们"补牢"。

让我们共同为帮助考生实现他们美丽的"梦"而努力吧！

总主编　张盛如

2005年7月于北京阳照

目录

第1章 集合与简易逻辑 1

考点 1 集合运算 1

考点 2 用已知集合的交、并、补集表示韦恩图中的指定集合 2

考点 3 集合的交集和并集的元素个数的求法 3

考点 4 用分类讨论思想解不等式 3

考点 5 含参数的不等式的解法 4

考点 6 列不等式解应用题 5

考点 7 四种命题 6

考点 8 充分条件与必要条件 8

参考答案 9

第2章 函数 12

考点 1 映射 12

考点 2 函数概念 13

考点 3 函数值域的求法 14

考点 4 函数的性质 17

考点 5 反函数 19

考点 6 指数函数 21

考点 7 对数函数 23

考点 8 分段函数 25

考点 9 函数方程的解法 27

考点 10 抽象函数 28

考点 11 与函数有关的探索题 29

考点 12 构造函数法 30

参考答案 31

第3章 数列 36

考点 1 数列的有关概念 36

考点 2 证明一个数列是等差数列的常用方法 38

考点 3 等差数列的计算与证明 39

考点 4 用函数方程思想求解数列问题 42

考点 5 用整体变形思想求解等差数列问题 43

考点 6 证明一个数列是等比数列的常用方法 44

考点 7 等比数列的计算与证明 45

考点 8 等比数列前n项和公式的变形使用 47

考点 9 等差数列和等比数列的混合计算题 48

考点 10 有关数列的探索题 50

考点 11 数列求和的常用方法 52

考点 12 递推数列通项公式的求法 54

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

参考答案 55
第4章 三角函数 62
考点1 同角三角函数间的关系 62
考点2 诱导公式 63
考点3 三角函数的求值 64
考点4 利用和差角减少不同角的变形策略 67
考点5 三角函数的图像变换 68
考点6 三角函数性质的讨论 71
考点7 三角函数最值的求法 73
参考答案 75
第5章 平面向量 80
考点1 平面向量的基本概念及运算 80
考点2 向量的坐标形式及其线性运算 82
考点3 向量的数量积及其运算法则 83
考点4 平移 85
考点5 平面向量的应用 87
考点6 解斜三角形的应用 89
考点7 与解三角形有关的综合题 91
参考答案 93
第6章 不等式 97
考点1 不等式的性质 97
考点2 用均值不等式求最值的技巧 98
考点3 不等式的证明方法 101
考点4 比较式子大小的常用方法 105
考点5 解含参数的不等式 106
考点6 求恒成立的不等式中的参数范围 107
考点7 含有绝对值的不等式 108
考点8 构建不等式解应用题 110
参考答案 111
第7章 直线和圆的方程 116
考点1 直线的倾斜角和斜率 116
考点2 直线过定点的计算与证明 117
考点3 与直线有关的分类讨论 118
考点4 两条直线的位置关系 119
考点5 对称问题 122
考点6 与直线有关的最值问题 123
考点7 “直线”中的一题多解题 125
考点8 简单的线性规划 126

考点 9 曲线和方程 129
考点 10 圆的方程 130
参考答案 133
第8章 圆锥曲线方程 138
考点 1 椭圆 138
考点 2 双曲线 141
考点 3 抛物线 144
考点 4 圆锥曲线中的最值问题 148
考点 5 轨迹方程的求法 150
考点 6 求圆锥曲线中几何量的取值范围 151
考点 7 与圆锥曲线有关的存在性问题 153
考点 8 用平面向量解答圆锥曲线有关问题 155
参考答案 159
第9章 直线、平面、简单几何体 168
考点 1 平面、空间直线 168
考点 2 直线与平面的平行、垂直 169
考点 3 平面与平面的平行、垂直 171
考点 4 异面直线所成的角 173
考点 5 直线和平面所成的角 174
考点 6 二面角 175
考点 7 棱柱和棱锥 178
考点 8 多面体和正多面体 180
考点 9 有关空间图形的选择题的特殊解法 181
考点 10 三棱锥体积的计算方法 183
考点 11 立体图形中的三角函数关系式 185
考点 12 平面图形的翻折 186
考点 13 空间图形中的最值 188
考点 14 球 190
考点 15 用空间向量求解立体图形问题 191
考点 16 空间图形中的综合问题 194
参考答案 197
第10章 排列、组合和概率 204
考点 1 两个基本原理 204
考点 2 排列与组合 204
考点 3 解排列、组合应用题的常用技巧 206
考点 4 排列、组合综合应用题 208
考点 5 排列、组合计算公式及性质的应用 209
考点 6 二项式定理的应用 210

考点7 随机事件的概率和互斥事件有一个发生的概率 214
考点8 相互独立事件同时发生的概率 216
参考答案 217
第11章 概率与统计 219
考点1 离散型随机变量的分布列 219
考点2 离散型随机变量的期望与方差 220
考点3 抽样方法与总体分布的估计 225
考点4 正态分布与线性回归 227
参考答案 229
第12章 极限 231
考点1 用数学归纳法证明恒等式及整除问题 231
考点2 用数学归纳法证明不等式 232
考点3 用数学归纳法证明探索性问题 233
考点4 数列的极限及其运算法则 235
考点5 无穷等比数列$\{a_n\}$($|q|<1$)各项的和 237
考点6 函数的极限及其运算法则 238
考点7 函数的连续性 239
考点8 与数学归纳法、极限有关的综合题 241
参考答案 243
第13章 导数与微分 247
考点1 导数的概念 247
考点2 导数的几何意义和物理意义 248
考点3 常用的导数公式及导数的四则运算 248
考点4 复合函数的导数 250
考点5 函数的微分 251
考点6 求曲线的切线方程 251
考点7 判定函数的单调性 252
考点8 求函数的极值与最值 254
考点9 导数的其他应用 256
参考答案 258
第14章 复数 262
考点1 复数的有关概念 262
考点2 复数的代数形式的四则运算 264
考点3 复数的三角形式及其运算 268
考点4 与复数有关的综合题 272
参考答案 274

第1章 集合与简易逻辑

考点1 集合运算

题型精解

1 设全集$S=\{-2,-1,0,1,2\}$，集合$M=\{-2,-1,0\}$，$N=\{-1,1,2\}$，求$\complement_S M\cap\complement_S N$.

解法1 $\because$ 全集$S=\{-2,-1,0,1,2\}$，$M=\{-2,-1,0\}$，$N=\{-1,1,2\}$，

$\therefore \complement_S M=\{1,2\}$，$\complement_S N=\{-2,0\}$.

因此$\complement_S M\cap\complement_S N=\varnothing$.

解法2 用韦恩图求解.

画出韦恩图，如图1-1-1

$\complement_S M\cap\complement_S N=\varnothing$.

	N	$\complement_S N$
M	-1	$-2,0$
$\complement_S M$	$1,2$	$\varnothing$

图 1-1-1

解法3 $\because S=\{-2,-1,0,1,2\}$，$M=\{-2,-1,0\}$，$N=\{-1,1,2\}$，

$\therefore M\cup N=\{-2,-1,0,1,2\}$.

$\therefore \complement_S M\cap\complement_S N=\complement_S(M\cup N)=\varnothing$.

2 已知$P=\{1,a,b\}$，$Q=\{a,a^2,ab\}$，且$P=Q$，求实数a,b.

解法1 由集合元素的互异性知：$a\neq b$，$a\neq 1$，$b\neq 1$.

