

大学生学习的良师益友 考研、竞赛的资料指南

高等数学题典

——好题精编

上册

黄光谷 等编

44
1

 机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



大学生学习的良师益友 考研、竞赛的资料指南

高等数学题典

好题精编

(上册)



机械工业出版社

本书精选了高等数学(或微积分、数学分析)中最常用的五种优秀教材或图书中的有代表性的习题和考题,按照《2004年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》(简称“考纲”)“数学一”中高等数学所列顺序编目。共分八章(上、下册各四章),各章开始列有“考纲”的考试要求,各节开始列有主要概念、方法、公式及定理,然后由浅入深,精选了相应节的好题并逐题作了分析或解答。本书集各家之长,精选各书好题于一书,循序渐进,具有代表性、典型性、系统性、资料性和很强的可读性。特别适于作为各工科、理科、农林、财经管理等本科或专科、“专升本”各专业大学生学习高等数学(或微积分、数学分析)课程的参考书,也是考研或参加数学竞赛者的优秀复习资料和指南,也可为教师提供命题参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学题典——好题精编 上册/黄光谷等编 —北京:
机械工业出版社, 2004.2

ISBN 7-111-13821-X 查 字 号

I. 高… II. 黄… III. 高等数学-习题
IV. 013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第000761号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)

策划编辑:刘小慧

责任编辑:郑玫 版式设计:张世琴 责任校对:魏俊云

封面设计:陈沛 责任印制:闫焱

北京京丰印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2004年3月第1版·第1次印刷

850mm×1168mm^{1/32}·14.5印张·385千字

定价:24.00元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换
本社购书热线电话(010)68993821、88379646
封面无防伪标均为盗版

前 言

要学好数学，除了深入理解数学理论和基本概念以外，就是会解决具体的数学问题，并从中掌握方法和培养能力，本书更侧重于后者。

本书精选了下列五种优秀教材或图书中的好习题或考题并作了分析或解答：

1. 同济大学应用数学系主编，高等数学，第五版，简称“高数”。

2. 同济大学应用数学系主编，微积分，第一、二版，简称“微积分”（本书上册用第一版；下册用第二版）。

3. 王绵森、马知恩主编，工科数学分析基础，简称“分析”。

4. 1987~2004年全国硕士研究生入学统一考试数学一至四试题，简称“考研题”；例如，注有（研，2003，一）者，指该题是2003年全国硕士研究生入学考试数学一的试题，其余类似。

5. 全国各省市或重点院校历年大学生数学竞赛试题，简称“竞赛题”；例如，注有（赛，1999，京）者，指该题是1999年北京市数学竞赛试题，其余类似。

本书按照《2004年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》（简称“考纲”）数学一高等数学所列考试内容的顺序编目，上册含函数、极限、连续，一元函数微分学，一元函数积分学，向量代数和空间解析几何四章；下册含多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数，常微分方程四章。各章开始列有“考纲”的考试要求，便于读者掌握分寸、明确学习和复习该章内容的目的和要求。“考纲”是根据“高等数学课程基本要求”制订的，所以达到了考试大纲的要求，也完全达到了教学要求。阅读

IV

各章考纲要求时，要注意其中了解、理解、会、掌握等用词层次的不同，以便把握分寸。

各章内根据内容，划分成了若干节，每节开始列有主要概念、方法、公式及定理，便于复习引用，其记号与同济大学应用数学系主编的《高等数学》（第五版）一致；然后按照由浅入深、由易到难和上述五种书的顺序，精选了各书的有代表性的习题或考题，给出了解答。有的题已有详细的分析或提示，则以其分析或提示代替解答，避免重复解答；简要的分析或提示用方头括号【】标出，这五种书中的习题或考题都较好，但本书限于篇幅，各精选其中约 $\frac{1}{5}$ 至 $\frac{1}{4}$ 合成一书，所以读此一书相当于读了五本书的精华。

特别感谢同济大学郭镜明教授。另外，本书中用到许多资料，向所引用书籍的作者一并表示感谢！

由于作者水平有限，书中可能会有缺点或错误，恳请读者和同行批评指正，以便再版时修改。

编者

主要符号

\mathbf{N} 、 \mathbf{Z} 、 \mathbf{Q} 、 \mathbf{R} 、 \mathbf{C} 分别表示自然数集、整数集、有理数集、实数集、复数集。

