

脉冲微分系统 引论

傅希林 闫宝强 刘衍胜 著

现代数学基础丛书 96

脉冲微分系统引论

傅希林 闫宝强 刘衍胜 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书详细阐述脉冲微分系统的理论及最新研究成果,主要包括具有界滞量或无穷延滞的脉冲泛函微分系统的基本理论,脉冲微分系统的几何理论、稳定性理论和边值问题,以及脉冲偏微分系统的振动理论等.

本书可作为理工科大学数学系、应用数学系和其他有关专业的大学生、研究生、教师以及有关的科学工作者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

脉冲微分系统引论/傅希林, 闫宝强, 刘衍胜 著. —北京: 科学出版社, 2005

(现代数学基础丛书;96)

ISBN 7-03-014673-5

I. 脉… II. ①傅… ②闫… ③刘… III. 微分-脉冲系统-研究 IV. O231

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 124391 号

责任编辑: 吕 虹 祖翠娥/责任校对: 朱光光

责任印制: 钱玉芬/封面设计: 陈 敬

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005年3月第一版 开本: B5(720×1000)

2005年3月第一次印刷 印张: 20

印数: 1—2 500 字数: 368 000

定价: 40.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换(环伟))

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言,书籍与期刊起着特殊重要的作用.许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍,从中汲取营养,获得教益.

20世纪70年代后期,我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了十余年,而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着.1978年以后,我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会.当时他们的参考书籍大多还是50年代甚至更早期的著述.据此,科学出版社陆续推出了多套数学丛书,其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出,前者出版约40卷,后者则逾80卷.它们质量甚高,影响颇大,对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用.

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者,针对一些重要的数学领域与研究方向,作较系统的介绍.既注意该领域的基础知识,又反映其新发展,力求深入浅出,简明扼要,注重创新.

近年来,数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用,还形成了一些交叉学科.我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科各个领域.

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持,编辑人员也为其付出了艰辛的劳动.它获得了广大读者的喜爱.我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展,使它越办越好,为我国数学研究与教育水平的进一步提高作出贡献.

杨 乐

2003年8月

前 言

脉冲现象作为一种瞬时突变现象,在现代科技各领域的实际问题中是普遍存在的,其数学模型往往可归结为脉冲微分系统.鉴于这类新型非线性微分系统在现代诸多科技领域日益广泛的应用,逐渐引起微分系统学者专家的关注与重视.

关于脉冲微分系统的专著,最早问世的是 V.Lakshmikantham 等 1989 年出版的专著“*Theory of Impulsive Differential Equations*”.这本书对 20 世纪 90 年代以前这类系统早期的基本领域的研究成果进行了系统总结,而自 90 年代以来,脉冲微分系统作为非线性微分系统领域的一个新分支,已取得一批重要研究成果.但目前国内外尚缺乏对其最新研究成果进行系统论述的专著,本书将补充这方面的不足.

本书从结构体系上按照通常对非线性微分系统研究的核心课题来划分章节,展开论述,并自始至终突出阐述最新研究成果.譬如,第 2 章几何理论是全新的,而在第 1 章基本理论、第 3 章稳定性理论、第 4 章边值问题及第 5 章振动理论中都突出了近年在“脉冲”与“时滞”共存情况下的最新研究成果.另外,本书还注意研究方法的总结.譬如,几何理论中强调了具有脉冲限的积分函数的新方法;又如稳定性理论中分别阐述了变分 V 函数法、部分变元 V 函数法等.本书内容这样安排希望使更多的读者对非线性脉冲微分系统的理论与研究方法有一个基本的了解,以便尽快掌握该研究领域的概貌.当然限于我们的水平,本书定会有不当之处,敬请读者指正.

本书撰写过程中得到了李大潜院士的指导,得到了郭柏灵院士和郭大钧教授的支持和鼓励,对他们提出的宝贵意见,我们表示由衷的感谢.科学出版社科学分社吕虹同志对本书出版付出了辛勤劳动并给予了大力帮助,山东师范大学数学科学学院张立琴教授对本书提出了宝贵意见并做了一定的工作,在此一并表示深切的谢意.本书的出版获得国家自然科学基金、山东省自然科学基金以及山东师范大学出版基金的资助,均此致谢.