$\because P=Q$，

$\therefore a^2=1$或$ab=1$.

①$a^2=1$时，取$a=-1$.

此时$P=\{1,-1,b\}$，$Q=\{-1,1,-b\}$，

由$P=Q$，有$b=-b$.从而$b=0$.

②$ab=1$时，即$a=\frac{1}{b}$.

此时$P=\left\{1,\frac{1}{b},b\right\}$，$Q=\left\{\frac{1}{b},\frac{1}{b^2},1\right\}$.

由$P=Q$，有$b=\frac{1}{b^2}$，即$b^3=1$.

$\therefore b=1$.

但$b\neq 1$，应舍去.

综上知$a=-1$，$b=0$.

解法2 $\because P=Q$，

$\therefore \begin{cases}1+a+b=a+a^2+ab,\\ 1\cdot a\cdot b=a\cdot a^2\cdot ab,\end{cases}$

即$\begin{cases}(a-1)(a+b+1)=0,\\ ab(a^3-1)=0.\end{cases}$

由集合元素的互异性，有$a\neq 1$，$a\neq 0$.

$\therefore \begin{cases}a+b+1=0,\\ b=0.\end{cases}$

因此 $a=-1$，$b=0$.

3 集合M,N的并集$M\cup N=\{a,b,c\}$，当$M\neq N$时，(M,N)与(N,M)视为不同的对，则这样的(M,N)有多少对？

解法1 如图1-1-2，作出$M\cup N$，可知$M\cup N$中最多共有三个互不相交的区域，从而a,b,c中的每一个元素填入$M\cup N$中都有3种不同的放法.

因此所求的(M,N)对的个数为$3^3=27$.

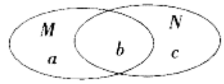


图 1-1-2

解法2 对M进行分类.

①$M=\varnothing$时，$N=\{a,b,c\}$，

此时(M,N)只有一对.

②$M=\{a\}$时，$N=\{b,c\}$或$N=\{a,b,c\}$两对.

$M=\{b\}$或$M=\{c\}$时也应分别有两对.

③$M=\{a,b\}$时，$N=\{c\}$，或$\{a,c\}$或$\{b,c\}$或$\{a,b,c\}$，此时(M,N)有四对.

$M=\{a,c\}$，$N=\{b,c\}$情况一样.

④$M=\{a,b,c\}$时，N有8种，

所以，共有$1+2\times3+4\times3+8=27$.

4 已知$A=\{x|x^2+2(p+1)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$，且$A\cap\mathbf{R}_+=\varnothing$，求实数$p$的取值范围.

解法1 $\because A\cap\mathbf{R}_+=\varnothing$，

$\therefore$ 关于x的方程$x^2+2(p+1)x+1=0$没有正数根，即该方程只有非正根或没有实数根.

$\because$ 方程的两根之积为1.

$\therefore$ 如果方程有两个根，则必须同号.

$\therefore$ 方程有两个负根.

因此$\begin{cases}\Delta=4(p+1)^2-4\geqslant 0,\\ p+1>0.\end{cases}$

解之，得$p\geqslant 0$.

又当方程没有实数根时，$\Delta=4(p+1)^2-4<0$，

$\therefore -2<p<0$.

综上，若$A\cap\mathbf{R}_+=\varnothing$，则$p>-2$.

解法2 $\because$ 方程$x^2+2(p+1)x+1=0$没有零根，且有实根时，则两根必同号.

如果方程有两个正根，

则$\begin{cases}4(p+1)^2-4\geqslant 0,\\ p+1<0.\end{cases}$

解之，得$p\leqslant -2$.

因此方程没有正根时，$p>-2$.

解评 解法1是对方程的根的情况进行讨论，得出$p\geqslant 0$及$-2<p<0$，从而归纳出结论$p>-2$.解法2则是使用补集思想求解.

练习题1

一、选择题

◉**1.** 设P是任意一个集合，给出下列关系式：

①$\varnothing\subsetneqq P$；②$\varnothing\subseteq P$；③$\varnothing\in P$；④$\varnothing=\{0\}$.

其中错误的有(　　)

A.1个　**B.**2个　**C.**3个　**D.**4个

◉**2.** 满足$\{a_1,a_2\}\subseteq M\subsetneqq\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$的集合$M$有(　　)

A.4个　**B.**3个　**C.**2个　**D.**1个

●3. 设全集$S=\{x_1,x_2,x_3\}$,集合$A=\{x_1,x_2\}$,集合$B=\{x_2,x_3\}$,则$\complement_S(A\cap B)=$( )

A.$\{x_2\}$ B.$\{x_2,x_3\}$ C.$\{x_1,x_3\}$ D.$\{x_1,x_2\}$

●4. 设全集$I=\{a,b,c,d,e\}$,$P=\{a,c,d\}$,$Q=\{b,d,e\}$,则$(\complement_I P)\cap(\complement_I Q)$等于( )

A.$\varnothing$ B.$\{d\}$ C.$\{a,c\}$ D.$\{b,e\}$

●5. 已知全集$U=\mathbf{N}$,集合$P=\{x\mid x=2n,n\in\mathbf{N}\}$,$Q=\{x\mid x=4n,n\in\mathbf{N}\}$,则( )

A.$U=P\cup Q$ B.$U=P\cup\complement_U Q$

C.$U=Q\cup\complement_U P$ D.$U=(\complement_U P)\cup(\complement_U Q)$

●6. 设P,Q是全集S的两个子集,且$P\subsetneqq Q$,则下式中恒成立的是( )

A.$\complement_S P\subsetneqq\complement_S Q$ B.$\complement_S Q\subsetneqq\complement_S P$

C.$\complement_S P\subseteq\complement_S Q$ D.$\complement_S Q\subseteq\complement_S P$

二、填空题

●7. 已知$x\in\{1,2,x^2\}$,则x的值等于________.

●8. 满足条件$\{a,b\}\cup A=\{a,b,c\}$的所有集合A的个数是________.

●9. 设集合$A=\{2,6,t+1\}$,$B=\{2,t^2+4t+1\}$,如果$A\supsetneqq B$,则实数t的值等于________.

●10. 已知集合$M=\{(x,y)\mid x+y=2\}$,$N=\{(x,y)\mid x^2-y^2=4\}$,则$M\cap N=$________.

●11. 设集合$A=\{y\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{y\mid y=x+1,x\in\mathbf{R}\}$,则$A\cap B=$________.

●12. 已知$\alpha=\{x\mid x^2-px+q=0\}$,$\beta=\{x\mid x^2-kx+15=0\}$,且$\alpha\cap\beta=\{3\}$,$\alpha\cup\beta=\{2,3,5\}$,则$p=$________,$q=$________,$k=$________.

三、解答题

●13. 已知集合$P=\{1,t+2\}$,$Q=\{1,3,-t^3\}$,是否存在实数t使得$P\cup(\complement_S P)=Q$(S是全集)?若存在,求出集合P,Q;若不存在,请说明理由.

