高等学校教材

高等数学教程

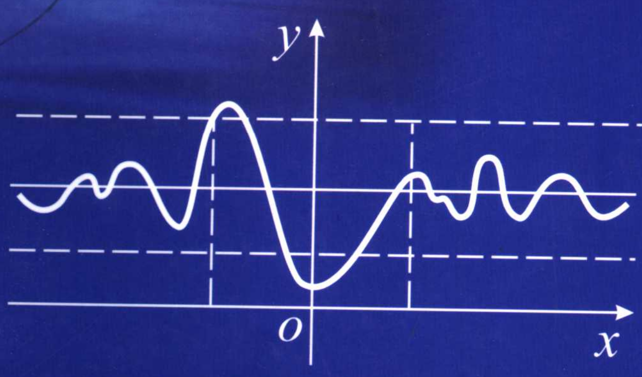
GAODENG SHUXUE JIAOCHENG

主　编　　李大勇　谢云荪

副主编　　李世贵　严弈鹏

3

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$



UESTCP

电子科技大学出版社

高等数学教程

主　编　李大勇　谢云荪
副主编　李世贵　严弈鹏

电子科技大学出版社

内 容 提 要

本书是为适应高等教育大众化的需要，根据全国《高等工程专科高等数学课程教学基本要求》，结合编者多年教学实践经验，参考国内外相关教材编写而成的，其主要特点是：精选基本内容，优化体系结构，注重知识的内在联系；适当加强应用；适当削弱基础理论；适当淡化运算技巧；精选例题与习题；教学适用性强．

本书内容包括函数的极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、常微分方程、空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数，共八章．每节后配有习题；每章后配有本章小结及复习题；书后附录中有二阶与三阶行列式简介、常用曲线图；最后给出了习题答案．

本书叙述清晰，深入浅出，通俗易懂，详略得当，便于教学．本书可作为高等专科学校、职业技术学院、成人教育学院（全日制、夜大、函授等）理工科各专业的高等数学课程教材或教学参考书．

图书在版编目（CIP）数据

高等数学教程/李大勇，谢云荪主编．—成都：电子科技大学出版社，2004.8

ISBN 7-81094-633-1

Ⅰ.高… Ⅱ.①李…②谢… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 091079 号

高等数学教程

主　编　李大勇　谢云荪

副主编　李世贵　严弈鹏

出　　版： 电子科技大学出版社　（成都建设北路二段四号）

责任编辑： 徐守铭

发　　行： 新华书店经销

印　　刷： 成都市海翔印务有限公司

开　　本： 787mm×1092mm　1/16　**印张：** 19.375　**字数：** 480 千字

版　　次： 2004 年 8 月第一版

印　　次： 2004 年 8 月第一次印刷

书　　号： ISBN 7-81094-633-1/O·33

印　　数： 1-4000 册

定　　价： 25.00 元

前　言

本书是为适应高等教育大众化的需要，为高等专科学校、职业技术学院和成人教育学院理工科学生编写的高等数学课程教材．本教材是根据全国《高等工程专科高等数学课程教学基本要求》，结合编者多年教学实践经验，参考国内外相关教材编写而成的，其主要特点有以下几个方面：

(1)精选内容，优化体系结构．精选内容，使学生在有限的学时内，掌握高等数学的基本知识；注重知识的内在联系，着重处理好教材的重点、难点和关键．注意与中学的衔接，在教材开始函数部分主要是复习高中学过的集合、映射、函数等有关概念，在此基础上介绍极限与连续．

(2)适当加强应用．对于与实际应用联系较多的基础知识和基本方法，予以适当加强．对概念和理论的叙述尽量运用物理背景和几何直观，使学生在感性认识的基础上，掌握抽象的数学思想与方法．

(3)适当削弱基础理论．考虑到学生的实际，对于基础理论以必需、够用为度，在保持数学本身系统性的前提下，对难度较大的部分基础理论，不作严密论证，与本科相比，有了较大的削弱．

(4)适当淡化运算技巧．本书注重基本方法、基本技能、基本运算的训练，不追求过分复杂的计算和较高的运算技巧．

(5)精选例题与习题，便于自学．文字叙述力求通俗易懂，深入浅出，详略得当．对例题与习题精心挑选，把握难易适度，具有典型性、启发性和趣味性．

(6)每一章最后附有小结与复习题．为了帮助学生掌握每一章的知识结构，把握重点与难点，在每一章后面对本章的基本内容及注意事项加以总结；为了帮助学生复习、巩固与提高，每章后面附有复习题，供学生练习；此外，书后附录中有二阶与三阶行列式简介、常用曲线图，供学生参考．

