全国硕士研究生入学统一考试

历届考题

名家解析

经济数学四

2006

全国考研数学辅导专家组 组编

黄先开 曹显兵
施明存 殷先军 编写

朝華出版社

历届考题

名家解析

经济数学四

2006

全国硕士研究生入学统一考试

历届考题名家解析

经济数学四

全国考研数学辅导专家组　组编

黄先开　曹显兵
施明存　殷先军　编写

2006

朝華出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济数学四/黄先开等编.—北京:朝华出版社,2005.3
(全国硕士研究生入学统一考试历届考题名家解析)
ISBN 7-5054-1167-5

Ⅰ.经... Ⅱ.黄... Ⅲ.经济数学—研究生—入学考试—解题
Ⅳ.F224.0-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 009580 号

全国硕士研究生入学统一考试历届考题名家解析:经济数学四

编　　著　黄先开等

策划编辑　田　辉　谭隆全
责任编辑　张　冉
责任印制　赵　岭
封面设计　东　方

出版发行　朝华出版社
地　　址　北京市车公庄西路 35 号　　邮政编码　100044
电　　话　(010)68433166(总编室)
　　　　　(010)68413840/68433213(发行部)
传　　真　(010)88415258(发行部)
印　　刷　北京印刷一厂
经　　销　全国新华书店
开　　本　787×1092 毫米　1/16　　字　　数　370 千字
印　　张　15
版　　次　2005 年 3 月第 1 版　第 1 次印刷
版　　别　平
书　　号　ISBN 7-5054-1167-5/G·0566
定　　价　22.00 元

出版说明

历届考题就是最好的模拟试题。因为,**历史是一面镜子**。懂得昨天,才会明白今天;掌握了历史和现实,才能驾驭未来。

本套丛书具有**资料完整**、**分析详细**、**解剖透彻**、**技巧灵活**的特点。首先,汇集了1990～2005年数学,1999～2005年政治理论,1995～2005年英语的历届研究生入学考试试题,包括政治理论、英语、理工数学一、理工数学二、经济数学三、经济数学四,共6册;其次,真正做到了逐题解析,分析详尽,解答规范,特别是填空题和选择题均给出了详细的解答过程,另外针对近几年的考题,做到先是分析——解题的基本思路、方法,然后是详解——详细、规范的答题过程,再就是评注——解题思路、方法和技巧的归纳总结,所涉及到的知识点、命题意图和可能延伸的考查情形。这种对命题思路、解题的重点、难点进行深入细致的解析,相信有助于考生把握解题规律、扩展分析思路、提炼答题技巧,从而大大提高应试水平。

自从1987年全国工学、经济学硕士研究生入学实行统一考试以来,至今已有19年,共命制试卷100余份,数千道试题。这些试题是广大参加命题的专家、教授智慧和劳动的结晶,它既反映了《考试大纲》对考生数学、英语和政治理论方面知识、能力和水平的要求,展示出统考以来三门基础课考试的全貌,又蕴涵着命题专家在《考试大纲》要求下的命题思想,是广大考生和教师了解、分析、研究全国硕士研究生入学统一考试最直接、最宝贵的第一手资料。

鉴于研究生入学统一考试已超过10届,所以很难保证每年的试题都是最新编制的。事实上,近几年的考题都与往年的试题有相当一部分是雷同的。比如:**2005**年数学一第一大题第(3)题与1991年数学一第三大题第(2)题,**2005**年数学一第一大题第(4)题与2004年数学一第三大题第(17)题,**2005**年数学一第(16)题与1990年数学一第四大题,**2005**年数学一第(20)题与1996年数学一第九大题,**2005**年数学一第(22)题与1991年数学一第十一大题,**2005**年数学二第(5)题与2003年数学二第一大题第(1)题,**2005**年数学二第(8)题与1994年数学一第一大题第(4)题,**2005**年数学二第(22)题与2004年数学四第二大题第(9)题,**2005**年数学三、四第(4)题与2002年数学三第一大题第(4)题,**2005**年数学三第(18)题与2003年数学三第六大题,**2005**年数学四第(21)题与2001年数学一第十大题;2004年数学一第(17)题与1996年数学一第四大题,2004年数学一第(23)题与1997年数学一第十大题,2004年数学一第(20)题与2003年数学三第九大题;2004年数学一第(15)题与1993年数学一第六大题,2004年数学一第(11)题与1997年数学一第八大题,2004年数学一第(12)题与1993年数学一第二大题第