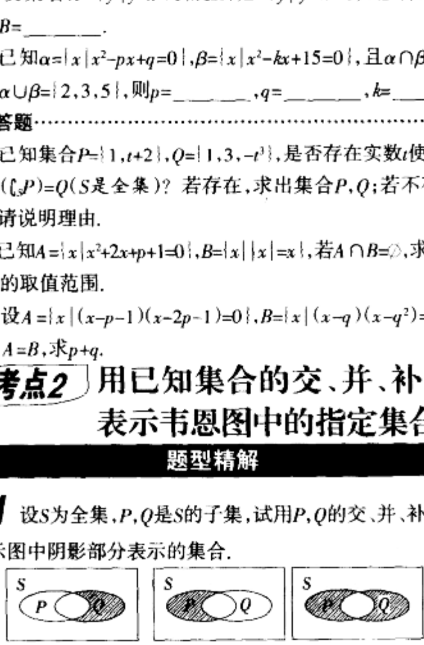
●14. 已知$A=\{x\mid x^2+2x+p+1=0\}$,$B=\{x\mid |x|=x\}$,若$A\cap B=\varnothing$,求实数p的取值范围.

●15. 设$A=\{x\mid(x-p-1)(x-2p-1)=0\}$,$B=\{x\mid(x-q)(x-q^2)=0\}$,若$A=B$,求$p+q$.

考点2 用已知集合的交、并、补集表示韦恩图中的指定集合

题型精解

1 设S为全集,P,Q是S的子集,试用P,Q的交、并、补集符号表示图中阴影部分表示的集合.



(1) (2) (3)

图 1-2-1

分析:应该把阴影部分看作是两个集合的重叠部分,即为两个集合的交集,不相连的两个阴影部分应该看作是两个集合的并集.

阴影部分在某一已知集合内,应该用该集合表示;阴影部分在某一已知集合外,应该用该集合的补集表示.

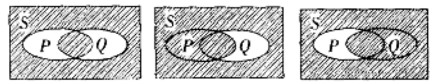
解:①图(1)阴影部分在集合P外,应该用$\complement_S P$表示,又在集合Q内,应该用Q表示.

$\therefore$阴影部分表示的集合为$Q\cap\complement_S P$.

②根据对称性知,图(2)中阴影部分表示的集合为$P\cap\complement_S Q$.

③图(3)中有两块阴影,应该用并集表示成$(Q\cap\complement_S P)\cup(P\cap\complement_S Q)$.

2 设S为全集,P,Q是S的子集,试用P,Q的交、并、补集的符号表示图中的阴影部分表示的集合.



(1) (2) (3)

图 1-2-2

分析:应和题1比较,找到它们之间的联系.

解:(1)$(P\cap Q)\cup[\complement_S(P\cup Q)]$,

或表示成$(P\cap Q)\cup(\complement_S P\cap\complement_S Q)$.

(2)$P\cup\complement_S Q$,

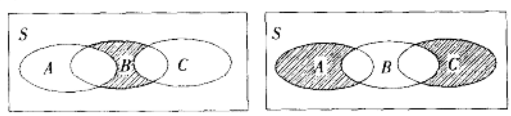
或表示成$\complement_S(Q\cap\complement_S P)$.

(3)$Q\cup\complement_S P$,

或表示成$\complement_S(P\cap\complement_S Q)$.

解评 题1和题2是全集S有两个子集的情况,应能够熟练地表示.

3 设S为全集,A,B,C是S的子集,试用A,B,C的交、并、补集符号表示图中阴影部分表示的集合.



(1) (2)

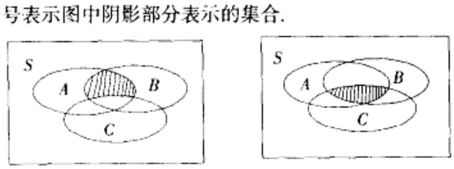
图 1-2-3

解:①在图(1)中,阴影部分在B内,且在A,C外,所以应该用$\complement_S A,B,\complement_S C$表示成$B\cap\complement_S(A\cup C)$.

②在图(2)中,阴影部分在A,C内,且在B外,所以应该用$A,\complement_S B,C$表示成$(A\cup C)\cap(\complement_S B)$.

解评 本题中全集S有三个子集,且B与A,C的交集是非空集合,而A,C的交集是空集.

4 设S为全集,A,B,C是S的子集,试用A,B,C的交、并、补集符号表示图中阴影部分表示的集合.



(1) (2)

图 1-2-4

解:①在图(1)中,阴影部分在A,B内且在C外,所以应该用$A,B,\complement_S C$表示成$(A\cap B)\cap\complement_S C$.

②在图(2)中,阴影部分在A,B,C内,所以应该用A,B,C表示成$A\cap B\cap C$.

解　评 本题中全集S的三个子集两两相交，且交集是非空集合.此时情况多种多样,应遵循上面提供的思路求解.

练习题2

一、选择题

1. 设I是全集,集合P,Q满足$P\subsetneqq Q$,给出图形及下面的结论

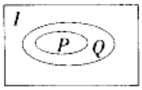
①$P\cup \complement_I P=I$;　　②$Q\cup \complement_I P=I$;

③$P\cap \complement_I Q=\varnothing$;　　④$\complement_I P\cap \complement_I Q=P$,

其中正确的结论有(　　)

A.4个　　**B.**3个

C.2个　　**D.**1个

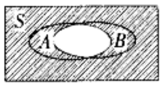


第1题图

2. 如图,则阴影部分用集合表示应为(　　)

A.$A\cup B$　　**B.**$\complement_S(A\cup B)$

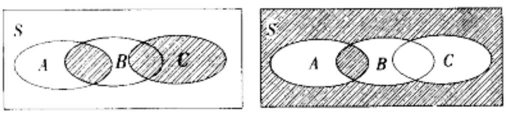
C.$A\cap B$　　**D.**$\complement_S(A\cap B)$



第2题图

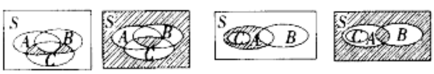
二、解答题

3. 设S为全集,A,B,C都是它的子集,试用A,B,C的交、并、补集符号表示图中阴影部分表示的集合.



第3题图

4. 设S为全集,A,B,C都是它的子集,试用A,B,C的交、并、补集符号表示图中阴影部分表示的集合.



第4题图

考点3 集合的交集和并集的元素个数的求法

题型精解

一个集合的元素个数是这个集合的基本属性.我们知道

空集$\varnothing$的元素个数是0;

集合$\{a\}$的元素个数是1;

集合$\{a,b\}$的元素个数是2;

集合$\{a,b,c\}$的元素个数是3.

总之,非空有限集合A的元素个数是一个正整数,我们用符号card(A)表示集合A的元素个数.

要计算集合的交集的元素个数,可以使用下面的关系式

$$\text{card}(A\cap B)=\text{card}(A)+\text{card}(B)-\text{card}(A\cup B).$$

要计算集合的并集的元素个数,可以使用下面的关系式

$$\text{card}(A\cup B)=\text{card}(A)+\text{card}(B)-\text{card}(A\cap B).$$

1 某校参加高考的学生中成绩达到120分的：语文50人,数学90人.语文、数学都达到120分的有35人,两科都没有达到120分的有100人.求该校参加高考的人数.

解: 设该校参加高考的人数为全集I,语文、数学达到120分的人数分别为A,B,则

$$\begin{aligned}\text{card}(I)&=\text{card}(A\cup B)+\text{card}[\complement_I(A\cup B)]\\&=\text{card}(A)+\text{card}(B)-\text{card}(A\cap B)+\text{card}[\complement_I(A\cup B)]\\&=50+90-35+100\\&=205(\text{人}).\end{aligned}$$

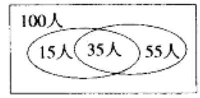


图1-3-1

解　评 可以使用图1-3-1加以印证.

2 某班全体学生去图书馆借书，借文艺书的占全班人数的76%,借科技书的占全班人数的45%.求既借文艺书又借科技书的学生占全班人数的百分之几?