本书主编是李大勇、谢云荪；副主编是李世贵、严弈鹏；参加本书编写的还有周定均、刘莉莎、王蕾、谭婕、周德荣．

本教材 120 ~ 130 学时可以讲完，少量带星号的内容可根据专业需要酌情取舍．本书可作为高等专科学校，职业技术学院、成人教育学院(全日制、夜习、函授等)理工科各专业的高等数学课程教材或教学参考书．

限于编者水平，疏漏之处在所难免，敬请同行及读者批评指正．

编　者

2004 年 6 月

目　录

第一章　函数的极限与连续

数学是研究现实世界中空间形式与数量关系的学科．初等数学研究的对象基本上是不变量，而高等数学研究的是变量．变量与变量之间相互依赖的函数关系及其属性是高等数学的主要研究对象，极限概念及其运算法则是研究函数的主要工具，高等数学中的许多概念及运算法则都是在研究极限的基础上建立起来的．

本章先复习中学学过的集合、映射与函数的一些基本知识，然后研究函数的极限与连续性等基本概念以及它们的运算法则和性质．

第一节　映射与函数

一、集合

集合是数学的一个最基本的概念，不能用比它更简单的概念来定义它，只能作描述性的解释．集合论的创始人康托尔(G. Cantor)是这样描述的："集合是我们感觉或思维所完全确定的某些对象汇总成一个整体的结果；这些对象称为该集合的元素．"这就是说，具有某种确定性质的对象的全体，称为**集合**(简称为**集**)．组成集合的各个对象称为集合的**元素**．

对于一个给定的集合，集合中的元素是确定的．这就是说，任何一个对象或者是这个给定集合的元素，或者不是它的元素．

对于一个给定的集合，集合中的元素是互异的．这就是说，集合中的任何两个元素都是不同的对象；相同的对象归入任何一个集合时，只能算作这个集合的一个元素．因此，集合中的元素是没有重复出现的．

通常集合的表示方法，有列举法和描述法．

把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合的方法，称为**列举法**．例如，由数 1，2，3，4，5 组成的集合，可以表示为$\{1,2,3,4,5\}$．用列举法表示集合时，不必考虑元素之间的顺序．例如由四个元素 $-3,0,2,5$ 组成的集合，可以表示为$\{-3,0,2,5\}$，也可以表示为$\{0,2,-3,5\}$等．

应注意，a 与$\{a\}$是不同的：a 表示一个元素；$\{a\}$表示一个集合，这个集合只有一个元素 a．

把集合中的元素的公共属性描述出来，写在大括号内表示集合的方法，称为**描述法**．这时往往在大括号内先写上这个集合的元素的一般形式，再画一条竖线，在竖线右边写上这个集合的元素的公共属性．例如，由不等式 $x-3>2$ 的所有解组成的集合(即 $x-3>2$ 的解集)，可以表示为

$$\{x \mid x-3>2\};$$

由抛物线 $y=x^2+1$ 上所有的点的坐标组成的集合，可以表示为

$$\{(x,y) \mid y=x^2+1\}.$$

集合通常用大写的拉丁字母 $A,B,C,\cdots$表示，集合的元素用小写的拉丁字母 $a,b,c,\cdots$表示．如果 a 是集合 A 的元素，就说 a **属于**集合 A，记为 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a **不属于** A，记为 $a\notin A$(或 $a \bar{\in} A$)．

全体自然数的集合通常简称**自然数集**，记为 N；全体整数的集合通常简称**整数集**，记为 Z；全体有理数的集合通常简称**有理数集**，记为 Q；全体实数的集合通常简称**实数集**，记为 R．

对于两个集合 A 与 B,如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,那么集合 A 称为集合 B 的**子集**,记为 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$),读作"A 包含于 B"(或"B 包含 A").

当 A 不是 B 的子集时,可以记为 $A\not\subseteq B$(或 $B\not\supseteq A$),读作"A 不包含于 B"(或"B 不包含 A").

对于任何一个集合 A,因为它的任何一个元素都属于集合 A 本身,所以 $A\subseteq A$,也就是说,**任何一个集合是它本身的子集**.

为了方便起见,我们把不含任何元素的集合称为**空集**,记为 $\varnothing$. 我们规定**空集是任何集合的子集**. 也就是说,对于任何集合 A,有 $\varnothing\subseteq A$.

如果 A 是 B 的子集,并且 B 中至少有一个元素不属于 A,那么集合 A 称为集合 B 的**真子集**,记为 $A\subset B$(或 $B\supset A$).