(5)题，2004 年数学二第(9)题与 2002 年数学二第一大题第(4)题，2004 年数学二第(22)题与 2003 年数学三第九大题，2004 年数学三、四第(18)题与 1992 年数学四、2002 年数学四第七大题，2004 年数学三第(19)题与 2002 年数学第七大题，2004 年数学三第(20)题与 2000 年数学三、四第九大题，2004 年数学四第(21)题与 1997 年数学三第十大题，2004 年数学一、三、四第(22)题与 2003 年数学四第十二大题等等都是相同或非常相似的，且解题思路几乎完全一样，可见仅在最近 2 年的数学考题中就有**多达** 20 **余道题**是与往届考题雷同的。考生若把这些历届考题全部消化巩固，将为考研成功打下坚实的基础。正因为如此，广大准备考研的同学和教师都迫切希望有一套完整的历届考试资料作为参考，共享这些优秀的试题。编者们多年来一直在做这方面的收集、整理工作，现在出版的这套丛书相信能满足大家的要求。

本套丛书按时间顺序成套题形式编排，目的是便于广大考生完成基础知识复习后进行模拟训练。尽管每题均有详尽规范的解答，但不希望读者轻易去查看答案和评注，而一定要自己先动手去进行演练。通过做成套的真题，一方面达到深化知识理解，提升思维水平的目的；另一方面可掌握做题节奏和调整考试心态。可能的话，相邀几个准备考研的朋友，一起在规定的三个小时之内真刀真枪地进行一番演习，刻意给自己制造一个紧张的气氛，去体会那种让人怦怦心跳的考试环境。通过对历年试题的真实模拟，把握好做题的节奏，分配好各部分的时间，从而不断提升自己的应试水平。

在每套题做完后，再回过头去看书中的分析、详解和评注，仔细回顾、研究一下自己的思路和解答过程与书中的答案有什么异同，了解自己在基础知识、分析思路及求解推理过程中存在哪些不足，与前面已做过的题比较是否有了提高……等等，注意这样的归纳总结过程是必不可少的，其重要性甚至超过做题本身。整本书都这样复习下来后，在掌握基本概念、基本理论和基本方法上，在灵活运用知识和思维能力的训练上，相信读者一定会有一个质的提高。

由于时间比较仓促，难免还有不足之处，恳请广大读者朋友批评指正，以使本系列丛书能不断完善。

全国考研数学辅导专家组

目　　次

1990 年全国硕士研究生入学统一考试 经济数学四试题

一、填空题(本题满分 15 分,每小题 3 分.)

(1) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=$ ________.

(2) 设函数 $f(x)$ 有连续的导函数,$f(0)=0$ 且 $f'(0)=b$,若函数

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+a\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ A, & x=0,\end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续,则常数 $A=$ ________.

(3) 曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=x+2$ 所围成的平面图形的面积为________.

(4) 若线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2=-a_1\\ x_2+x_3=a_2\\ x_3+x_4=-a_3\\ x_4+x_1=a_4\end{cases}$有解,则常数 a_1,a_2,a_3,a_4 应满足条件________.

(5) 已知随机变量 $X\sim N(-3,1)$,$Y\sim N(2,1)$,且 X,Y 相互独立,设随机变量 $Z=X-2Y+7$,则 $Z\sim$ ________.

二、选择题(本题满分 15 分,每小题 3 分,每一小题都给出代号为 A,B,C,D 的四个结论,其中只有一个是正确的,把你认为正确的结论的代号写在题后的圆括号内,每一小题选对得 3 分,不选或选错一律得 0 分.)

(1) 设函数 $f(x)=x\cdot\tan x\cdot e^{\sin x}$,则 $f(x)$ 是

(A) 偶函数. (B) 无界函数.

(C) 周期函数. (D) 单调函数.

【 】

(2) 设函数 $f(x)$ 对任意 x 均满足等式 $f(1+x)=af(x)$,且有 $f'(0)=b$,其中 a、b 为非零常数,则

(A) $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导.

(B) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,且 $f'(1)=a$.

(C) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,且 $f'(1)=b$.

(D) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,且 $f'(1)=ab$.

