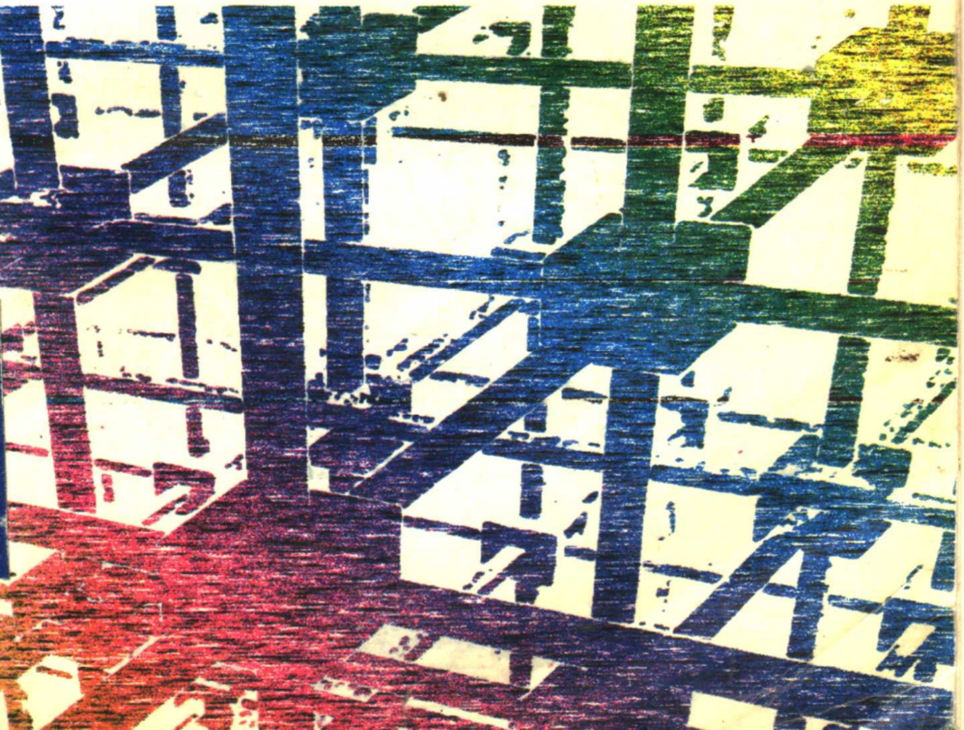
高中数学点·连·网

GAOZHONG SHUXUE
DIAN.LIAN.WANG

胡端森 杨俊卿 胡希圣

湖北教育出版社

一



高中数学

点·链·网

胡瑞森 杨俊卿 胡希圣

湖北教育出版社出版

（鄂）新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

高中数学点·链·网/胡端森等编著.—武汉:湖北教育出版社,1997

ISBN 7-5351-2129-2

Ⅰ.高… Ⅱ.胡… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 10158 号

出版发行:湖北教育出版社　　汉口解放大道新育村 33 号　　邮编:430022　电话:5830435

经　销:新　华　书　店
印　刷:仙桃市新华印刷厂　(433000·仙桃市仙下河北路 15 号)
开　本:787mm×1092mm　1/32　　14.25 印张
版　次:1997 年 8 月第 1 版　　1997 年 8 月第 1 次印刷
字　数:328 千字　　印数:1—10 000

ISBN 7—5351—2129—2/G·1729　　定价:13.50 元

目　　录

第一章　幂函数　指数函数　对数函数

1·1　集合 …… 1
1·2　函数的定义域和值域 …… 5
1·3　函数的奇偶性和单调性 …… 11
1·4　函数的图象 …… 17
1·5　函数的最值 …… 23
1·6　二次函数 …… 29
1·7　幂函数　指数函数　对数函数 …… 34
1·8　指数方程和对数方程 …… 39
单元检测题 …… 45

第二章　三角函数的图象及性质

2·1　同角三角函数的关系 …… 48
2·2　三角函数的性质 …… 53
2·3　三角函数的图象及其变换 …… 58
单元检测题 …… 64

第三章　三角函数的恒等变形

3·1　三角函数的化简与求值(Ⅰ) …… 67
3·2　三角函数的化简与求值(Ⅱ) …… 71
3·3　三角等式的证明 …… 77
3·4　三角函数的最值 …… 81
3·5　三角函数的应用 …… 86
单元检测题 …… 91