傅希林 闫宝强 刘衍胜

2004 年 8 月

目 录

绪 论	1
第 1 章 脉冲微分系统的基本理论	18
§ 1.1 一般脉冲微分系统基本理论	18
§ 1.2 脉冲泛函微分系统基本理论	41
附注	79
参考文献	79
第 2 章 脉冲微分自治系统的几何理论	81
§ 2.1 固定时刻脉冲微分自治系统的周期解	81
§ 2.2 具依赖状态的脉冲微分系统极限环的存在性	87
§ 2.3 一维脉冲微分自治系统的奇点	94
§ 2.4 脉冲微分自治系统的分枝	98
附注	98
参考文献	99
第 3 章 脉冲微分系统的稳定性理论	100
§ 3.1 脉冲微分系统关于两个测度的稳定性	100
§ 3.2 脉冲微分系统关于两个测度的有界性	123
§ 3.3 具依赖状态的脉冲微分系统的比较原理	135
§ 3.4 脉冲摄动微分系统关于两个测度的稳定性	141
§ 3.5 脉冲积分微分系统关于两个测度的稳定性	159
§ 3.6 脉冲混合微分系统关于两个测度的稳定性	172
§ 3.7 脉冲泛函微分系统的稳定性	201
附注	216
参考文献	216
第 4 章 脉冲微分系统的边值问题	219
§ 4.1 一阶脉冲微分系统的周期边值问题	219

§ 4.2 二阶脉冲微分系统的边值问题	226
§ 4.3 具有无穷延滞的脉冲泛函微分系统的边值问题	253
附注	270
参考文献	270
第 5 章 脉冲偏微分系统的振动理论	273
§ 5.1 脉冲抛物系统的振动准则	273
§ 5.2 脉冲双曲系统的振动准则	285
§ 5.3 具有时滞的脉冲抛物系统的振动准则	297
附注	305
参考文献	305
* * *	
《现代数学基础丛书》出版书目	307

绪 论

许多实际问题的发展过程往往有这样的特征：在发展的某些阶段，会出现快速的变化。为方便起见，在这些过程的数学模拟中，常常会忽略这个快速变化的持续期间而假设这个过程是通过瞬时突变来完成的。这种瞬时突变现象通常称之为脉冲现象。脉冲现象在现代科技各领域的实际问题中是普遍存在的，其数学模型往往可归结为脉冲微分系统。脉冲微分系统最突出的特点是能够充分考虑到瞬时突变现象对状态的影响，能够更深刻、更精确地反映事物的变化规律。近年最新科技成果表明，这类系统在航天技术、信息科学、控制系统、通讯、生命科学、医学、经济领域均得到重要应用。譬如，可应用于大型空间航天器的减振装置、卫星轨道的转换技术；可应用于机器人的研制；还可应用于神经网络、混沌控制、机密通讯的研究。下面给出几个具体例子。

例 1^[1] 考虑一个力学系统，该系统含有一个通过缓冲器固定于船身的物体。船身的运动轨迹为一条直线，这个物体随着船身的运动而运动，如图 1。

设这个物体和船身的质量分别为 m 和 M ，并设有一个外力 $\sigma(t)$ （依赖于时间 t ）作用于船身，缓冲器作用于坚硬物质的力 f 依赖于船身的排水量 x 和相关的速度 $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ 。函数 $f(x, \dot{x})$ 的具体形式取决于缓冲器的构造。

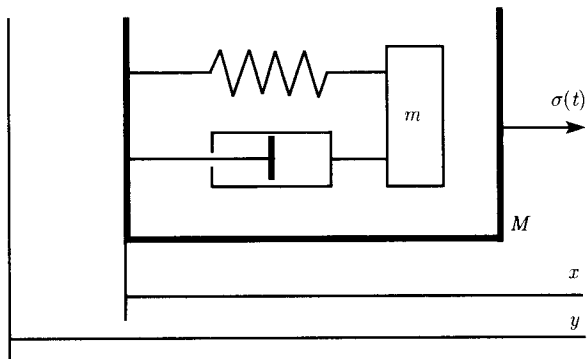


图 1

该系统的运动由下面的微分系统确定：

$$M\ddot{z} + m(\ddot{x} + \ddot{z}) = \sigma(t), \quad m(\ddot{x} + \ddot{z}) = f(x, \dot{x}), \quad (1)$$

这里 z 是相对于坐标系统的船身的排水量。

如果系统 (1) 不考虑 $\ddot{z}$ ，可得描述物体关于船身运动的等式为

$$\ddot{x} - \frac{f(x, \dot{x})}{\mu} = -\frac{\sigma(t)}{M}, \quad \mu = \frac{M}{M+m}. \quad (2)$$