解: 设借文艺书和科技书的人数分别为集合A,B,则

$$\frac{\text{card}(A)}{\text{card}(I)}=76\%,\ \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(I)}=45\%,\ \frac{\text{card}(A\cup B)}{\text{card}(I)}=100\%.$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{\text{card}(A\cap B)}{\text{card}(I)}&=\frac{1}{\text{card}(I)}[\text{card}(A)+\text{card}(B)-\text{card}(A\cup B)]\\&=76\%+45\%-100\%\\&=21\%.\end{aligned}$$

答:既借文艺书又借科技书的学生占全班人数的21%.

练习题3

1. 50名学生参加跳远和铅球两项体育测试,两项及格的人数分别为40人和31人,两项都不及格的有4人,则两项测试都及格的人数是多少?

2. 某班考试中,语文、数学成绩优秀的学生分别为30人、28人,语文、数学至少有一科优秀的学生为38人,求语文、数学成绩都优秀的学生人数.

3. 在学校举行的文艺演出中,某班共有28人参加表演,有15人参加小合唱,有8人参加跳舞,有14人参加表演唱,同时参加小合唱和跳舞的有3人,同时参加小合唱和表演唱的有3人,没有人同时参加三项表演.求同时参加跳舞和表演唱的有多少人? 只参加小合唱的有多少人?

4. 某年级先后举行数理化三科竞赛,学生中至少参加一科的：数学有203人,物理有179人,化学有165人；参加两科的：数学、物理有143人,数学、化学有116人,物理、化学有97人.已知参加竞赛的学生总人数为280人,求三科竞赛都参加的学生人数.

考点4 用分类讨论思想解不等式

题型精解

1 解不等式$|x+1|+|x-4|\leqslant 5$.

分析: 这是一个含有两个绝对值符号的不等式,为了去掉绝对值符号,应进行分类讨论.

解: 令$x+1=0$,$x-4=0$,则$x=-1$,$x=4$.

分成下述三种情况讨论求解:

①$x<-1$时,$x+1<0$,$x-4<0$.

$\therefore$ 原不等式化为$-x-1-x+4\leqslant 5$.

$\therefore -2x\leqslant 2$.

$\therefore x\geqslant -1$,但与$x<-1$矛盾.

②$-1\leqslant x<4$时,$x+1\geqslant 0$,$x-4<0$.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

$\therefore$ 原不等式化为 $x+1+4-x\leq 5$，不等式成立.

$\therefore -1\leq x<4$.

③$x\geq 4$时，$x+1>0$，$x-4\geq 0$.

$\therefore$ 原不等式化为$x+1+x-4\leq 5$.

$\therefore 2x\leq 8$.

$\therefore x\leq 4$，但与$x\geq 4$的交集是$x=4$.

因此原不等式的解集为$\{x|-1\leq x\leq 4\}$.

解 评 使用不等式的性质及绝对值的定义求解不等式，需要分类讨论.

2 设不等式$x^2-2(m-1)x+m+1\leq 0$的解集为M，如果$M\subseteq[1,4]$，求实数m的取值范围.

解: $M\subseteq[1,4]$有两种情况:

(1)$M=\varnothing$时，则$M\subseteq[1,4]$.此时

$\Delta=4(m-1)^2-4(m+1)<0$.

$\therefore m^2-3m<0$.

解之，得$0<m<3$.

(2)$M\neq\varnothing$ 时，且$M\subseteq[1,4]$.

①$\Delta=0$时，$m=0$或$m=3$.

但$m=0$时，$M=\{-1\}\not\subseteq[1,4]$；

$m=3$时，$M=\{2\}\subseteq[1,4]$.

②$\Delta>0$时，即$m<0$或$m>3$.

设方程的两个根为x_1,x_2，且$x_1<x_2$，则$M=\{x_1,x_2\}$.

$\therefore x_1<x_2\leq 4$，从而$1\leq m\leq 4$，且$\Delta>0$.

$$\therefore\begin{cases}1-2(m-1)+m+1\geq 0,\\16-8(m-1)+m+1\geq 0,\\1\leq m\leq 4,\\m<0\text{或}m>3,\end{cases}$$

$$\text{即}\begin{cases}4-m\geq 0,\\25-7m\geq 0,\\1\leq m\leq 4,\\m<0\text{或}m>3.\end{cases}$$

$\therefore 3<m\leq\frac{25}{7}$.

综上 $m\in\left(0,\frac{25}{7}\right]$.

3 解不等式组

$$\begin{cases}2x-\frac{1}{2x-1}>1,\\2x-\frac{1}{2x-1}<2.\end{cases}$$

解: 由原不等式组，得

$$\begin{cases}\frac{x^2-x}{2x-1}>0,\\\frac{4x^2-6x+1}{2x-1}<0.\end{cases}$$

分两种情况讨论求解:

(1)$2x-1>0$，即$x>\frac{1}{2}$时，不等式组等价于

$$\begin{cases}x^2-x>0,\\4x^2-6x+1<0.\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}x<0\text{或}x>1,\\\frac{3-\sqrt{5}}{4}<x<\frac{3+\sqrt{5}}{4}.\end{cases}$$

$\therefore 1<x<\frac{3+\sqrt{5}}{4}$.

(2)$2x-1<0$，即$x<\frac{1}{2}$时，不等式组等价于

$$\begin{cases}x^2-x<0,\\4x^2-6x+1>0.\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}0<x<1,\\x<\frac{3-\sqrt{5}}{4}\text{或}x>\frac{3+\sqrt{5}}{4}.\end{cases}$$

$\therefore 0<x<\frac{3-\sqrt{5}}{4}$.

因此原不等式组的解集为

$\left\{x\,\middle|\,0<x<\frac{3-\sqrt{5}}{4}\text{或}1<x<\frac{3+\sqrt{5}}{4}\right\}$.

解 评 本题根据$2x-1$的符号的不确定性和运算需要，应分成两种情况讨论求解.

4 解关于x的不等式$(m-2)x^2-(4m-11)x-12>0(m\in\mathbf{R})$.

解: (1)当$m=2$时，原不等式化为$3x-12>0$.

$\therefore x>4$.

$\therefore$ 原不等式的解集为$\{x|x>4\}$.

(2)当$m\neq 2$时，原不等式化为

$(x-4)[(m-2)x+3]>0$.

①$m>2$时，$-\frac{3}{m-2}<4$.

$\therefore$ 原不等式的解集为$\left\{x\,\middle|\,x>4\text{或}x<-\frac{3}{m-2}\right\}$.

②$m<2$时，比较两根$-\frac{3}{m-2}$与4的大小.

当$4<-\frac{3}{m-2}$，即$\frac{5}{4}<m<2$时，解集为

$\left\{x\,\middle|\,4<x<-\frac{3}{m-2}\right\}$；

当$4>-\frac{3}{m-2}$，即$m<\frac{5}{4}$时，解集为

$\left\{x\,\middle|\,-\frac{3}{m-2}<x<4\right\}$.

练习题4

◉**1.** 如果不等式$|2x-5|+|4-2x|<t$的解集是空集，求t的取值范围.

◉**2.** 解不等式$\frac{2(x-1)}{x-2}>\frac{1}{|x-1|}$.

◉**3.** 解不等式$|x^2-2x|<x+4$.

◉**4.** 解不等式 $\frac{x}{x-1}<1-a\ (a\in\mathbf{R})$.