第四章　反三角函数与三角方程

4·1　反三角函数的概念、图象和性质 …… 95
4·2　反三角函数的运算 …… 100
4·3　三角方程的解法 …… 105
单元检测题 …… 110

第五章　不等式

5·1　不等式的性质　整式不等式及分式不等式的解法 …… 113
5·2　无理不等式与绝对值不等式的解法 …… 118
5·3　指数不等式与对数不等式的解法 …… 123
5·4　不等式的证明 …… 127
5·5　不等式的应用 …… 132
单元检测题 …… 137

第六章　数列　数学归纳法

6·1　等差、等比数列的基本运算 …… 141
6·2　等差、等比数列的性质及综合应用 …… 146
6·3　数列的通项 …… 150
6·4　数列的求和 …… 156
6·5　数学归纳法及其应用 …… 161
6·6　数列的极限 …… 167
单元检测题 …… 173

第七章　复数

7·1　复数的有关概念 …… 177
7·2　复数的代数形式及其运算 …… 182
7·3　复数的三角形式运算 …… 188
7·4　复数的几何意义 …… 193

7·5　复数的模与共轭复数 …………………………… 198
7·6　复数方程 ………………………………………… 204
单元检测题 ………………………………………… 209

第八章　排列组合　二项式定理

8·1　排列　组合 ……………………………………… 212
8·2　排列与组合的混合问题………………………… 216
8·3　二项式定理及其性质和应用 ………………… 222
单元检测题 ………………………………………… 227

第九章　直线与平面

9·1　直线与直线的位置关系………………………… 230
9·2　直线与平面的位置关系………………………… 237
9·3　平面与平面的位置关系………………………… 243
9·4　角的计算 ………………………………………… 249
9·5　距离的计算 ……………………………………… 256
9·6　平面图形的翻折 ……………………………… 263
单元检测题 ………………………………………… 270

第十章　多面体和旋转体

10·1　棱柱　棱锥　棱台 …………………………… 274
10·2　圆柱　圆锥　圆台 …………………………… 282
10·3　球 ……………………………………………… 288
10·4　面积的计算 …………………………………… 293
10·5　体积的计算及其应用 ………………………… 299
单元检测题 ………………………………………… 305

第十一章　直线与圆

11·1　定比分点　两点间距离 ……………………… 310

11·2　直线方程 …………………………………………… 316
11·3　圆的方程 …………………………………………… 323
11·4　直线与圆的位置关系 ……………………………… 329
单元检测题 ……………………………………………… 335

第十二章　圆锥曲线

12·1　曲线和方程　充要条件 …………………………… 339
12·2　椭圆 ………………………………………………… 344
12·3　双曲线 ……………………………………………… 351
12·4　抛物线 ……………………………………………… 356
12·5　坐标轴的平移 ……………………………………… 361
12·6　直线与圆锥曲线的位置关系 ……………………… 367
12·7　圆锥曲线间的位置关系 …………………………… 373
12·8　轨迹 ………………………………………………… 379
单元检测题 ……………………………………………… 386

第十三章　参数方程与极坐标

13·1　曲线的参数方程的概念 …………………………… 390
13·2　直线的参数方程及其应用 ………………………… 396
13·3　圆锥曲线的参数方程及其应用 …………………… 402
13·4　极坐标系 …………………………………………… 407
单元检测题 ……………………………………………… 413

综合检测题

综合检测题一 …………………………………………… 417
综合检测题二 …………………………………………… 420

答　　案 ……………………………………………… 424

第一章　幂函数　指数函数　对数函数

1·1　集　　合

一、学习要求

1. 正确理解集合中的有关概念，正确地运用有关术语和符号．

2. 准确迅速地进行集合的交、并、补运算．

二、主要题型

1. 判断集合与集合、集合与元素之间的关系

例　集合

$$M=\left\{x \mid x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}, k\in Z\right\},$$

$$N=\left\{x \mid x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2}, k\in Z\right\}$$