通常在考虑缓冲系统时，假设船身的加速度 $\ddot{z}$ 已知 (代替力 $\sigma(t)$)，则 (2) 有如下形式：

$$\ddot{x} - \frac{f(x, \dot{x})}{\mu} = -\ddot{z}(t). \quad (3)$$

等式 (2) 和 (3) 可以写成如下形式：

$$\ddot{x} + u(x, \dot{x}) = F(t), \quad (4)$$

这里 $u(x, \dot{x}) = -\frac{f(x, \dot{x})}{\mu}$ 称为缓冲器的特征函数。如果力 $\sigma(t)$ (动力学型的外部作用) 已知，则 $F(t) = -\frac{\sigma(t)}{M}$ ；如果加速度 $\ddot{z}(t)$ (运动学型的外部作用) 已知，则 $F(t) = -\ddot{z}(t)$ 。

在固定时刻 τ_k ，受振动影响，速度 $\dot{x}$ 的瞬时增加量为

$$\Delta \dot{x} = \dot{x}(\tau_k + 0) - \dot{x}(\tau_k) = I_k(x(\tau_k), \dot{x}(\tau_k)). \quad (5)$$

方程 (4) 和 (5) 决定了下面的脉冲微分系统：

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -u(x, y), \end{cases} \quad t \neq \tau_k, \quad (6)$$

$$\begin{cases} \Delta x|_{t=\tau_k} = x(\tau_k + 0) - x(\tau_k) = 0, \\ \Delta y|_{t=\tau_k} = y(\tau_k + 0) - y(\tau_k) = I_k(x(\tau_k), y(\tau_k)). \end{cases} \quad (7)$$

例 2^[1] 在一个被外界隔离的环境中，假设物种 A 依赖于食物 B，并且当物种 A 消失时，食物 B 的数量不变，而食物 B 消失时，物种 A 灭绝。如在渔池中饲养的鱼就属于这种情况。

如果我们用 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别代表物种 A 和食物 B 在时刻 t 的绝对数量或相对数量，那么“物种 - 食物”系统的动态过程可用如下常微分方程组描述：

$$\dot{x} = -\gamma xy, \quad \dot{y} = -y(\varepsilon - \delta x), \quad (8)$$

这里 $(x, y) \in R_+^2$, $\gamma > 0, \delta > 0, \varepsilon > 0$ 为常数。

方程组 (1) 是由 Volterra 方程组的极限形式得到的，Volterra 方程描述的是“捕者 - 猎物”系统的动态过程。这里物种 A 为捕者，食物 B 为增长率为零的猎物。

如果 $x(0) = x_0 > 0, y(0) = y_0 > 0$, 则系统 (1) 的解将停留在 R_+^2 (如图 2) 中, 并且

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_\infty > 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0.$$

这意味着如果食物 B 不可再生, 那么物种 A 将灭绝. 然而, 如果适当对“物种 - 食物”系统施加脉冲作用, 则物种 A 的周期性变化也是可能的.

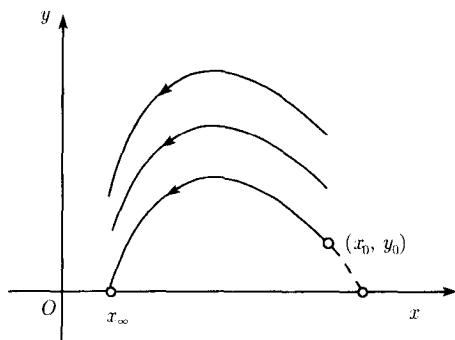


图 2

考虑下面两种情况:

情形 1. 假设在某一时刻, “物种 - 食物”系统受到脉冲作用, 使得食物的总数量增长 $\lambda > 0$, 而种群的数量减少 αy (由于捕杀或自然死亡). 假设 $0 < \alpha < 1$, 即通过捕杀, 整个物种并没有灭绝. 当食物数量达到某个给定水平 $x_1 > 0$ 时 (即 $x = x_1$ 时), 脉冲作用发生. 这样就得到如下含脉冲的微分系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\gamma xy, & \dot{y} = -y(\varepsilon - \delta x), & x \neq x_1, \\ \Delta x = \lambda, & \Delta y = -\alpha y, & x = x_1. \end{cases} \quad (9)$$

下面考虑系统 (2) 受到一个 T 周期脉冲作用时 T 周期解的存在性.