考点5 含参数的不等式的解法

题型精解

1 已知不等式$-3x^2+t(6-t)x+s>0$的解集是$\{x|-2<x<2\}$，求实数t,s的值.

分析：本题是已知不等式的解集，求参数t,s的值，即解一元二次不等式的相反问题.

解：$\because -3x^2+t(6-t)x+s>0$的解集是$\{x\mid -2<x<2\}$，

$\therefore -3x^2+t(6-t)x+s>0$与$(x+2)(x-2)<0$同解.

由$(x+2)(x-2)<0$，得$x^2-4<0$.

由原不等式，得$x^2-\frac{t}{3}(6-t)x-\frac{s}{3}<0$.

$\therefore -\frac{t}{3}(6-t)=0,-\frac{s}{3}=-4$.

因此$t=0$或$t=6,s=12$.

2 不等式$x^2+(m-3)x+m^2-9<0$的解集包含区间$(1,2)$时，求实数m的取值范围.

分析：本题是已知不等式解集的子集$(1,2)$，求参数m的取值范围.

解：用构造函数法求解.

构造二次函数$f(x)=x^2+(m-3)x+m^2-9$.

$\because$ 不等式$x^2+(m-3)x+m^2-9<0$的解集包含区间$(1,2)$，

$\therefore$ 抛物线$f(x)$与x轴的两个交点的横坐标$x_1,x_2(x_1<x_2)$满足$x_1\leqslant 1,x_2\geqslant 2$.

从而$f(1)\leqslant 0,f(2)\leqslant 0$，

$\therefore \begin{cases}1+m-3+m^2-9\leqslant 0,\\4+2m-6+m^2-9\leqslant 0,\end{cases}$

即$\begin{cases}m^2+m-11\leqslant 0,\\m^2+2m-11\leqslant 0.\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}\frac{-1-3\sqrt{5}}{2}\leqslant m\leqslant \frac{-1+3\sqrt{5}}{2},\\-1-2\sqrt{3}\leqslant m\leqslant -1+2\sqrt{3}.\end{cases}$

因此 $\frac{-1-3\sqrt{5}}{2}\leqslant m\leqslant -1+2\sqrt{3}$.

3 解关于x的不等式$2x^2+ax-6a^2<0$.

分析：本题属于解含参数的不等式，需对解集的边界值进行讨论.

解：由原不等式，得$(x+2a)(2x-3a)<0$.

$\therefore \begin{cases}x+2a>0,\\2x-3a<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+2a<0,\\2x-3a>0.\end{cases}$

即$\begin{cases}x>-2a,\\x<\frac{3a}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<-2a,\\x>\frac{3a}{2}.\end{cases}$

①$a>0$ 时，原不等式的解集为$\{x\mid -2a<x<\frac{3a}{2}\}$；

②$a<0$时，原不等式的解集为$\{x\mid \frac{3a}{2}<x<-2a\}$；

③$a=0$时，原不等式为$2x^2<0$，$x\in\varnothing$.

4 解关于x的不等式$m^2(x^2+1)+6>2(m^2x+3)+n^2$.

分析：由于不等式中含有两个参数m,n，求解时应注意对m,n的讨论顺序，由于二次系数中含有m，所以应先对m进行讨论.

解：$m=0$时，原不等式化为$n^2<0$，$x\in\varnothing$；

$m\neq 0$时，原不等式化为 $m^2x^2-2m^2x+m^2-n^2>0$.

$\therefore \Delta=4m^4-4m^4+4m^2n^2=4m^2n^2\geqslant 0$.

$\therefore$ 两根为$x_1=\frac{m-n}{m},x_2=\frac{m+n}{m}$.

①$n=0$时，$x_1=x_2=1$，原不等式的解集为$\{x\mid x\in\mathbf{R},x\neq 1\}$；

②$mn>0$时，$x_2>x_1$，原不等式的解集为$\left\{x\mid x<\frac{m-n}{m}\text{或}x>\frac{m+n}{m}\right\}$；

③$mn<0$时，$x_2<x_1$，原不等式的解集为$\left\{x\mid x<\frac{m+n}{m}\text{或}x>\frac{m-n}{m}\right\}$.

练习题5

◉**1.** 解关于x的不等式$mx^2+2x+2>0$.

◉**2.** 已知不等式$ax^2-5x+b>0$的解集是$\{x\mid -3<x<-2\}$，求不等式$bx^2-5x+a>0$的解集.

◉**3.** 解关于x的不等式组

$\begin{cases}\frac{1+x}{1-x}>\frac{1+x}{k},\\\frac{1+x}{1-x}>0.\end{cases}$

◉**4.** 设集合$A=\left\{x\left|\frac{x-2}{x-1}\leqslant 0\right.\right\}$，$B=\{x\mid(2a-1)x<a,x>0,a>0\}$，求使$A\cap B=A$的实数$a$的取值范围.

◉**5.** 已知$M=\{x\mid 2x^2+7x-15<0\}$，$N=\{x\mid x^2+ax+b\leqslant 0\}$.

且满足$M\cap N=\varnothing$，$M\cup N=\{x\mid -5<x\leqslant 2\}$，求实数$a,b$的值.

考点6 列不等式解应用题

题型精解

1 某工厂现有甲种原料360 kg，乙种原料290 kg，计划利用这两种原料生产A，B两种产品，共50件.已知生产一件A种产品，需用甲种原料9 kg，乙种原料3 kg；生产一件B种产品，需用甲种原料4 kg，乙种原料10 kg，按要求安排A，B两种产品的生产件数，有哪几种方案？请你设计出来.

分析：由于题设条件较多，关系复杂，可以用列表法进行梳理.

	A种产品		B种产品		总计
	1件	x件	1件	$(50-x)$件	
甲种原料	9 kg	$9x$ kg	4 kg	$4(50-x)$ kg	360 kg
乙种原料	3 kg	$3x$ kg	10 kg	$10(50-x)$ kg	290 kg

解：设安排生产A种产品x件，则生产B种产品$(50-x)$件.

于是有$\begin{cases}9x+4(50-x)\leqslant 360,\\3x+10(50-x)\leqslant 290,\end{cases}$

即$\begin{cases}x\leqslant 32,\\x\geqslant 30.\end{cases}$

$\therefore 30\leqslant x\leqslant 32$.

$\therefore x$只能取整数30，31，32.

相应地，$50-x$的值为20，19，18.

因此生产方案有3种.

第一种方案：生产A种产品30件，B种产品20件；

第二种方案：生产A种产品31件，B种产品19件；

第三种方案：生产A种产品32件，B种产品18件.

解 评 本题属于方案设计题，即把生产安排的各种可能一一找出来，看有多少种可供选择的生产方案.

2 某公司计划下一年度生产一种新型计算机，下面是各部门提供的数值信息：

人事部：明年生产工人不多于80人，每人每年按2 400工时计算；

市场部：预测明年销售量至少为10 000台；

技术部：生产一台计算机，平均要用12个工时，每台计算机需要安装5个主要部件；

供应部：今年年终将库存某种主要部件2 000件，明年能采购到这种主要部件为80 000件；

根据上述信息，明年该公司的生产量可能是多少？

解：设明年的生产量为x台，则所需工时为$12x$个工时，而需要主要部件为$5x$件.

于是有$\begin{cases}12x\leqslant 80\times 2\ 400,\\5x\leqslant 2\ 000+80\ 000\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}x\leqslant 16\ 000,\\x\leqslant 16\ 400\end{cases}$

$\therefore x\leqslant 16\ 000.$

又$\because$明年的销售量至少是10 000台，

$\therefore 10\ 000\leqslant x\leqslant 16\ 000.$

答：该公司明年安排的生产量为10 000台到16 000台.