则[　　]．

A. $M=N$　B. $M\supset N$　C. $M\subset N$　D. $M\cap N=\varnothing$　(93 年)

2. 求已知集合的交、并、补、子集

例　设

$$I=\{(x,y) \mid x、y\in R\}$$

$$M=\left\{(x,y) \,\middle|\, \frac{y-3}{x-2}=1\right\}, N=\{(x,y) \mid y\neq x+1\}$$

那么$\overline{M\cup N}$等于[　　]．

A. $\varnothing$　　B. $\{(2,3)\}$

C. $(2,3)$　　D. $\{(x,y) \mid y=x+1\}$　(90 年)

3. 考查集合中元素的互异性

例 设 $M=\{0,1,-1\}$，$N=\{x,|y|,\mathrm{tg}(xy)\}$，且 $M=N$，则 x、y 的值分别为________.

4. 已知两个集合之间的包含关系，求其中参数的值或取值范围.

例 已知

$$A=\{x\mid\sqrt{x^2-5x-4}>x-5\}$$

$$B=\{x\mid x^2+ax+3<0\},B\cap A=\varnothing$$

则 a 的范围是________.

5. 关于集合与其他内容的综合题

例 设

$$A=\left\{x\mid\log_{\frac{1}{3}}\left|x-\frac{\pi}{3}\right|\geqslant\log_{\frac{1}{3}}\frac{\pi}{3},x\in R\right\}$$

$$B=\{x\mid\cos x\geqslant 0,x\in R\}$$

则 $D=A\cap B=$________. （87 年，上海）

三、举例分析

例 1 已知

$$A=\{x\mid x^2-4\geqslant 0\},B=\{x\mid|x-3|<3\}$$

$$C=\{x\mid x^2-x-6<0\}$$

求 $A\cup(\overline{B\cap C})$，其中 $I=R$.

解
$$\left.\begin{array}{l}A=\{x\mid x\geqslant 2\text{ 或 }x\leqslant -2\}\\ B=\{x\mid 0<x<6\}\\ C=\{x\mid -2<x<3\}\end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow B\cap C=\{x\mid 0<x<3\}$$

$$\Longrightarrow\overline{B\cap C}=\{x\mid x\leqslant 0\text{ 或 }x\geqslant 3\}$$

$$\Longrightarrow A\cup(\overline{B\cap C})=\{x\mid x\leqslant 0\text{ 或 }x\geqslant 2\}$$

注 注意利用数轴及区间端点的开闭情况.

例 2 已知集合

$$A=\left\{x\left|\frac{x+1}{2-x}<0\right.\right\},B=\{x\mid 4x+p<0\}$$

且 $B\subseteq A$，求实数 p 的取值范围．

解 $A=\{x\mid x>2$ 或 $x<-1\}$

$$B=\left\{x\left|x<-\frac{p}{4}\right.\right\}$$

依题意有

$$-\frac{p}{4}\leqslant -1\Longleftrightarrow p\geqslant 4$$

例 3 设 $A=\{x\mid x^2+(b+2)x+b+1=0,b\in R\}$，求 A 中的所有元素之和．

解 由于 $\Delta=(b+2)^2-4(b+1)=b^2\geqslant 0$，故

$$x^2+(b+2)x+b+1=0$$

一定有实根，

又 $x_1+x_2=-(b+2)$，故

(i)当 $\Delta=0$，即 $b=0$ 时，A 中只有一个元素，即所有元素之和为 -1；

(ii)当 $\Delta\neq 0$，即 $b\neq 0$ 时，A 中所有元素之和为 $-b-2$.

注 如果忽视了方程有等根的情况，解本题时就会出现错误．因为根据集合中元素互异性可知，这时 A 中只有一个元素.

例 4 已知

$$M=\{0,2,a^3-2a^2-a+7\}$$

$$N=\left\{a,a+1,a^2-2a+2,-\frac{1}{2}(a^2-3a-8)\right\}$$

试问是否存在实数 a，使 $M\cap N=\{2,5\}$.

解 $M\cap N=\{2,5\}\Longrightarrow a^3-2a^2-a+7=5$

$\Longrightarrow a=-1$ 或 $a=1$ 或 $a=2$

当 $a=-1$ 时，

$$a+1=0\in N\Longrightarrow 0\in M\cap N$$

与已知矛盾；

当 $a=1$ 时，

$$a^2-2a+2=1=a$$

与 N 中元素互异性矛盾；

当 $a=2$ 时，

$$a^2-2a+2=2=a$$

与 N 中元素互异性矛盾.