容易知道,对于集合 A,B,C,如果 $A\subseteq B,B\subseteq C$,那么 $A\subseteq C$.

对于两个集合 A 与 B,如果 $A\subseteq B$,同时 $B\subseteq A$,那么集合 A 与集合 B 称为**相等**,记为 $A=B$. 读作"A 等于 B".

例如,$A=\{x\mid x^2+3x+2=0\}$,$B=\{-1,-2\}$,则 $A=B$.

由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合,称为 A 与 B 的**并集**,如图 1-1(a)阴影部分所示,记为 $A\cup B$,即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合,称为 A 与 B 的**交集**,如图 1-1(b)阴影部分所示,记为 $A\cap B$,即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A,\text{且 } x\in B\}.$$

由所有属于集合 A 但不属于集合 B 的元素所组成的集合称为 A 与 B 的**差集**,如图 1-1(c)阴影部分所示,记为 $A-B$,即

$$A-B=\{x\mid x\in A,\text{但 } x\notin B\}.$$

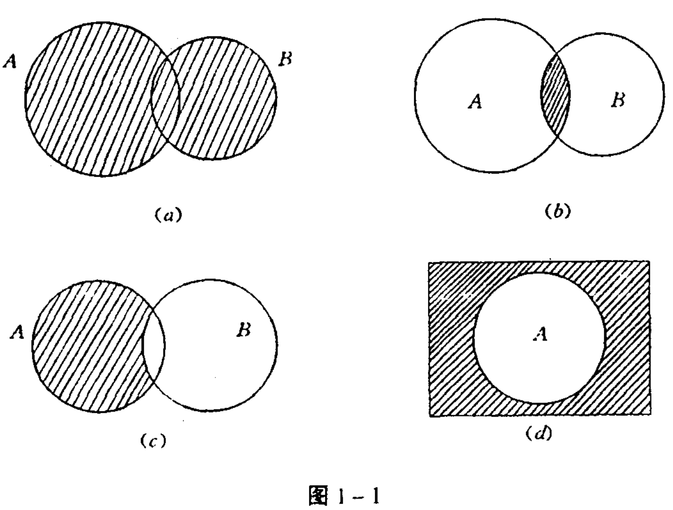


图 1-1

在研究集合与集合之间的关系时,在某些情况下,这些集合都是某一个给定的集合的子集,这个给定的集合可以看作一个**全集**,用符号 I 表示. 也就是说,全集含有我们所要研究的各个集合的全部元素. 例如,在研究数集时,常常把实数集 R 作为全集;在研究图形的集合时,常常把所有的空间图形组成的集合作为全集.

已知全集 I,集合 $A\subseteq I$,由 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合,称为集合 A 在集合 I 中的**补集**,如图 1-1(d)阴影部分所示,记为 $\bar{A}$,即

$$\bar{A} = I - A = \{x \mid x \in I, 但\ x \notin A\}.$$

例如设全集是全体实数集合 R,又设集合 $A = \{x \mid x > 0\}, B = \{x \mid -1 < x < 2\}$,则

$A \cup B = \{x \mid x > -1\}$, $A \cap B = \{x \mid 0 < x < 2\}$, $A - B = \{x \mid x \geqslant 2\}$, $\bar{A} = \{x \mid x \leqslant 0\}$.

常用的实数集合是区间与邻域,下面介绍其概念.

设 a, b 是两个实数且 $a < b$,称数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 为**开区间**,记为 (a, b),即

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}.$$

称数集 $\{a \leqslant x \leqslant b\}$ 为**闭区间**,记为 $[a, b]$,即

$$[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}.$$

这里称 a 和 b 为闭区间 $[a, b]$ 的**端点**.

类似地,我们可以定义**半开半闭区间** $[a, b)$ 和 $(a, b]$,**无穷区间** $(-\infty, +\infty)$ 和 $[a, +\infty)$ 等.即

$$[a, b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}, \qquad (a, b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}.$$
$$(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$$
$$[a, +\infty) = \{x \mid a \leqslant x < +\infty\}, \quad (a, +\infty) = \{x \mid a < x < +\infty\}$$
$$(-\infty, b] = \{x \mid -\infty < x \leqslant b\}, \quad (-\infty, b) = \{x \mid -\infty < x < b\}.$$

这里,符号"$+\infty$"读作"正无穷大",符号"$-\infty$"读作"负无穷大",它们不是实数,仅是一种符号.称开区间、闭区间和半开半闭区间为**有限区间**,其余的为**无穷区间**.当区间有限时,称其右端点与左端点的坐标之差 $b - a$ 为该区间的**长度**.