【 】

(3) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充分条件是

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均不为零向量.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意两个向量的分量不成比例.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意一个向量均不能由其余 $s-1$ 个向量线性表示.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中有一部分向量线性无关.

【　】

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵,$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,则

(A) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.　　(B) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|$.

(C) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n}$.　　(D) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}^{-1}|$.

【　】

(5) 已知随机变量 X 服从二项分布,且 $E(X)=2.4,D(X)=1.44$,则二项分布的参数 n, p 的值为

(A) $n=4,p=0.6$.　　(B) $n=6,p=0.4$.

(C) $n=8,p=0.3$.　　(D) $n=24,p=0.1$.

【　】

三、计算题(本题满分 20 分,每小题 5 分.)

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x(1+t^2)e^{t^2-x^2}\,dt$.

(2) 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{x\cos^4\frac{x}{2}}{\sin^3 x}dx$.

(3) 设 $x^2+z^2=y\varphi\left(\dfrac{z}{y}\right)$,其中 φ 为可微函数,求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

(4) 计算二重积分 $\displaystyle\iint_D x e^{-y^2}\,dx\,dy$,其中 D 是曲线 $y=4x^2$ 和 $y=9x^2$ 在第一象限所围成的区域.

四、(本题满分 9 分)

某公司可通过电台及报纸两种方式做销售某种商品的广告,根据统计资料,销售收入 R(万元)与电台广告费用 x_1(万元)及报纸广告费用 x_2(万元)之间的关系有如下经验公式:

$$R=15+14x_1+32x_2-8x_1x_2-2x_1^2-10x_2^2.$$

(1) 在广告费用不限的情况下,求最优广告策略;

(2) 若提供的广告费用为 1.5 万元,求相应的最优广告策略.

五、(本题满分 6 分)

证明不等式 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\geqslant\sqrt{1+x^2}\ (-\infty<x<+\infty)$.

六、(本题满分 4 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 10×10 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&1\\10^{10}&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix},$$

计算行列式 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 10 阶单位矩阵,λ 为常数.

七、(本题满分 5 分)

设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足条件 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为单位阵. 试证明 $\boldsymbol{A}$ 的实特征向量所对应的特征值的绝对值等于 1.

八、(本题满分 8 分)

已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = a, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = b, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 2. \end{cases}$$

(1) a、b 为何值时，方程组有解？

(2) 方程组有解时，求出方程组的导出组的一个基础解系；

(3) 方程组有解时，求出方程组的全部解.

九、(本题满分 5 分)

从 0,1,2,…,9 等十个数字中任意选出三个不同的数字，试求下列事件的概率：

$A_1=\{$三个数字中不含 0 和 5$\}$；

$A_2=\{$三个数字中含 0 但不含 5$\}$.

十、(本题满分 6 分)

甲、乙两人独立地各进行两次射击，假设甲的命中率为 0.2，乙的命中率为 0.5. 以 X 和 Y 分别表示甲和乙的命中次数，试求 X 和 Y 的联合概率分布.

十一、(本题满分 7 分)

某地抽样调查结果表明，考生的外语成绩（百分制）近似正态分布，平均成绩为 72 分，96 分以上的占考生总数的 2.3%，试求考生的外语成绩在 60 分至 84 分之间的概率.

[附表]

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$\Phi(x)$	0.500	0.692	0.841	0.933	0.977	0.994	0.999

表中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数.

1990 年全国硕士研究生入学统一考试
经济数学四试题分析、详解及评注

一、填空题

(1) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=$ $\underline{\quad 2 \quad}$.

[分析] 根式有理化化为"$\frac{\infty}{\infty}$"型极限求解即可.

[详解]
$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3\sqrt{n}-(n-\sqrt{n})}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+3\sqrt{\frac{1}{n}}}+\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{n}}}}=2.$$

[评注] 本题属基础题型.

(2) 设函数 $f(x)$ 有连续的导函数,$f(0)=0$ 且 $f'(0)=b$,若函数
$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+a\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ A, & x=0,\end{cases}$$
在 $x=0$ 处连续,则常数 $A=$ $\underline{\quad a+b \quad}$.

[分析] 利用连续与导数的定义即可.

[详解] 由题设 $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续,于是有$\lim\limits_{x\to 0}F(x)=F(0)$,

即 $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+a\sin x}{x}=A,$$

而 $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+a\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x}+a\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x}+a\frac{\sin x}{x}\right)$$
$$=f'(0)+a=a+b,$$

即 $A=a+b$.