故不存在符合题设的 a 值.

注 确定集合中的元素时，不能忘记元素之间的互异性.

例 5 设集合

$$A=\{x\mid x^2-3x+2=0\},B=\{x\mid x^2-ax+2=0\}$$

若 $A\cup B=A$，求 a 的值组成的集合.

解 由 $A\cup B=A$ 得 $B\subseteq A$. 又 $A=\{1,2\}$，所以

(i)若 $B=A$，则 $a=3$；

(ii)若 $B\subset A$，则 $x^2-ax+2=0$ 的判别式 $\Delta\leqslant 0$，即

$$a^2-8\leqslant 0\Longleftrightarrow -2\sqrt{2}\leqslant a\leqslant 2\sqrt{2}$$

但 $\Delta=0$ 时，$B=\{-\sqrt{2}\}$ 或 $B=\{\sqrt{2}\}$，不满足 $B\subset A$，故所求 a 值的集合为

$$\{a\mid -2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2},\text{或 } a=3\}$$

注 不能忘记空集的情况.

四、对应训练 1·1

(一)选择题

1. 若 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{b,c,d\}$，$M\subset A$，且 $M\subset B$，则满足上述条件的集合 M 的个数为[　　].

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. 已知集合 $S=\{x \mid \log_{\frac{1}{2}} x>-2, x \in Z\}, T=\{x \mid \sqrt{x-1}<2, x \in Z\}$，那么 $S \cap T$ 中的元素有[　　].

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 无穷多个

3. 若非空集合 A、B 存在关系 $A \subset B$，I 为全集，下列集合中为空集的是[　　].

A. $A \cap B$　　B. $A \cap \overline{B}$　　C. $\overline{A \cup B}$　　D. $\overline{A \cap B}$

(二)填空题

1. 若 $A=\{(x, y) \mid x^2+y^2=1\}, B=\{(x, y) \mid y^2=2(x+1)\}$，则 $A \cap B$ $=$________.

2. 如果集合 $A=\{2,3, a^2+4a+2\}, B=\{0,7, a^2+4a-2,2-a\}$，并且 $A \cap B=\{3,7\}$，则 $B=$________.

3. 已知 $A=\{x \mid x^2-2x-3=0\}, B=\{x \mid ax-1=0\}$，若 $B \subset A$，则 $a=$ ________.

(三)解答题

1. 已知 $I=\{x \mid x^2-3x+2 \geqslant 0\}, A=\{x \mid |x-2|>1\}, B=\left\{x \,\middle|\, \frac{x-1}{x-2} \geqslant 0\right\}$，求 $\overline{A}$、$\overline{B}$、$A \cap B$、$A \cup B$、$A \cap \overline{B}$、$\overline{A} \cap B$.

2. 已知 $A=\{x \mid x^2+(p+2)x+1=0, x \in R\}$，若 $A \cap R^+=\varnothing$，求 p 的取值范围.

3. 设 $A=\{x \mid |x| \leqslant 1\}, B=\{x \mid x^2+4x+3<0\}$，求集合 C，使其同时满足下列三个条件：(i)$C \subseteq(A \cup B) \cap Z$；(ii)$C$ 有两个元素；(iii)$C \cap B \neq \varnothing$.

4. 关于实数 x 的不等式

$$\left|x-\frac{1}{2}(a+1)^2\right| \leqslant \frac{1}{2}(a-1)^2$$

与
$$x^2-3(a+1)x+2(3a+1) \leqslant 0 \quad (a \in R)$$

的解集依次为 A 与 B，求使 $A \subseteq B$ 成立的 a 的取值范围.　(90 年，上海)

1·2　函数的定义域和值域

一、学习要求

1. 理解函数及其有关概念.

2. 能熟练地求出函数的定义域和值域.

二、主要题型

1. 求函数的定义域

例 函数 $y=\sqrt{2+\log_{\frac{1}{2}}x}+\sqrt{\operatorname{tg}x}$ 的定义域为________.