3 汽车在行驶中，由于惯性作用，刹车后还要继续向前滑行一段距离才能停住，我们称这段距离为“刹车距离”.刹车距离是分析事故的一个重要因素.

在一个限速40 km/h以内的弯道上，甲、乙两辆汽车相向而行，发现情况不对，同时刹车但还是相碰了.事发后现场测得甲车的刹车距离略超过12 m，乙车的刹车距离略超过10 m.又知甲、乙两车型的刹车距离s(m)与车速(km/h)之间分别有如下关系：

$s_{甲}=0.1x+0.01x^2$；

$s_{乙}=0.05x+0.005x^2$.

问：超速行驶应负主要责任的是哪辆车？

分析：应从分析车速着手，超速者应是事故的主要责任人.

解：$\because s_{甲}=0.1x+0.01x^2>12$， ①

$s_{乙}=0.05x+0.005x^2>10$， ②

由①，得 $x<-40$或$x>30$；

由②，得 $x<-50$或$x>40$.

$\therefore$ 根据$x_{甲}>30$ km/h，$x_{乙}>40$ km/h，知乙车车速超过限速，应负主要责任.

练习题6

◉**1.** 某工厂2003年生产了750台机床，计划2005年使年产量超过1 080台，求平均每年的增长率应超过多少？

◉**2.** 某厂需要一种零件，可外购也可自产.如外购每件价格是1.10元；如自己生产，则每月的固定成本将增加800元，并且生产每一件的材料和劳力需要0.60元.试确定该厂是自产还是外购此种零件合算.

◉**3.** 某市2001年底有教师及家属2万人，人均住房面积8 m²，计划在2005年人均住房面积达到12 m².如果教师及家属人口年增长率控制在1%内，要实现上述计划，求平均每年至少要建住房多少万平方米？

考点7 四种命题

题型精解

1 写出下列各命题的否定形式及命题的否命题，并分别判断它们的真假：

(1)面积相等的三角形是全等三角形；

(2)若$A\cap B=A\cup B$，则$A=B$.

解：(1)先将原命题写成“如果……，那么……”的形式：

如果两个三角形的面积相等，那么这两个三角形是全等三角形.

所以它的否定形式为：

面积相等的三角形不一定是全等三角形.

它的否命题为：

面积不相等的三角形不是全等三角形.

因此，它的否定形式是真命题，

否命题也是真命题.

(2)命题的否定形式为：

若$A\cap B=A\cup B$，则$A\neq B$.这是一个假命题.

命题的否命题为：

若$A\cap B\neq A\cup B$，则$A\neq B$.这是一个真命题.

解 评 一个命题“若p则q”的否定形式是“若p则非q”，而命题的否命题是“若非p，则非q”.应注意一个命题的否定形式和否命题的区别，不要混淆.

2 给出下列命题，分别写出它们的逆命题、否命题及逆否命题，并判断其真假：

(1)若$x>0$，且$y>0$，则$x+y>0$；

(2)若$abc=0$，则$a=0$或$b=0$或$c=0$；

(3)直角三角形两直角边的平方和等于斜边的平方；

(4)若集合$A=C$且$B=D$，则$A\cup B=C\cup D$.

解：(1)若$x>0$，且$y>0$，则$x+y>0$(真命题)；

逆命题：若$x+y>0$，则$x>0$，且$y>0$(假命题)；

否命题：若$x\leqslant 0$或$y\leqslant 0$，则$x+y\leqslant 0$(假命题)；

逆否命题：若$x+y\leqslant 0$，则$x\leqslant 0$或$y\leqslant 0$(真命题).

(2)若$abc=0$，则$a=0$或$b=0$或$c=0$(真命题)；

逆命题：若$a=0$或$b=0$或$c=0$，则$abc=0$(真命题)；

否命题：若$abc\neq 0$，则$a\neq 0$且$b\neq 0$且$c\neq 0$(真命题)；

逆否命题：若$a\neq 0$且$b\neq 0$且$c\neq 0$，则$abc\neq 0$(真命题).

(3)直角三角形两直角边的平方和等于斜边的平方(真命题)；

逆命题：如果一个三角形的两边的平方和等于第三

边的平方,那么这个三角形是直角三角形(真命题);

否命题:如果一个三角形不是直角三角形,那么这个三角形任何两边的平方和都不等于第三边的平方(真命题);

逆否命题:如果一个三角形任何两边的平方和不等于第三边的平方,那么这个三角形不是直角三角形(真命题).

(4)若集合$A=C$且$B=D$,则$A\cup B=C\cup D$(真命题);

逆命题:若$A\cup B=C\cup D$,则$A=C$且$B=D$(假命题);

否命题:若$A\neq C$或$B\neq D$,则$A\cup B\neq C\cup D$(假命题);

逆否命题:若$A\cup B\neq C\cup D$,则$A\neq C$或$B\neq D$(真命题).

解评 注意原命题与逆否命题同真假,逆命题与否命题同真假;判定逆命题是假命题时,可以举出反例说明,如$A=\{a,b,c\}$,$B=\{c,d,e\}$,$C=\{a,b\}$,$D=\{b,c,d,e\}$,则

$A\cup B=\{a,b,c,d,e\}$,$C\cup D=\{a,b,c,d,e\}$.

虽然$A\cup B=C\cup D$,但$A\neq C$,$B\neq D$.

可见若$A\cup B=C\cup D$,则$A=C$且$B=D$是一个假命题.

3 填空:

(1)"若$P\subseteq Q$,则$P\cup Q=Q$"的逆否命题是________;

(2)"若$P\cap Q=P\cup Q$,则$P=Q$"的否命题是________;

(3)"若$x\in P\cup Q$,则$x\in P$或$x\in Q$"的逆否命题是________;

(4)"若$P\subseteq Q$,则$P\subseteq M$"的逆命题是________,否命题是________,逆否命题是________.

解:(1)"若$P\subseteq Q$,则$P\cup Q=Q$"的逆否命题是"若$P\cup Q\neq Q$,则$P\not\subseteq Q$".

(2)"若$P\cap Q=P\cup Q$,则$P=Q$"的否命题是"若$P\cap Q\neq P\cup Q$,则$P\neq Q$".

(3)"若$x\in P\cup Q$,则$x\in P$或$x\in Q$"的逆否命题是"若$x\notin P$且$x\notin Q$,则$x\notin P\cup Q$".

(4)"若$P\subseteq Q$,则$P\subseteq M$"的逆命题是若"$P\subseteq M$,则$P\subseteq Q$";

否命题是"若$P\not\subseteq Q$,则$P\not\subseteq M$";

逆否命题是"若$P\not\subseteq M$,则$P\not\subseteq Q$".

解评 本题是把集合与命题综合形成的题目,有一定的综合性.

4 已知方程$ax^2+bx+c=0$,且a,b,c都是奇数,求证方程没有整数根.

分析:由于命题的结论是否定形式,不便于用直接法证明,应采用反证法进行证明.

证明:假设方程$ax^2+bx+c=0$有整数根,设整数根为x_0.

由于a,b,c都是奇数,则

①x_0是奇数时,则

ax_0^2,bx_0都是奇数.

$\therefore ax_0^2+bx_0+c=$奇数$\neq 0$,但这与$x_0$是方程$ax^2+bx+c=0$的整数根矛盾;

②x_0是偶数时,则

ax_0^2,bx_0都是偶数.