[评注] 由已知抽象函数 $f(x)$ 在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$,一般利用导数定义:
$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

(3) 曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=x+2$ 所围成的平面图形的面积为 $\underline{\quad \frac{9}{2} \quad}$.

[分析] 利用定积分求面积即可.

[详解] 所围平面图形的面积为
$$S=\int_{-1}^{2}(x+2-x^2)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{2}=\frac{9}{2}.$$

［评注］ 本题属基础题型.

(4) 若线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2=-a_1 \\ x_2+x_3=a_2 \\ x_3+x_4=-a_3 \\ x_4+x_1=a_4 \end{cases}$$

有解,则常数 a_1,a_2,a_3,a_4 应满足条件 $\underline{\quad a_1+a_2+a_3+a_4=0 \quad}$.

［分析］ 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解的充要条件为 $r(\overline{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A})$.

［详解］ 化增广矩阵为阶梯形

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & a_4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & a_1+a_4 \end{array}\right)$$

$$\to\cdots\to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1+a_2+a_3+a_4 \end{array}\right).$$

由解的判定定理知,必有

$$a_1+a_2+a_3+a_4=0.$$

［评注］ 本题属基础题型.

(5) 已知随机变量 $X\sim N(-3,1)$, $Y\sim N(2,1)$, 且 X,Y 相互独立, 设随机变量 $Z=X-2Y+7$,则 $Z\sim$ $\underline{\quad N(0,5) \quad}$.

［分析］ 利用正态分布的性质.

［详解］ 由于 X,Y 是相互独立的随机变量,其线性组合仍服从正态分布.又

$$E(Z)=E(X)-2E(Y)+7=-3-2\times 2+7=0,$$

$$D(Z)=D(X-2Y+7)=D(X)+4D(Y)=1+4\times 1=5,$$

所以 $Z\sim N(0,5)$.

［评注］ 若 X 与 Y 都服从正态分布且相互独立,则 $aX+bY+c$ 也服从正态分布(a、b 不全为 0).

二、选择题

(1) 设函数 $f(x)=x\cdot\tan x\cdot e^{\sin x}$,则 $f(x)$ 是

(A) 偶函数. (B) 无界函数.

(C) 周期函数. (D) 单调函数.

【 】

［答］ 应选(B).

［分析］ 可用排除法.

［详解］ 由于

$$f(-x)=-x\cdot\tan(-x)\cdot e^{\sin(-x)}=x\cdot\tan x\cdot e^{-\sin x}\neq f(x),$$

故 $f(x)$ 不是偶函数，显然 $f(x)$ 也不是周期函数；

而 $x \to (\frac{\pi}{2})^-$ 时，$f(x) \to +\infty$；$x \to (\frac{\pi}{2})^+$ 时，$f(x) \to -\infty$；$x \to (\frac{3\pi}{2})^-$ 时，$f(x) \to +\infty$；

故 $f(x)$ 也不是单调函数，所以只有(B) 项正确.

[评注] 设 $x_0 \in [a,b]$ 或 (a,b)，若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$ 或 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上或 (a,b) 内无界.

(2) 设函数 $f(x)$ 对任意 x 均满足等式 $f(1+x) = af(x)$，且有 $f'(0) = b$，其中 a、b 为非零常数，则

(A) $f(x)$ 在 $x = 1$ 处不可导.

(B) $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导，且 $f'(1) = a$.

(C) $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导，且 $f'(1) = b$.

(D) $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导，且 $f'(1) = ab$.

【　】

[答] 应选(D).

[分析] 利用导数定义进行讨论.

[详解] 由导数的定义知

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{af(\Delta x) - af(0)}{\Delta x} = a \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = af'(0),$$

即 $f'(1) = af'(0) = ab$.

所以应选(D).

[评注] 加强条件法：算式 $f(1+x) = af(x)$ 两边直接求导，得 $f'(1+x) = af'(x)$，再令 $x = 0$ 得：$f'(1) = af'(0) = ab$.

(3) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充分条件是

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 均不为零向量.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意两个向量的分量不成比例.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意一个向量均不能由其余 $s-1$ 个向量线性表示.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中有一部分向量线性无关.

【　】

[答] 应选(C).