上述任何一种区间都可在数轴上表示出来,如图 1-2 所示.无穷区间 $(-\infty, +\infty)$ 表示在数轴上,就是整个实数轴.

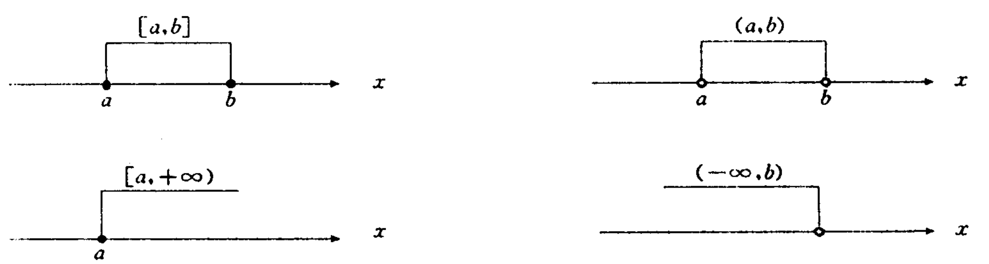


图 1-2

当 x 在开区间 (a, b) 内取值时,称 x 属于该区间,用 $x \in (a, b)$ 表示.以后,我们把有限区间与无穷区间简称为**区间**,且常用字母 I 表示.

邻域是一个与区间有关并且经常用到的概念,定义如下:

设 a 与 δ 是两个实数且 $\delta > 0$,称以 a 为中心且长度等于 2δ 的开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 为**点 a 的 δ 邻域**,记为 $U(a, \delta)$,即 $U(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta)$.这里点 a 称为这邻域的**中心**,δ 称为这邻域的**半径**.

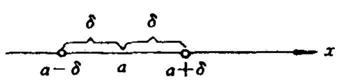
点 a 的 δ 邻域用集合可表示为 $U(a, \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\}$.

在几何上,点 a 的 δ 邻域是以 a 为中心,δ 为半径的开区间,如图 1-3(a)所示.

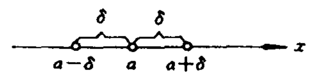
有时用到的邻域需要去掉邻域中心 a,称去掉中心 a 后的邻域为点 a 的**去心 δ 邻域**,如图 1-3(b)所示,记为 $U(\hat{a}, \delta)$,即

$$U(\hat{a}, \delta) = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\},$$

这里 $0 < |x - a|$ 表示 $x \neq a$.



(a)



(b)

图 1-3

二、映射与函数的概念

在中学教材中已介绍过映射与函数的概念．

定义 1 设 A,B 是两个集合，如果按照某种对应法则 f，对于集合 A 中的任何一个元素，在集合 B 中都有唯一的元素和它对应，这样的对应法则 f 称为从集合 A 到集合 B 的**映射**，记为

$$f:A\to B.$$

A 中的元素 a 对应的 B 中的元素 b 称为 a 的**象**，a 称为 b 的**原象**．

定义 2 设 X 和 Y 为两个非空实数集，f 为 X 到 Y 的一个映射，则称 f 为定义在数集 X 上的函数(图 1-4)．记为

$$f:X\to Y \quad 或 \quad y=f(x),x\in X$$

其中，x 称为**自变量**；y 称为**因变量**；X 称为函数 f 的**定义域**，记为 D_f；$f(x)$ 表示函数 f 在 x 处对应的函数值，全体函数值的集合称为函数 f 的**值域**，记为 $Z_f=\{y\mid y=f(x),x\in X\}$，显然 $Z_f\subseteq Y$．

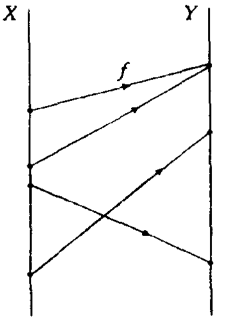


图 1-4

简单地说，函数就是两个实数集合之间的映射．函数的定义有两个基本要素，就是定义域与对应法则，为了加深对函数概念的理解，我们对这两个基本要素作一些简要的说明．

1．定义域

在研究函数关系时，必须注意它的定义域．只有当自变量在定义域内取值时，因变量才有确定的对应值，即函数才有意义．在考虑函数定义域时，对于表示实际问题的函数关系，定义域应由所研究问题的实际意义来确定．如研究物体的自由落体运动，如果用 T 表示物体落地的时刻，则自由落体运动中物体下落的距离与时间的函数关系式 $h=\frac{1}{2}gt^2$ 的定义域就是区间$[0,T]$．