(89 年,上海)

2. 已知函数 $f(x)$ 的定义域,求函数 $f(g(x))$ 的定义域

例 已知函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[-1,1]$,则函数 $y=f(\log_2 x)$ 的定义域是________.

3. 已知函数 $f(x)$ 的定义域,求 $f(x)$ 的表达式中参数的值或取值范围

例 当函数 $y=x^2-(m+1)x+2$ 的定义域为 $[-1,1]$ 时,其函数值有正有负,那么 m 的取值范围是________.

4. 求函数的值域

例 函数 $y=\sqrt{x^2-49}$ 的值域是________. (89 年,广东)

三、举例分析

例 1 (1)求函数 $f(x)=\sqrt{\operatorname{tg}x}-\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 的定义域.

(2)求函数 $y=\ln(a^x-k\cdot 2^x)$,其中 $a>0,a\neq 1$ 的定义域.

(3)已知 $y=f(x)$ 的定义域为 $[-2,2]$,求函数 $y=f(x^2)+f(x-1)$ 的定义域.

解 (1) $\begin{cases}\operatorname{tg}x\geqslant 0\\ 25-x^2>0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}k\pi\leqslant x<k\pi+\dfrac{\pi}{2}\\ -5<x<5\end{cases}$

故函数的定义域为

$$\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(-5,-\frac{3\pi}{2}\right)\cup\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$$

(2)由 $a^x-k\cdot 2^x>0$ 有 $\left(\dfrac{a}{2}\right)^x>k$.

(i)当 $k\leqslant 0$ 时,定义域为 R;

(ii)当 $k>0$ 时,

若 $a/2>1$,即 $a>2$,则函数的定义域为 $x>\log_{\frac{a}{2}}k$;

若 $0<a/2<1$,即 $0<a<2(a\neq 1)$,则函数的定义域为 $x>\log_{\frac{a}{2}}k$;

若 $\dfrac{a}{2}=1$,即 $a=2$,则 $0<k<1$ 时函数的定义域为 R;$k\geqslant 1$ 时,原式不是函数.

(3)依题意有

$$\begin{cases}-2\leqslant x^2\leqslant 2\\ -2\leqslant x-1\leqslant 2\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}\\ -1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$$

故所求函数的定义域为 $\{x\mid -1\leqslant x\leqslant\sqrt{2}\}$.

注 求函数的定义域应注意其解析式中分式的分母,被开方式,对数的真数、底数,三角函数,零次幂的底所需要满足的条件.求参数时,应注意进行分类讨论.

例 2 k 取何实数时,

$$f(x)=\frac{kx+7}{kx^2+4kx+3}-\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{4}x^2-\sqrt{2}kx-5k+3\right)$$

的定义域是 R?

解 依题意有

$$\begin{cases}kx^2+4kx+3\neq 0 & ①\\ \dfrac{1}{4}x^2-\sqrt{2}kx-5k+3>0 & ②\end{cases}$$

在 R 上恒成立.

由①有

$$\Delta=16k^2-12k<0\Longleftrightarrow 0<k<3/4$$

由②有

$$\Delta=2k^2-(-5k+3)<0\Longleftrightarrow -3<k<1/2$$

综合有，k 的取值范围是 $k\in(0,1/2)$.

注 应注意的是式①在 R 上恒成立即在 R 上，方程 $kx^2+4kx+3=0$ 无解.

例 3 求下列函数的值域

(1)$y=\sqrt{-x^2+x+2}$ (2)$y=2x-1-\sqrt{13-4x}$

(3)$y=\dfrac{x}{2x+1}$ (4)$y=\dfrac{x+2}{x^2+3x+6}$

(5)$y=\log_3 x+\log_x 3-1$

解 (1)因为 $y=\sqrt{-(x-1)^2+1}$，易知函数的值域为 $[0,1]$.

(2)法一

令 $\sqrt{13-4x}=t$，有 $x=\dfrac{13-t^2}{4}(t\geqslant 0)$，所以

$$y=2\cdot\frac{13-t^2}{4}-t=-\frac{1}{2}t^2-t+\frac{13}{2}=-\frac{1}{2}(t+1)^2+6$$
$$\leqslant-\frac{1}{2}(0+1)^2+6=\frac{11}{2}$$

即函数的值域为 $\{y\mid y\leqslant 11/2\}$.