$\therefore ax_0^2+bx_0+c=$奇数$\neq 0$,但这与$x_0$是方程$ax^2+bx+c=0$的整数根矛盾.

综上知假设不成立,即当a,b,c是奇数时,方程$ax^2+bx+c=0$没有整数根.

解评 反证法与逆否证法是不同的,注意分清它们的区别.

反证法:证明"若p,则q"时,是肯定p而否定q导致出现矛盾,即由p与非q一起推出矛盾,从而否定非q而肯定q.

逆否证法:证明"若p,则q"时,是改证它的逆否命题"若非q,则非p",证明过程不必推出矛盾.

5 若$a,b,c\in\mathbf{R}$,且$a=x^2-2y+\frac{\pi}{2}$,$b=y^2-2z+\frac{\pi}{3}$,$c=z^2-2x+\frac{\pi}{6}$,求证a,b,c中至少有一个大于零.

分析:由于结论是"至少"形式,不便于直接证明,应考虑使用反证法证明.

证明:假设a,b,c都不大于零,即$a\leqslant 0,b\leqslant 0,c\leqslant 0$.

从而$a+b+c\leqslant 0$.

$\because a=x^2-2y+\frac{\pi}{2}$,$b=y^2-2z+\frac{\pi}{3}$,$c=z^2-2x+\frac{\pi}{6}$,

$$\therefore a+b+c=\left(x^2-2y+\frac{\pi}{2}\right)+\left(y^2-2z+\frac{\pi}{3}\right)+\left(z^2-2x+\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=(x^2-2x)+(y^2-2y)+(z^2-2z)+\pi$$
$$=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+(\pi-3).$$

$\because (x-1)^2\geqslant 0,(y-1)^2\geqslant 0,(z-1)^2\geqslant 0,\pi>3$,

由此推出$a+b+c=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+(\pi-3)>0$.

但这与$a+b+c\leqslant 0$矛盾!

因此假设不成立,即a,b,c中至少有一个大于零.

练习题7

一、选择题

◉**1.** 命题"若$x\geqslant 0$,$y\geqslant 0$,则$xy\geqslant 0$"的否命题是(　　)

A.若$x<0$且$y<0$,则$xy<0$

B.若$x<0$且$y<0$,则$xy\neq 0$

C.若$x<0$或$y<0$,则$xy<0$

D.若$x\geqslant 0$且$y\geqslant 0$,则$xy<0$

◉**2.** 给出下列四个命题:

①"若$ab=1$,则a,b互为倒数"的逆命题;

②"相似三角形的周长相等"的否命题;

③"若$b\leqslant -1$,则方程$x^2-2bx+b^2+b+1=0$有实根"的逆否命题;

④"$P\cup Q=Q$,则$Q\subseteq P$"的逆否命题.

其中真命题是(　　)

A.①②　**B.**②③　**C.**①③　**D.**③④

◉**3.** 给出下列命题:

①若$P\subsetneqq Q$,$Q\subsetneqq P$,则$P=Q$;　②若$P\subsetneqq Q$,则$P\cup Q=Q$;

③若$P\subsetneqq Q$,则$P\cap Q=P$;　④$\complement_S(P\cup Q)=\complement_S P\cup\complement_S Q$.

其中的真命题是(　　)

A.①②③　**B.**①②④

C.①③④　**D.**②③④

◉**4.** 已知命题p:"若$xy=0$,则$x^2+y^2=0$";命题q:"若$x^2+y^2=0$,则$xy=0$".在下列说法中正确的是(　　)

A."p且q"为真　**B.**"p或q"为假

C."非p且非q"为真　**D.**"非p或非q"为真

二、填空题……………………………………………………

◉5. 已知原命题:若$a=6$且$b=4$,则$a+b=10$,则它的逆命题是______,否命题是______,逆否命题是______,其中的真命题是______.

◉6. 命题"四边相等的四边形是菱形"的否定形式是______,否命题是__________________.

◉7. 命题p:"3是10的约数",命题q:"5是10的约数",则"非p","p且q","p或q"中,是真命题的为____________.

◉8. 给出下列说法:

①若"p且q"为真,则p一定真;

②若"p或q"为真,则p一定为假;

③若"p且q"与"p或q"都是真命题,则"非p"一定是假命题;

④若"p且q"与"p或q"都是假命题,则"非p"与"非q"中至少有一个是假命题.

其中正确的是__________________.

考点8 充分条件与必要条件

题型精解

进行充分条件与必要条件的判定时,常用方法有下述几种:

1.定义法

1 下列问题中,p是q的什么条件?

①$p:a>0,b>0$;$q:a^2+b^2>0$;

②$p:x>y$;$q:|x|>|y|$;

③$p:x+2=0$;$q:x^2-4=0$;

④$p:-3<x<5$;$q:|x-1|<4$;

⑤$p:c=0$;q:抛物线$y=x^2+bx+c$过原点.

分析:根据定义分别考查$p\Longrightarrow q$,$q\Longrightarrow p$哪个成立,还是都成立或都不成立.

解:(1)$p:a>0,b>0 \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} q:a^2+b^2>0$,

$\therefore p$是q的充分不必要条件.

(2)$p:x>y \underset{\not\Longleftarrow}{\not\Longrightarrow} q:|x|>|y|$,

$\therefore p$既不是q的充分条件也不是q的必要条件.

(3)$p:x+2=0 \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} q:x^2-4=0$,

$\therefore p$是q的充分不必要条件.

(4)$p:-3<x<5 \underset{\Longleftarrow}{\Longrightarrow} q:|x-1|<4$,

$\therefore p$是q的充要条件.

(5)$p:c=0 \underset{\Longleftarrow}{\Longrightarrow} q$:抛物线$y=x^2+bx+c$过原点.

$\therefore p$是q的充要条件.

2 下列问题中,p是q的什么条件?

(1)$p:x^2-3x+2\geqslant 0$;$q:x\geqslant 1$或$x\leqslant 2$.

(2)$p:x=5$;$q:\sqrt{x-5}+\sqrt{x-4}=1$.

(3)$p:-2<a<0,0<b<1$;q:关于x的方程$x^2+ax+b=0$有两个小于1的正实根.

解:(1)$p:x\leqslant 1$或$x\geqslant 2$,$q:x\in\mathbf{R}$.

$\because p\Longrightarrow q$但$q\not\Longrightarrow p$,

$\therefore p$是q的充分不必要条件.

(2)解方程$\sqrt{x-5}+\sqrt{x-4}=1$,得$x=5$.

$\because p\Longrightarrow q$且$q\Longrightarrow p$,

$\therefore p$是q的充要条件.

(3)取$a=-1,b=\frac{1}{2}$满足$-2<a<0,0<b<1$.

则方程$x^2-x+\frac{1}{2}=0$的$\Delta=1-2=-1<0$.

$\therefore p\not\Longrightarrow q$.

如果方程有两个小于1的正实根,则可设$0<x_1\leqslant x_2<1$.

$\because x_1+x_2=-a,x_1x_2=b$,

$\therefore -2<a<0,0<b<1$.从而$q\Longrightarrow p$.

$\therefore p$是q的必要不充分条件.

练一练

(1)p:两个三角形相似;q:两个三角形全等.则p是q的什么条件?

(2)p:四边形对角线相等;q:四边形是矩形,则p是q的什么条件?

答案:(1)(2)p是q的必要不充分条件.