[分析] 利用向量组线性无关的定义进行分析即可.

[详解] 易举反例说明(A)、(B)、(D) 均不成立，只有(C) 为正确答案. 事实上，可用反证法，若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则至少有一个向量可用其余向量线性表示，这与(C) 矛盾.

[评注] 事实上(C) 是充分必要条件.

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则

(A) $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$.　　　　(B) $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|$.

(C) $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^n$.　　　　(D) $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}^{-1}|$.

【　　】

［答］ 应选(A)．

［分析］ 涉及伴随矩阵 A^* 的问题，首先联想到公式 $AA^* = A^*A = |A|E$.

［详解］ 由于 A 可逆，所以有 $A^* = |A|A^{-1}$，从而

$$|A^*| = ||A|A^{-1}| = |A|^n \cdot |A^{-1}| = |A|^{n-1}.$$

［评注］ 有关伴随矩阵 A^* 的性质应熟练掌握.

(5) 已知随机变量 X 服从二项分布，且 $E(X) = 2.4, D(X) = 1.44$，则二项分布的参数 n，p 的值为

(A) $n = 4, p = 0.6$.　　(B) $n = 6, p = 0.4$.

(C) $n = 8, p = 0.3$.　　(D) $n = 24, p = 0.1$.

【　　】

［答］ 应选(B)．

［分析］ 利用二项分布的参数与数字特征的关系.

［详解］ 由题设 $X \sim B(n,p)$，则 $E(X) = np = 2.4, D(X) = np(1-p) = 1.44$，解得 $p = 0.4, n = 6$. 故(B) 正确.

［评注］ 要熟练掌握常见随机变量的分布及其应用，并理解各分布中参数的概率意义以及它们与分布数字特征的关系.

三、计算题

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}\int_0^x (1+t^2)e^{t^2-x^2}\,dt$.

［分析］ 先化为“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型极限，再利用洛必达法则求解.

［详解］
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x (1+t^2)e^{t^2-x^2}\,dx = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x^2}\int_0^x (1+t^2)e^{t^2}\,dt}{x}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x (1+t^2)e^{t^2}\,dt}{xe^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(1+x^2)e^{x^2}}{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

［评注］ 对于变限积分，如果在被积函数中含有变量 x，应先利用换元法或将变量 x 的函数从积分号中提出来，化为被积函数中不含变量 x 的变限积分，再进行求导.

(2) 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{x\cos^4\frac{x}{2}}{\sin^3 x}\,dx$.

［分析］ 本题根据不同的三角恒等变形，有多种方法.

［详解］ 方法一：

$$\text{原式} = \int \frac{x\cos^4\frac{x}{2}}{8\sin^3\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}\,dx = \frac{1}{8}\int \frac{x\cos\frac{x}{2}}{\sin^3\frac{x}{2}}\,dx = \frac{1}{4}\int x\sin^{-3}\frac{x}{2}\,d\sin\frac{x}{2}$$

$$=-\frac{1}{8}\int x\mathrm{d}\sin^{-2}\frac{x}{2}=-\frac{1}{8}x\sin^{-2}\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\int\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{-x}{8\sin^2\frac{x}{2}}-\frac{1}{4}\cot\frac{x}{2}+C=-\frac{1}{8}x\csc^2\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\cot\frac{x}{2}+C.$$

方法二：

$$原式=\frac{1}{8}\int\frac{x\cos\frac{x}{2}}{\sin^3\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\int x\cot\frac{x}{2}\mathrm{d}\cot\frac{x}{2}=-\frac{1}{8}\int x\mathrm{d}\cot^2\frac{x}{2}$$

$$=-\frac{1}{8}x\cot^2\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\int\cot^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{8}x\cot^2\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\int(\csc^2\frac{x}{2}-1)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{8}x\cot^2\frac{x}{2}-\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}\int\csc^2\frac{x}{2}\mathrm{d}(\frac{x}{2})=-\frac{1}{8}x\csc^2\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\cot\frac{x}{2}+C.$$

[评注] 被积函数是三角函数与幂函数两类不同类型函数的乘积，一般用分部积分法.

(3) 设 $x^2+z^2=y\varphi(\frac{z}{y})$，其中 φ 为可微函数，求$\frac{\partial z}{\partial y}$.

[分析] 本题可利用隐函数的求导公式或等式两边直接对 y 求偏导.