设 $x = \xi(t), y = \eta(t)$ 为这样的一个人 T 周期解, 引进记号 $\xi_0 = \xi(0+0), \eta_0 = \eta(0+), \xi_1 = \xi(T), \eta_1 = \eta(T), \xi_1^+ = \xi(T+0), \eta_1^+ = \eta(T+0)$. 从 T 周期性条件 $\xi_1^+ = \xi_0, \eta_1^+ = \eta_0$ 得到

$$x_1 + \lambda = \xi_0, \quad (1 - \alpha)\eta_1 = \eta_0. \quad (10)$$

对 $t \in (0, T]$, 系统 (3) 的解 $x = \xi(t), y = \eta(t)$ 满足关系式

$$e^{\gamma[\eta(t) - \eta_0]} = \left(\frac{\xi(t)}{\xi_0} \right)^\varepsilon e^{-\delta[\xi(t) - \xi_0]}. \quad (11)$$

特别地, 对 $t = T$, 有 $e^{\gamma(\eta_1 - \eta_0)} = \left(\frac{x_1}{\xi_0}\right)^\varepsilon e^{-\delta(x_1 - \xi_0)}$. 根据 (3), 我们得到

$$\eta_0 = \frac{1 - \alpha}{\alpha\gamma} \left(\varepsilon \ln \frac{x_1}{x_1 + \lambda} + \delta\lambda \right). \quad (12)$$

从 (3) 可知 $\eta_0 > 0$ 的条件是

$$x_1 > x = \frac{\lambda e^{-\frac{\delta\lambda}{\varepsilon}}}{1 - e^{-\frac{\delta\lambda}{\varepsilon}}}. \quad (13)$$

因此, 如果条件 (6) 成立, 则系统 (2) 在周期脉冲作用下, 有唯一一个周期解. 利用 (2) 的第一个方程和关系式 (3), (4), 可得这样的周期为

$$T = \int_0^T dt = \int_{x_1}^{x_1 + \lambda} \frac{dx}{[\gamma\eta_0 + \varepsilon \ln \frac{x}{x_1 + \lambda} - \delta(x - x_1 - \lambda)]x}$$

的解 $x = \xi(t)$, $y = \eta(t)$ 的轨迹图像, 如图 3.

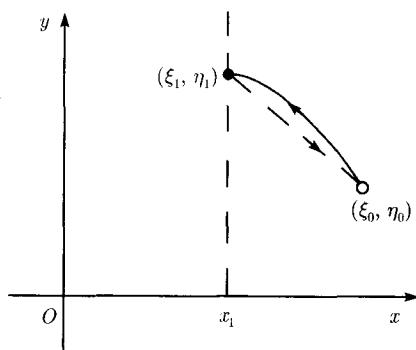


图 3

情形 2. 假设“物种-食物”系统当食物的数量 x_1 满足条件 (6) 时受脉冲作用. 设 $n > 0$ 为某个整数, 在每一次脉冲作用时, 食物的数量增加 λ , 而种群的数量只有在脉冲时刻 τ_k 才突然减少 (这里 k 为 n 的倍数), 即

$$\Delta x(\tau_k) = \lambda, \quad (14)$$

$$\Delta y(\tau_k) = \begin{cases} 0, & k \text{ 不为 } n \text{ 的倍数,} \\ -\alpha y(\tau_k), & k \text{ 为 } n \text{ 的倍数.} \end{cases} \quad (15)$$

下面考虑当初始条件 $x(0+) = x_0 > 0$, $y(0+) = y_0 > 0$ 达到何值时, 脉冲系统 (1), (7), (8) 有一个 $T = \tau_n$ 的周期解.

设 $x_k = x(\tau_k)$, $x_k^+ = x(\tau_k + 0)$, $y_k = y(\tau_k)$, $y_k^+ = y(\tau_k + 0)$, $\tau_0 = 0$. 由 (7), (8) 和 T 周期性条件 $x_n^+ = x_0$, $y_n^+ = y_0$ 可得

$$x_1 + \lambda = x_0, \quad (1 - \alpha)y_n = y_0. \quad (16)$$

利用 (4) 可推得 $e^{\gamma(y_k - y_{k-1}^+)} = \left(\frac{x_k}{x_{k-1}^+}\right)^\varepsilon e^{-\delta(x_k - x_{k-1}^+)}$, $k = 1, 2, \dots, n$. 再根据 (7), (8), (9) 可推知

$$\begin{aligned} y_k - y_{k-1} &= \frac{1}{\gamma} \left(\varepsilon \ln \frac{x_1}{x_1 + \lambda} + \delta \lambda \right) \equiv \mu, \quad k = 1, 2, \dots, n, \\ y_k &= y_0 + k\mu, \quad k = 1, 2, \dots, n, \\ y_0 &= \frac{(1 - \alpha)n\mu}{\alpha}. \end{aligned}$$