在数学中，为了对各种函数的性质作深入的研究，需要舍弃函数的实际意义，抽象地研究函数的分析表达式(即用来表示函数的公式)．对于用数学公式表示的函数 $y=f(x)$，其定义域是使这个表达式有意义的自变量的一切值组成的集合．例如下列情况：

(1)分母不得为零；

(2)偶次方根的被开方式必须大于或等于零；

(3)对数的真数部分必须大于零，底数部分必须大于零且不等于 1；

(4)反正(余)弦函数其自变量的绝对值不能大于 1．

这样一来，求函数的定义域往往就归结为解不等式或不等式组．在高等数学中，定义域通常用区间表示．

例 1 求下列函数的定义域：(1) $y=\frac{1}{|x|-x}$；　(2) $y=\sqrt{5-2x}+\frac{1}{x+1}$．

解 (1)要使 y 有确定的值，必须使 $|x|-x\neq0$，即 $x<0$，于是函数 $y=\frac{1}{|x|-x}$ 的定义域为$(-\infty,0)$．

(2)要使 y 有确定的值,x 必须同时满足不等式组

$$\begin{cases}5-2x\geqslant 0\\ x+1\neq 0\end{cases}$$

解得 $x\leqslant\frac{5}{2}$ 且 $x\neq -1$,于是所求定义域为区间$(-\infty,-1)\cup(-1,\frac{5}{2}]$.

2. *对应法则*

习惯上,常用 $f(x)$表示 x 的函数．实际上,字母 f 表示对应法则,表示函数关系,称为**函数符号**．$f(x)$表示"函数 f 在 x 处的值"．即 $f(x)$表示与自变量 x 对应的函数值．例如,$f(1)$,$f(x_0)$、$f(x_0+\Delta x)$,$f[\varphi(x)]$分别表示函数 $y=f(x)$在点 1、x_0、$x_0+\Delta x$ 及$\varphi(x)$处的值．这时,f 的作用是指明对括号里的数或公式按照怎样的规则运算．

除了用 f 表示函数关系外,还可以用其他字母来表示．例如,$y=F(x)$,$y=\varphi(x)$等等．

应当注意,在同一过程中,不同的函数关系要用不同的记号来表示,以免引起混淆．例如,圆周长 L 的圆面积A 都是半径 r 的函数,如果在同一问题中要用到这两个函数,就必须用两个不同的函数记号来表示．比如,可用 $L=f(r)$表示 $L=2\pi r$,用 $A=\varphi(r)$表示 $A=\pi r^2$.

例 2　设$f(x)=\frac{1}{1+x}$,求 $f(0)$,$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$,以及 $f[f(x)]$的值．

解
$$f(0)=\frac{1}{1+0}=1$$
$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\frac{1}{1+(x_0+\Delta x)}-\frac{1}{1+x_0}=-\frac{\Delta x}{(1+x_0+\Delta x)(1+x_0)}$$
$$f[f(x)]=\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}=\frac{1+x}{2+x}.$$

例 3　若 $f(x+1)=x^2-3x+2$,求 $f(x)$.

解 1(配方法)　因为

$$f(x+1)=x^2-3x+2=(x+1)^2-5(x+1)+6$$

所以
$$f(x)=x^2-5x+6.$$

解 2(变量代换)　令 $x+1=u$,则 $x=u-1$,于是

$$f(u)=(u-1)^2-3(u-1)+2=u^2-5u+6$$

所以
$$f(x)=x^2-5x+6.$$

三、函数的表示法

常用的表示函数的方法有三种,它们分别是表格法、图示法与公式法．

1. *表格法*

把自变量所取的值和其对应的函数值列成表格,那么不需要计算就能知道函数值,这就是**函数表格法**的优点．常见的有三角函数表、对数函数表等．表格法的缺点是列出的函数值毕竟有限,并且不容易从表中观察出函数的变化情况．

2. *图示法*

用坐标系上的曲线把函数表示出来,叫做表示函数的**图示法**．它的最大优点是直观,从图中曲线可以很方便地看出两个变量之间的关系,因此常常要把函数的图形作出来．如果给出一个函数 $y=f(x)$,我们把坐标满足方程 $y-f(x)=0$ 的点(x,y)在坐标平面上的集合,称为**函数的图形,即平面点集**$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D_f\subseteq R\}$.