法二

因为函数在其定义域 $\left(-\infty,\dfrac{13}{4}\right]$ 内单调递增，所以当 $x=\dfrac{13}{4}$ 时，

$$y_{\max}=2\cdot\frac{13}{4}-1=\frac{11}{2}$$

故函数的值域为 $\{y\mid y\leqslant 11/2\}$.

(3)法一

函数 $y=\dfrac{x}{2x+1}$ 的反函数为 $y=\dfrac{1}{1-2x}$，后者其定义域为 $\{x\mid x\neq 1/2,x\in R\}$，故函数的值域为 $\{y\mid y\neq 1/2,y\in R\}$.

法二

$$y=\frac{x}{2x+1}=\frac{x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{2}-\frac{\frac{1}{2}}{2x+1}$$

因为$\frac{1}{2(2x+1)}\neq 0$,故函数的值域为

$\{y\,|\,y\neq 1/2, y\in R\}$

(4)由原式有

$$yx^2+(3y-1)x+6y-2=0$$

当 $y\neq 0$ 时,令

$\Delta=(3y-1)^2-4y(6y-2)\geqslant 0$,有

得 $\quad -1/5\leqslant y\leqslant 1/3$

当 $x=-2$ 时,$y=0$.

又对任何实数 x,原表达式均有意义,故函数的值域为

$\{y\,|-1/5\leqslant y\leqslant 1/3\}$.

(5)原函数即

$$y=\log_3 x+\frac{1}{\log_3 x}-1$$

当 $x>1$ 时,$y\geqslant 2\sqrt{\log_3 x\cdot 1/\log_3 x}-1=2-1=1$;

当 $0<x<1$ 时,$y\leqslant -2\sqrt{\log_3 x(1/\log_3 x)}-1=-3$.

故函数的值域为$\{y\,|\,y\leqslant -3$ 或 $y\geqslant 1\}$.

注 求函数的值域的常用方法有:配方法、反函数法、部分分式法、判别式法(注意验证端点情况)、换元法、函数的单调性法、重要不等式法等.

例 4 设函数 $f(x)=\frac{ax+b}{x^2+1}$的值域为$[-1,4]$,求 a、b 的值.

解 由 $y=\frac{ax+b}{x^2+1}$有 $yx^2-ax+y-b=0$,故

$$\Delta=a^2-4y(y-b)\geqslant 0$$

依题意，上式与$(y+1)(y-4)\leqslant 0$等价，故有

$$a=\pm 4, b=3$$

例 5 若$f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2+a$的定义域和值域都是$[1,b]$ $(b>1)$，求a、b的值.

解 因为函数$f(x)$在$[1,b]$上单调递增，故

$$y_{\min}=a, y_{\max}=\frac{1}{2}(b-1)^2+a$$

即函数的值域为$\left[a,\frac{1}{2}(b-1)^2+a\right]$.

令$\begin{cases}a=1\\ \frac{1}{2}(b-1)^2+a=b\end{cases}$有$\begin{cases}a=1\\ b=1\end{cases}$（舍去）或$\begin{cases}a=1\\ b=3\end{cases}$.

故所求a值为1，b值为3.

注 本题巧妙地用到了函数的单调性，如果将已知条件中的$[1,b]$换为$[c,b]$，则应分多种情况进行分类讨论，分别求a，b的值.

四、对应训练 1·2

（一）选择题

1. 已知映射$f:A\longrightarrow B$是定义域A到值域B上的函数.

审查下列各结论：(1)A中的元素在B中不一定有象；(2)B中的元素在A中不一定有原象；(3)B中的元素在A中有原象时，只能有唯一一个原象；(4)B中的每个元素在A中必有原象. 其中正确的有[　　].

A. 0个　　B. 1个　　C. 2个　　D. 3个

2. 若函数$y=\sqrt{f(x)g(x)}$的定义域为集合A，函数$y=f(x)$的定义域为集合B，函数$y=\sqrt{g(x)}$的定义域为集合C，则A、B、C之间的关系是[　　].

A. $A\supseteq B\supseteq C$　　B. $A\supseteq(B\cap C)$

C. $A=B\cap C$　　D. $A\supseteq(B\cup C)$