从 (6) 可推得 y_0 为正. 因此系统 (1), (7), (8) 的满足初始条件 $\xi(0+) = x_0$, $\eta(0+) = y_0$ 的解 $x = \xi(t)$, $y = \eta(t)$ 有唯一非平凡的 T 周期解. 选取种群数量的一个平均值 $\eta^* = \frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n) = \mu \left(\frac{n}{\alpha} - \frac{1}{2} \right)$, 则 $x = \xi(t)$, $y = \eta(t)$ 为下述脉冲自治系统的 τ_n 周期解:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\gamma xy, \quad \dot{y} = -y(\varepsilon + \delta x), \quad x \neq x_1, \\ \Delta x &= \lambda, \quad \Delta y = \begin{cases} 0, & y < \eta^*, \quad x = x_1, \\ -\alpha y, & y \geq \eta^*, \quad x = x_1. \end{cases} \end{aligned}$$

该解的图像如图 4.

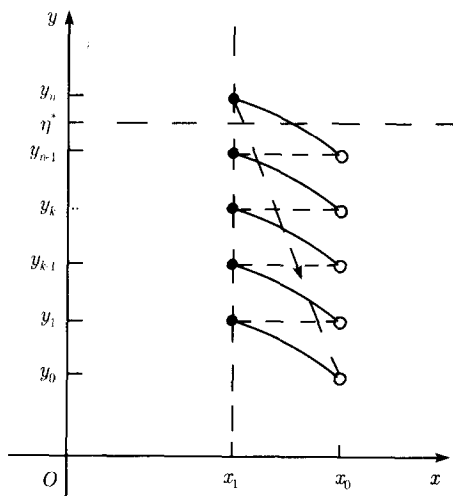


图 4

例 3^[2] 脉冲控制问题. 该问题起源于飞船行驶, 生态控制等问题的研究. 控制的目的是干涉它的运动过程来达到预期结果. 控制一般分为连续控制和脉冲控制. 脉冲控制最大的优势是易于操作, 并且实用经济, 如在火箭运行控制中, 其运行轨道的脉冲校正装置要比飞行过程中的监视 (correct on-line) 和正确行驶的装置简单得多和经济得多.

假设一个物理现象可用如下微分系统来描述:

$$x' = A(t)x, \quad (17)$$

这里 $x \in R^n, A \in C[R, R^n]$, 且满足如下边界条件:

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f. \quad (18)$$

众所周知, 一般情况下 (17), (18) 的解是不存在的, 但如果在 (17) 的右端增加一个可控制项, 类似于连续控制, 这样就可解了. 因此脉冲控制的思想就是对任意一个满足初始条件的系统在规定时刻通过应用该物理系统的一对组合部件的脉冲来达到规定的状态.

设 x 可以分成两部分 $x^T = (z^T, y^T)$, 这里 $z \in R^{n-m}, y \in R^m$. 向量 y 代表系统的脉冲作用分量, 即只在系统的后 m 维向量中出现脉冲. 为避免平凡解, 通常假设 $1 \leq m < n$. 称系统 (17) 是脉冲可控制的. 如果对任意给定的 $(t_0, \tau_0), (t_f, x_f) \in R \times R^m, t_0 < t_f$, 存在 $t_i \in (t_0, t_f), i = 1, 2, \dots, r, t_1 < t_2 < \dots < t_r$, 并且 $\Delta y_i \in R^m, i = 1, 2, \dots, r$, 使得如下脉冲微分系统

$$\begin{cases} x' = A(t)x, & t \neq t_i, \\ x(t_i^+) = x(t_i^-) + \Delta x(t_i), & i = 1, 2, \dots, r, \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (19)$$

在 $[t_0, t_f]$ 上有一个解 $x(t)$ 满足 $x(t_f) = x_f$, 其中 $\Delta x(t_i)^T = (0, \Delta y_i^T)$.

设 $\Phi(t)$ 为系统 (17) 的基解矩阵, 则系统 (19) 在 $[t_0, t_f]$ 上的唯一解可由如下表示式给出:

$$x(t) = \begin{cases} \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0, & t \in [t_0, t_1], \\ \Phi(t)\Phi^{-1}(t_i)x(t_i^+), & t \in (t_i, t_{i+1}], i = 1, 2, \dots, r-1, \\ \Phi(t)\Phi^{-1}(t_r)x(t_r^+), & t \in [t_r, t_f], \end{cases} \quad (20)$$

则由 (19) 知系统 (17) 是脉冲可控的当且仅当

$$\sum_{i=1}^r \Phi_m^{-1}(t_i)\Delta y_i = b, \quad (21)$$

这里 $\Phi_m^{-1}(t)$ 代表的最右边 m 列, $b = \Phi^{-1}(t_f)x_f - \Phi^{-1}(t_0)x_0$.