3. *公式法*

如果变量 x 和变量 y 之间的函数对应关系能用某些已知的运算(或指定的特定运算符号)表示出来,我们就得到一个包含 x 和 y 的关系式,用这种关系式给出函数的方法叫做**公式法**．例如,前面三个例子所讨论的函数都是用公式法表示的．

有时,一个函数在定义域的不同部分需要用不同的式子来表示,称这种函数为**分段函数**．

例 4　绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

是一个分段函数.它的定义域 D 是无穷区间 $(-\infty,+\infty)$,值域 Z 是区间 $[0,+\infty)$,其图形如图 1-5 所示．

例 5　设 x 为任一实数,将不超过 x 的最大整数记为 $[x]$. 例如, $\left[\frac{5}{7}\right]=0$, $[\sqrt{2}]=1$, $[\pi]=3$, $[-1]=-1$, $[-3.5]=-4$. 把 x 看作自变量,则函数

$$y=[x]$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 Z 为所有整数的集合．它的图形如图 1-6 所示,该图形称为**阶梯曲线**．在 x 为整数值处,图形发生跳跃,跃度为 1,这个函数称为**取整函数**．

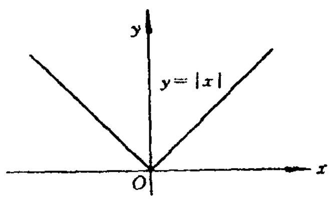


图 1-5

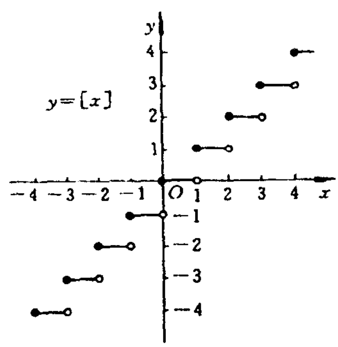


图 1-6

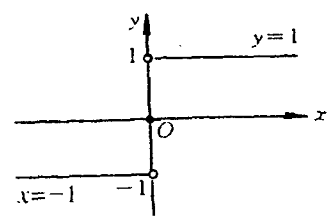


图 1-7

例 6　符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

$D_f=(-\infty,+\infty)$, $Z_f=\{-1,0,1\}$,如图 1-7 所示.

例 7　设有函数

$$y=f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x+1, & x>1\end{cases}$$

写出它的定义域和值域,并求 $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(\sqrt{2})$, $f(x-1)$.

解　这是定义在区间 $[0,+\infty)$ 上的一个函数,当 $x\in[0,1]$ 时,对应的函数值由 $y=2\sqrt{x}$ 计算;当 $x\in(1,+\infty)$ 时,对应的函数值由 $y=x+1$ 计算．它的图形如图 1-8 所示,值域为 $[0,+\infty)$,且

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2},\quad f(\sqrt{2})=\sqrt{2}+1$$

$$f(x-1)=\begin{cases}2\sqrt{(x-1)}, & 0\leqslant x-1\leqslant 1\\ (x-1)+1, & x-1>1\end{cases}$$

即

$$f(x-1)=\begin{cases}2\sqrt{x-1}, & 1\leqslant x\leqslant 2\\ x, & x>2\end{cases}$$

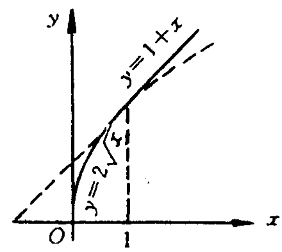


图 1-8

显然，$y=f(x-1)$的图形可以由 $y=f(x)$的图形向右平移一个单位来得到．

四、函数的几种特性

研究函数的各种性质是高等数学的重要内容之一，在后面的各章中我们将对函数的连续性、可微性以及可积性进行深入的研究．这里为了便于今后应用，将中学里已经学过的函数的几种性质简单归纳如下．

1. 函数的单调性

定义 3 设函数 $f(x)$的定义域为 D，区间 $I\subseteq D$．如果对于 I 上的任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时恒有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$)，则称函数 $f(x)$在区间 I 上**单调增加**(或**单调减少**)，I 为单增(或单减)区间．如图 1-9 所示．