[详解] 方法一：

设 $F(x,y,z)=x^2+z^2-y\varphi(\frac{z}{y})$，则

$$F'_y=-\varphi(\frac{z}{y})+\frac{z}{y}\varphi'(\frac{z}{y}),$$

$$F'_z=2z-\varphi'(\frac{z}{y}),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=\frac{y\varphi(\frac{z}{y})-z\varphi'(\frac{z}{y})}{2yz-y\varphi'(\frac{z}{y})}.$$

方法二：

将原式两边同时对 y 求偏导，得

$$2z\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi(\frac{z}{y})+y\varphi'(\frac{z}{y})(\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{1}{y^2}z),$$

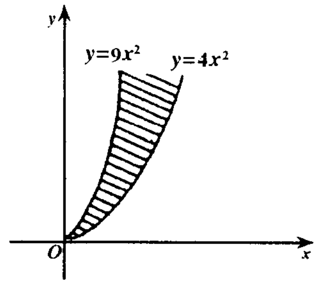
解出$\frac{\partial z}{\partial y}$，得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\varphi(\frac{z}{y})-\frac{z}{y}\varphi'(\frac{z}{y})}{2z-\varphi'(\frac{z}{y})}=\frac{y\varphi(\frac{z}{y})-z\varphi'(\frac{z}{y})}{2yz-y\varphi'(\frac{z}{y})}.$$

[评注] 本题主要考查隐函数的微分法.

(4) 计算二重积分$\iint\limits_D x\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是曲线 $y=4x^2$ 和 $y=9x^2$ 在第一象限所围成的区域.

[分析]　本题是一简单广义二重积分问题，先画出草图，根据被积函数知，应选先对 x 积分.



[详解]　原式 $=\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \int_{\frac{1}{3}\sqrt{y}}^{\frac{1}{2}\sqrt{y}} x dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(\frac{1}{4}y-\frac{1}{9}y)e^{-y^2}dy = \frac{5}{72}\int_0^{+\infty} ye^{-y^2}dy = \frac{5}{144}$.

[评注]　本题属基础题型.

四、某公司可通过电台及报纸两种方式做销售某种商品的广告，根据统计资料，销售收入 R(万元) 与电台广告费用 x_1(万元) 及报纸广告费用 x_2(万元) 之间的关系有如下经验公式：

$$R = 15 + 14x_1 + 32x_2 - 8x_1x_2 - 2x_1^2 - 10x_2^2.$$

(1) 在广告费用不限的情况下，求最优广告策略；

(2) 若提供的广告费用为 1.5 万元，求相应的最优广告策略.

[分析]　(1) 是无条件极值问题，关键是应理解最优广告策略意指利润最大，而不是收益最大.

(2) 是条件极值问题，可用拉格朗日乘数法求解.

[详解]　(1) 此时的利润函数为

$$\pi = R - (x_1 + x_2) = 15 + 13x_1 + 31x_2 - 8x_1x_2 - 2x_1^2 - 10x_2^2,$$

由极值存在的必要条件，得方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi}{\partial x_1} = 13 - 8x_2 - 4x_1 = 0, \\ \dfrac{\partial \pi}{\partial x_2} = 31 - 8x_1 - 20x_2 = 0, \end{cases}$$

其解为 $x_1 = 0.75$(万元)，$x_2 = 1.25$(万元). 又

$$A = \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_1^2} = -4, B = \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_1 \partial x_2} = -8, C = \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_2^2} = -20.$$

由 $B^2 - AC = (-8)^2 - (-4)(-20) = -16 < 0$，及 $A = -4 < 0$ 知函数 π 在 $x_1 = 0.75$ 和 $x_2 = 1.25$ 处达到极大值，亦即最大值. 所以最优广告策略是电台广告费投入 0.75(万元)，报纸广告费投入 1.25(万元).

(2) 当广告费用限定为 $x_1 + x_2 = 1.5$(万元) 时，问题即化为求利润函数 R 在约束条件 $x_1 + x_2 = 1.5$ 下的极值，由拉格朗日乘数法，有

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \lambda) &= R + \lambda(x_1 + x_2 - 1.5) \\ &= 15 + 13x_1 + 31x_2 - 8x_1x_2 - 2x_1^2 - 10x_2^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 1.5). \end{aligned}$$

仍由必要条件得方程组