2.传递法

3 若A是B成立的充分不必要条件,D是C成立的必要不充分条件,C是B成立的充要条件,则D是A的什么条件?

解:$\because A \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} B, C \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} D, C \underset{\Longleftarrow}{\Longrightarrow} B$,

$\therefore A \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} B \underset{\Longleftarrow}{\Longrightarrow} C \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} D$.

$\therefore A \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} D$,$D$是$A$成立的必要不充分条件.

4 已知P是N成立的充分不必要条件,N是Q成立的必要不充分条件,同时又是M成立的充分不必要条件,Q是M成立的必要不充分条件.

(1)M是P成立的什么条件? P是Q成立的什么条件?

(2)P,Q,M,N中有几对是充要条件?

解:$P \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} N, Q \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} N, N \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} M, M \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} Q$,

即
$$\begin{array}{ccccc} P & \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} & N & \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} & M \\ & & \Uparrow\not\Downarrow & \nearrow\!\not\swarrow & \\ & & Q & & \end{array}$$

(1)由$P\Longrightarrow N\Longrightarrow M$,知$M$是$P$成立的必要不充分条件;

由$P\Longrightarrow N\Longrightarrow M\Longrightarrow Q$,知$P$是$Q$成立的充分不必要条件.

(2)$\because M\Longrightarrow Q,Q\Longrightarrow N\Longrightarrow M$,

$N\Longrightarrow M,M\Longrightarrow Q\Longrightarrow N$,

$Q\Longrightarrow N,N\Longrightarrow M\Longrightarrow Q$.

$\therefore M$与Q,Q与N,N与M互为充要条件.

3.集合法

设$A=\{x|p(x)\}$,$B=\{x|q(x)\}$.

若$A\subseteq B$,则$p\Longrightarrow q$;

若$B\subseteq A$,则$p\Longleftarrow q$.

若$A=B$,则$p \underset{\Longrightarrow}{\Longleftarrow} q$.

5 下列问题中,p是q的什么条件?

(1)$p:x>80$;$q:x\geqslant 35$;

(2) $p:(x-2)(x+3)=0$; $q:x=2$;

(3) $p:|x-2|\leq 5$; $q:x\geq -1$或$x\leq 5$;

(4) $p:a^2\neq b^2$; $q:a\neq b$或$a\neq -b$.

解:(1) $A=\{x|x>80\}$, $B=\{x|x\geq 35\}$,

$\because A\subsetneqq B$,

$\therefore p \overset{\Rightarrow}{\nLeftarrow} q$, p是q的必要不充分条件.

(2) $A=\{x|(x-2)(x+3)=0\}=\{2,-3\}$,

$B=\{2\}$,

$\because A\supsetneqq B$,

$\therefore p \overset{\nRightarrow}{\Leftarrow} q$, p是q的必要不充分条件.

(3) $A=\{x||x-2|\leq 5\}=\{x|-3\leq x\leq 7\}$,

$B=\{x|x\geq -1$或$x\leq 5\}=\mathbf{R}$.

$\because A\subsetneqq B$, 即p是q的充分不必要条件.

(4) $A=\{(a,b)|a^2\neq b^2\}=\{(a,b)|a\neq b$且$a\neq -b\}$,

$B=\{(a,b)|a\neq b$或$a\neq -b\}$.

$\therefore A\subsetneqq B$, 即$p \overset{\Rightarrow}{\nLeftarrow} q$.

$\therefore p$是q的充分不必要条件.

4.等价问题法

6 若$p:x\neq 4$或$y\neq 6$; $q:x+y\neq 10$, 则p是q的什么条件?

解:$\because$非$p:x=4$且$x=6$,

非$q:x+y=10$,

$\therefore$ 若非p则非q是真命题.

从而若q则p是真命题.

$\therefore p$是q的必要不充分条件.

7 已知p,q是两个命题,且p是q的充分条件,则

(1) q是p的______条件;

(2) 非q是非p的______条件;

(3) 非p是非q的______条件.

解: $p\Longrightarrow q$的等价命题是非$q\Longrightarrow$非p.

$\therefore$ 非q是非p的充分条件,

非p是非q的必要条件.

因此(1)必要条件;(2)充分条件;

(3)必要条件.

练习题8

一、选择题

1. 若a,b是实数,则$a>b>0$是$a^2>b^2$的( )

A.充分不必要条件 **B.**必要不充分条件

C.充要条件 **D.**既非充分又非必要条件

2. 设命题甲:$-1<x<7$;命题乙:$|x-3|<4$.则甲是乙的( )

A.充分不必要条件 **B.**必要不充分条件

C.充要条件 **D.**既非充分又非必要条件

3. 设命题甲:$|x+1|<2$,则下列条件中,是命题甲的必要不充分条件的有( )

A. $x^2+2x-3<0$ **B.** $|x-1|<2$

C. $|2x+1|<3$ **D.** $x^2-9<0$

4. 给出四个条件:

①$b>0>a$; ②$0>a>b$;

③$a>0>b$; ④$a>b>0$.

能使$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$成立的充分条件有( )

A.1个 **B.**2个 **C.**3个 **D.**4个

二、填空题

5. “$x\in A$或$x\in B$”是“$x\in A\cap B$”的________条件.

6. “$M\not\subseteq A$或$M\not\subseteq B$”是“$M\not\subseteq A\cap B$”的________条件.

7. “$ab>0$且$a>b$”是“$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$”的________条件.

8. 命题$p:|3x-4|<2$,命题$q:\frac{1}{x^2-x-2}<0$,则非p是非q的________条件.

参考答案

练习题1

一、**1.**C;**2.**B;**3.**C;**4.**A;**5.**C;**6.**B.

二、**7.** $x=0$, $x=2$.

8. $\{c\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$, $\{a,b,c\}$共4个.

9. $t=-5$, $t=-3$, $t=0$.

10. $M\cap N=\{(2,0)\}$.

11. $A\cap B=\{x|x\geq 1\}$.

12. $\alpha=\{2,3\}$, $\beta=\{3,5\}$, $p=5$, $q=6$, $k=8$.

三、**13.** $\because P\cup \complement_S P=Q$, $\therefore P\subsetneqq Q$.

①若$t+2=3$,则$t=1$,符合要求;

②若$t+2=-t^3$,则$t=-1$,不符合要求.

$\therefore t=1$时, $P=\{1,3\}$, $Q=\{1,3,-1\}$.

14. $p>-1$.

15. 1或$-\frac{5}{4}$.

练习题2

一、**1.**B;**2.**D.

二、**3.** $(A\cap B)\cup C$; $\complement_S(A\cup B\cup C)$或$\complement_S A\cap \complement_S B\cap \complement_S C$.

4. $(A\cap C\cap \complement_S B)\cup(B\cap C\cap \complement_S A)$;

$(A\cap B\cap C)\cup \complement_S(A\cup B\cup C)$;

$A\cap(\complement_S B\cap \complement_S C)$; $(A\cap B)\cup \complement_S(A\cup B)$.

练习题3

1. $(40+31)-(50-4)=71-46=25$(人).

2. 20人.

3. 3人;9人.

4. 89人.

练习题4

1. (1) $t\leq 0$时,不等式的解集为空集.

(2) $t>0$时,

①$x\geq \frac{5}{2}$时,原不等式化为 $2x-5+2x-4<t$,

即$4x<t+9$.

$\therefore x<\frac{t+9}{4}$, $\therefore \frac{5}{2}\leq x<\frac{t+9}{4}$.

$\therefore t>1$.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com