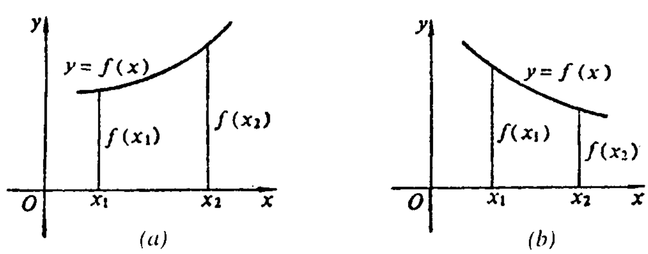


图 1-9

如果函数 $f(x)$在定义域 D 上单调增加(或单调减少)，则称函数是**单调增加(或单调减少)函数**．单调增加函数与单调减少函数统称为**单调函数**．

2. 函数的奇偶性

定义 4 设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称(即若 $x\in D$，必有 $-x\in D$)．如果对于任一 $x\in D$，$f(-x)=f(x)$恒成立，则称 $f(x)$为**偶函数**；如果对于任一 $x\in D$，$f(-x)=-f(x)$恒成立，则称 $f(x)$为**奇函数**．

例如，函数 $y=x^2$，$y=x^4-3x^2+1$，$y=\cos x$ 都是偶函数；函数 $y=x^3$，$y=\tan x$，$y=\sin x$ 都是奇函数；而函数 $y=\sin x+\cos x$，$y=x^3-x^2$ 则是非奇、非偶函数．

偶函数的图形关于 y 轴是对称的．因为若 $f(x)$是偶函数，则 $f(-x)=f(x)$．所以，如果 $A(x,f(x))$是图形上的点，则与它关于 y 轴对称的点 $A'(-x,f(x))$也在图形上(图 1-10)．

奇函数的图形关于原点是对称的，并且通过原点．若 $f(x)$是奇函数，则 $f(-x)=-f(x)$．所以，如果 $A(x,f(x))$是图形上的点，则与它关于原点对称的点 $A''(-x,-f(x))$也在图形上；而在 $x=0$ 时，不难得到 $f(0)=0$，故函数图形过原点(图 1-11)．

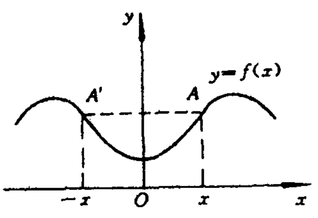


图 1-10

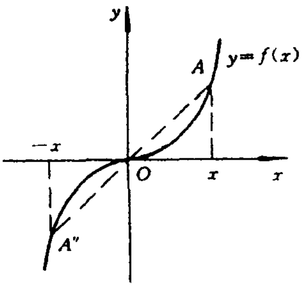


图 1-11

3. 函数的周期性

定义 5 设函数 $f(x)$的定义域为 D,如果存在一个不为零的数 T,使得对于任一 $x\in D$ 有$(x\pm T)\in D$,且 $f(x+T)=f(x)$恒成立,则称 $f(x)$为**周期函数**,T 称为$f(x)$的**周期**.

通常我们说周期函数的周期是指**最小正周期**(图 1-12).例如,函数 $\sin x$,$\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数,而函数$|\sin x|$,$\tan x$,是以 π 为周期的周期函数.

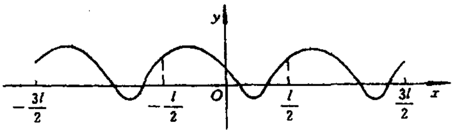


图 1-12

4. 函数的有界性

定义 6 设函数 $f(x)$的定义域为 D,区间 $I\subseteq D$.如果存在一个正数 M,使得对于 I 中的每一点 x,都有$|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$在区间 I 内有界;否则,称 $f(x)$在 I 内无界.

如果 $f(x)$在整个定义域 D 内有界,称 $f(x)$为**有界函数**;否则,称 $f(x)$为**无界函数**.

例如,函数 $f(x)=\sin x$ 是有界函数,因为对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$,都有$|\sin x|\leqslant 1$ 成立.这里,只要取 $M=1$,当然,也可以取大于 1 的任意正数作为 M,总有$|\sin x|\leqslant M$.又如,函数$f(x)=\frac{1}{x}$在开区间(1,2)内有界,但在其定义域内却是无界函数.因为当 $1<x<2$ 时,有$\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$,所以$f(x)$在(1,2)内有界;而在 $x=0$ 的邻域,函数 $f(x)$无界,从而 $f(x)$在定义域内无界,故 $f(x)$是无界函数(图 1-13).

因为$|f(x)|\leqslant M$,有 $-M\leqslant f(x)\leqslant M$,所以几何上,有界函数的图形必介于两条直线 $y=-M$和 $y=M$ 之间(图 1-14).