设 $W = [\Phi_m^{-1}(t_1), \Phi_m^{-1}(t_2), \dots, \Phi_m^{-1}(t_r)]$, $Y^T = (\Delta y_1^T, \Delta y_2^T, \dots, \Delta y_r^T)$, 则 (21) 可以改写成如下形式:

$$WY = b. \quad (22)$$

由于 x_0, x_f 任意, 因此 b 也任意. 根据线性代数知识系统 (17) 是脉冲可控的当且仅当

$$\text{Rank}(W) = n. \quad (23)$$

这样, 方程 (23) 建立了系统 (17) 脉冲可控的一个充分必要条件.

例 4^[3] 考虑具有脉冲的洛伦茨 (Lorenz) 系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y, \\ \frac{dy}{dt} = -xz - y + \gamma x, & t \neq 0.5k, k = 0, 1, 2, \dots, \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz, \\ \Delta x = I_k^1(x) = m_1 u_k + \varepsilon_1 x_k - x_k, & t = 0.5k, k = 0, 1, 2, \dots, \\ \Delta y = I_k^2(y) = m_2 u_k + \varepsilon_2 y_k - y_k, & t = 0.5k, k = 0, 1, 2, \dots, \\ \Delta z = I_k^3(z) = m_3 u_k + \varepsilon_3 z_k - z_k, & t = 0.5k, k = 0, 1, 2, \dots, \\ u_{k+1} = g(u_k) = \lambda u_k(1 - u_k), & u_0 = 0.5. \end{cases} \quad (24)$$

图 5~图 8 分别给出了洛伦茨吸引子及在不同脉冲输入下相平面中的轨线.

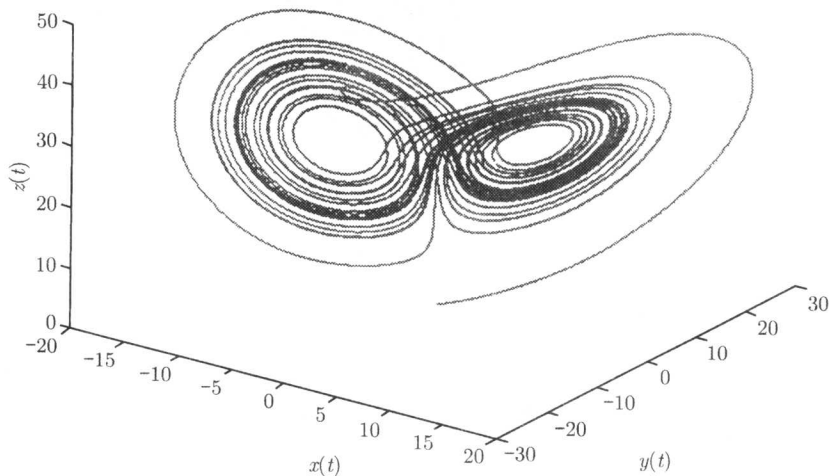


图 5 洛伦茨吸引子: $\sigma = 10, \gamma = 28, b = \frac{3}{8}$

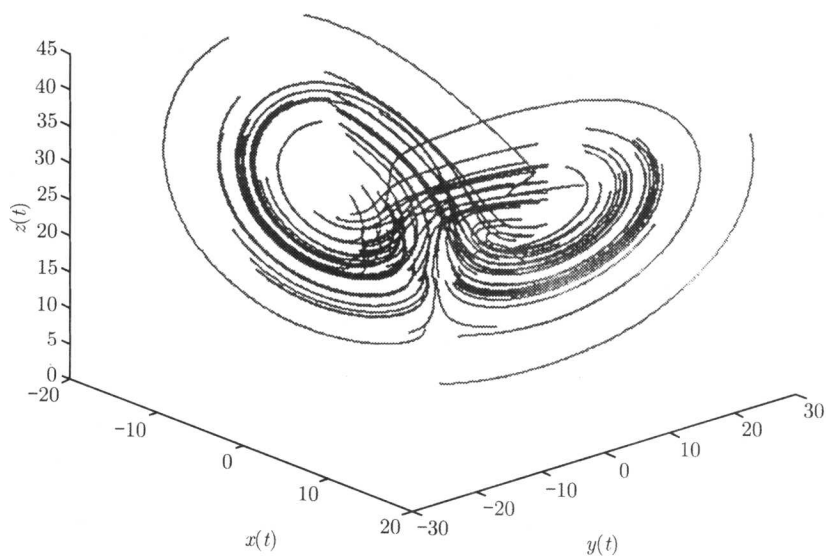


图 6 混沌吸引子: $m_1 = m_3 = -0.5, m_2 = 0.5, \varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1, \varepsilon_2 = -0.05$