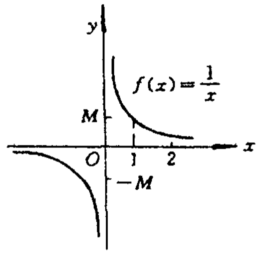


图 1-13

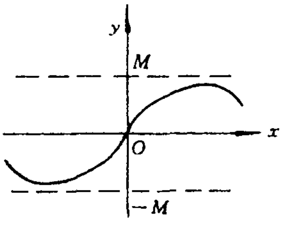


图 1-14

五、反函数

在中学我们已经学过一一映射、逆映射及反函数的概念．

定义 7 设 A、B 是两个集合，$f:A\to B$ 是从集合 A 到集合 B 的映射，如果在这个映射的作用下，对于集合 A 中的不同元素，在集合 B 中有不同的象，而且 B 中每一个元素都有原象，那么这个映射就叫做 **A 到 B 上的一一映射**．

设 $f:A\to B$ 是集合 A 到集合 B 上的一一映射，如果对于 B 中的每一个元素 b，使 b 在 A 中的原象 a 和它对应，这样所得的映射称为映射 $f:A\to B$ 的**逆映射**，记为 $f^{-1}:B\to A$．

从逆映射的定义可以知道，映射 $f:A\to B$ 也是映射 $f^{-1}:B\to A$ 的逆映射，而且 $f^{-1}:B\to A$ 也是一一映射（从 B 到 A 上的一一映射）．

定义 8 如果确定函数 $y=f(x)$ 的映射 $f:A\to B$ 是 $f(x)$ 的定义域 A 到值域 B 上的一一映射，那么这个映射的逆映射 $f^{-1}:B\to A$ 所确定的函数 $x=f^{-1}(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**．函数 $y=f(x)$ 的定义域、值域分别是函数 $x=f^{-1}(y)$ 的值域、定义域．

显然，如果 $x=f^{-1}(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，那么 $y=f(x)$ 也是 $x=f^{-1}(y)$ 的反函数．因此，$y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 互为反函数．

例如 $y=x^3$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，它的反函数 $x=\sqrt[3]{y}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$．

又如 $y=x^2$ 的反函数 $x=\pm\sqrt{y}$ 是多值反函数，如果对 $y=x^2$，限制 $x\in[0,+\infty)$，则它的反函数是单值函数 $x=\sqrt{y}$，$y\in[0,+\infty)$．今后如无特别申明，所说的反函数都指单值反函数．

显然

$$f^{-1}[f(x)]=f^{-1}(y)=x,\qquad f[f^{-1}(y)]=f(x)=y.$$

在函数 $x=f^{-1}(y)$ 中，y 是自变量，x 是因变量．但习惯上常将自变量写成 x，因变量写成 y，因此我们把 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 改写成 $y=f^{-1}(x)$，仍然称 $y=f^{-1}(x)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数．例如把 $y=x^3$ 的反函数 $x=\sqrt[3]{y}$ 改写成 $y=\sqrt[3]{x}$．从上面看到，要求反函数时，只须从关系式 $y=f(x)$ 中解出 x，得其表达式 $x=f^{-1}(y)$，再按习惯改写成 $y=f^{-1}(x)$ 就得到函数 $y=f(x)$ 的反函数．

$y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 的图形在给定的直角坐标系中是同一曲线．当把 $x=f^{-1}(y)$ 改写成 $y=f^{-1}(x)$ 后，$y=f(x)$ 的图形与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称，如图 1－15 所示．事实上，设 (a,b) 为 $y=f(x)$ 图形上任意一点，即 $b=f(a)$，由反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义有 $a=f^{-1}(b)$，故 (b,a) 在 $y=f^{-1}(x)$ 的图形上，而点 (a,b) 与点 (b,a) 关于直线 $y=x$ 对称，由点 (a,b) 的任意性可知，$y=f(x)$ 的图形与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称．

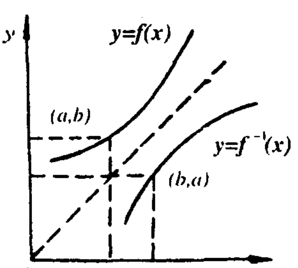


图 1－15

从图 1－15 中不难看出，若 $y=f(x)$ 是单值单调函数，则其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 也是单值单调的．例如 $y=x^3$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的单值单调增加函数，它的反函数 $y=\sqrt[3]{x}$ 也是 $(-\infty,+\infty)$ 上的单值单调增加函数．

六、基本初等函数

常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**．关于这几种函数的研究，我们在中学已经获得了有关的知识，这里为了今后应用的方便，仅依次介绍它们的一些简单性质并附上图形，以便读者查阅．