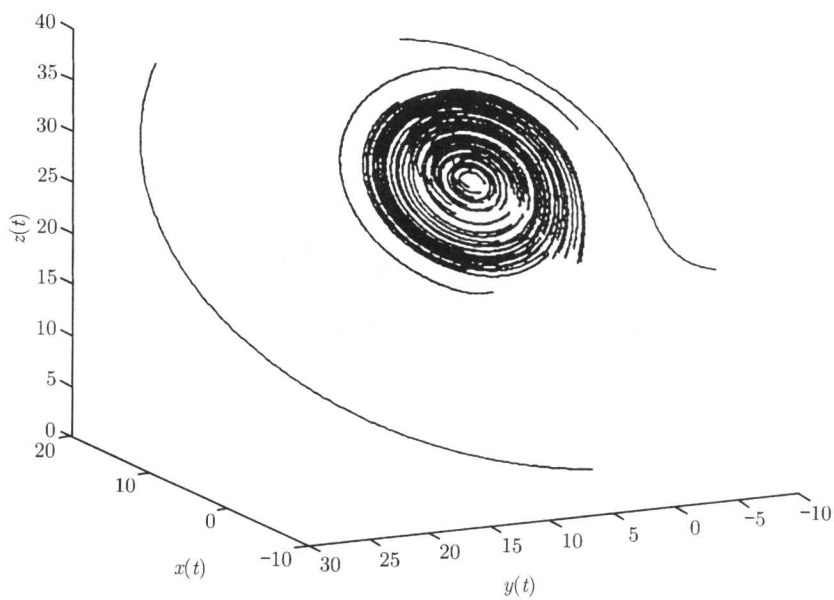


图 7 混沌吸引子: $m_1 = m_3 = 0.5, m_2 = 12, \varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1, \varepsilon_2 = -0.05$

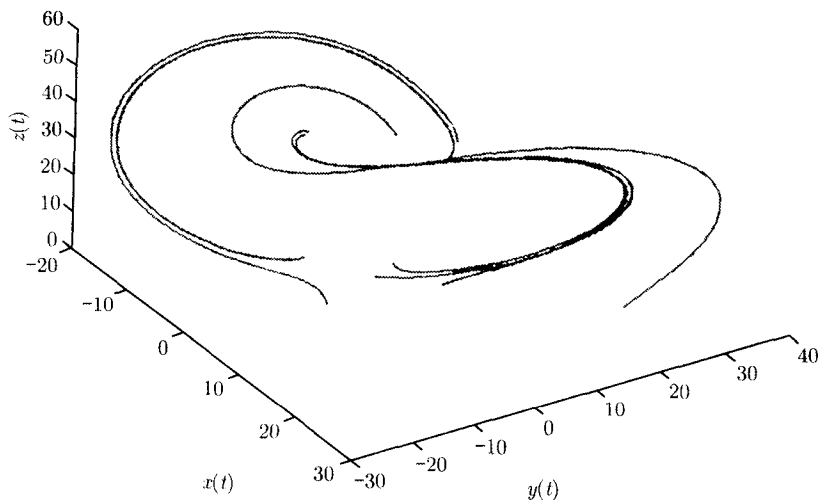


图 8 近似周期的轨道: $m_1 = m_2 = 0, m_3 = 0.05, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1, \varepsilon_3 = 0.05$

注意脉冲参数选择不同时, 洛伦茨吸引子的轨道发生了变化, 出现了单圈的吸引子, 甚至是近似于周期的轨道 (这是在 m_i, ε_i 均是充分小的时候产生的). 所以脉冲的输入, 不仅能使得原来的规则的系统, 出现复杂的现象, 也能使得完全混乱的吸引子, 出现一定的规律.

例 5^[3] 整合 - 激发电路模型.

对于单个的动态神经元, 根据电流守恒定律, 我们可以考虑如下系统:

$$\dot{\phi}(t) = f[\phi(t)] + A_1(t)\delta[\phi(t) - \theta] + A_2(t)\delta(t - T), \quad (25)$$

其中 $\phi(t)$ 表示单个神经元的膜电位, 或称作为神经元的内部状态; 连续函数 $f(\cdot)$ 表示取决于神经元本身内部机制的膜上的电流函数; $\delta(\cdot)$ 表示 δ 函数, 常数 θ 表示神经元激发释放冲动的电势阈值; T 表示外部输入强制神经元激发释放冲动的时刻; 系数 $A_i (i = 1, 2)$ 表示相应的电势强度. 因为考虑的是单个神经元, 自然所涉及的其他神经元的电流输入就不予考虑了.

如果我们假设神经元膜电势 $\phi(t)$ 在 $t = T$ 的时刻并没有达到阈值, 并且注意到如下的事实:

$$\int_{t_0}^{\hat{t}} A_2(t)\delta(t - T)dt = A_2(\hat{t})\varepsilon(\hat{t} - T),$$

其中分布函数

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

那么对系统 (25) 两边分别从时刻 t_0 到 $(T+0)$ 和 t_0 到 $(T-0)$ 积分, 得

$$\phi(T+0) - \phi(T-0) = A_2(T+0).$$

类似地, 通过积分计算可以处理阈值 θ , 并得到与上式相类似的结果. 于是得到描述单个神经元的膜电势动力学行为的脉冲微分系统:

$$\begin{cases} \dot{\phi}(t) = f[\phi(t)], & \text{当 } \phi(t) \neq \theta \text{ 且 } t \neq T \text{ 时}, \\ \Delta I_1 = \phi(t+0) - \phi(t) = A_1(t+0), & \text{当 } \phi(t) = \theta \text{ 时}, \\ \Delta I_2 = \phi(t+0) - \phi(t) = A_2(t+0), & \text{当 } t = T \text{ 时}. \end{cases} \quad (26)$$

单个整合-激发电路模型的电路示意图由图 9 给出.

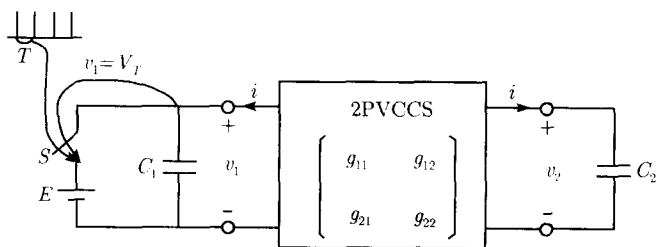


图 9 整合-激发电路模型的电路示意图

从图 9 可以看到, 两个出口的电势控制电源 (2PVCCS) 和两个电容 C_1, C_2 构成了一个振荡电路. 电键 S 闭合表示或者是神经元自身释放脉冲, 或者是神经元收到来自外来的刺激后释放脉冲; 亦即或者是电容电势 v_1 达到了阈值电势 V_T 后使得电键 S 闭合, 或者是外在周期的脉冲输入使得电键 S 闭合. 无论是自身达到阈值还是受到刺激后释放脉冲, 当在电键 S 被闭合的瞬时, 左边电路两端 (电容 C_2) 的电势 v_1 被重新置为基准电势 E , 而右边电路两端 (电容 C_2) 的电势 v_2 保持不变. 这样我们就可以给出如下的二维脉冲微分方程组以描述整合-激发电路模型:

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = \frac{g_{11}}{C_1} v_1 + \frac{g_{12}}{C_1} v_2, & \text{当 } v_1 < V_T \text{ 且 } t \neq nr \text{ 时}, \\ \frac{dv_2}{dt} = \frac{g_{21}}{C_2} v_1 + \frac{g_{22}}{C_2} v_2, & n = 1, 2, 3, \dots, \\ \Delta v_1 = E - v_1(t), \Delta v_2 = 0, & \text{当 } v_1(t) = V_T \text{ 或 } t = nr \text{ 时}, \end{cases} \quad (27)$$

其中常数 $r > 0$ 表示是外界刺激的输入周期. 另外, 我们还可以分别定义电路释放脉冲的序列: $v_0(t)$ ——由达到阈值释放的脉冲电势 (输入脉冲序列), $u(t)$ ——由外界周期输入导致释放的脉冲信号 (输入脉冲序列). 它们可以表示如下:

$$v_0(t) = \begin{cases} V_H, & \text{当 } v_1 = V_T \text{ 时}, \\ V_L, & \text{当 } v_1 < V_T \text{ 时}. \end{cases}$$