\mathbf{N}^* 表示正整数集 (\mathbf{N} 中去掉数 0 的集合)。

\mathbf{R}^\pm 表示正 (或负) 实数集。

$U(a, \delta)$ 表示以 a 为中心, δ 为半径的邻域。

$\overset{\circ}{U}(a, \delta)$ 表示去心邻域。

\forall 表示“任意给定”或“任给”、“对任意的”。

\exists 表示“存在”, “有”。

\triangleq 或 \triangleq 表示“记为”, “定义为”。

\implies 表示“推出”、“推得”或“蕴含”。

\iff 表示可“互推出”、“等价于”或“充要条件”。

A^c 或 $I \setminus A$ 表示 A 的余集或补集。

$f(x) \in B(I)$ 表示区间 I 上的全体有界函数之集。

$C(I)$ 表示 I 上全体连续函数之集。

$D(I)$ 表示 I 上全体可导函数之集。

$D^n(I)$ 表示 I 上全体 n 阶可导函数之集。

$R(I)$ 表示 I 上全体(黎曼)可积函数之集。

$f(x) \in C[a, b] \cap D(a, b)$ 表示函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且在开区间 (a, b) 内可导。

目 录

前 言

主要符号

第一章 函数、极限、连续	1
考纲要求	1
第一节 集合、映射与函数	1
一、主要概念、方法、公式及定理	1
二、高数题选解	2
三、微积分题选解	4
四、分析题选解	6
五、考研题选解	10
六、竞赛题选解	11
第二节 数列的极限	13
一、主要概念、方法、公式及定理	13
二、高数题选解	13
三、微积分题选解	14
四、分析题选解	15
五、考研题选解	17
六、竞赛题选解	18
第三节 函数的极限	20
一、主要概念、方法、公式及定理	20
二、高数题选解	20
三、微积分题选解	22
四、分析题选解	22
五、考研题选解	24
六、竞赛题选解	25

第四节 无穷小与无穷大 极限运算法则	26
一、主要概念、方法、公式及定理	26
二、高数题选解	27
三、微积分题选解	29
四、分析题选解	31
五、考研题选解	34
六、竞赛题选解	37
第五节 极限存在准则 两个重要极限	38
一、主要概念、方法、公式及定理	38
二、高数题选解	39
三、微积分题选解	41
四、分析题选解	43
五、考研题选解	45
六、竞赛题选解	46
第六节 函数的连续性与间断点 初等函数的连续性	49
一、主要概念、方法、公式及定理	49
二、高数题选解	49
三、微积分题选解	51
四、分析题选解	52
五、考研题选解	53
六、竞赛题选解	54
第七节 闭区间上连续函数的性质	56
一、主要概念、方法、公式及定理	56
二、高数题选解	56
三、微积分题选解	57
四、分析题选解	60
五、考研题选解	62
六、竞赛题选解	63
第八节 总习题一选解	65
一、高数题选解	65
二、微积分题选解	67
三、分析题选解	69

四、考研题选解	72
五、竞赛题选解	74
第二章 一元函数微分学	76
考纲要求	76
第一节 导数的概念	77
一、主要概念、方法、公式及定理	77
二、高数题选解	77
三、微积分题选解	79
四、分析题选解	81
五、考研题选解	84
六、竞赛题选解	87
第二节 求导法则 高阶导数	88
一、主要概念、方法、公式及定理	88
二、高数题选解	88
三、微积分题选解	91
四、分析题选解	93
五、考研题选解	98
六、竞赛题选解	101
第三节 隐函数与参数式函数的导数	104
一、主要概念、方法、公式及定理	104
二、高数题选解	104
三、微积分题选解	107
四、分析题选解	110
五、考研题选解	112
六、竞赛题选解	114
第四节 函数的微分	116
一、主要概念、方法、公式及定理	116
二、高数题选解	116
三、微积分题选解	118
四、分析题选解	118
五、考研题选解	120

六、竞赛题选解	121
第五节 微分中值定理	122
一、主要概念、方法、公式及定理	122
二、高数题选解	122
三、微积分题选解	125
四、分析题选解	127
五、考研题选解	130
六、竞赛题选解	134
第六节 泰勒公式	139
一、主要概念、方法、公式及定理	139
二、高数题选解	140
三、微积分题选解	141
四、分析题选解	142
五、考研题选解	145
六、竞赛题选解	147
第七节 洛必达法则	149
一、主要概念、方法、公式及定理	149
二、高数题选解	149
三、微积分题选解	150
四、分析题选解	152
五、考研题选解	154
六、竞赛题选解	157
第八节 函数的单调性与凹凸性	158
一、主要概念、方法、公式及定理	158
二、高数题选解	159
三、微积分题选解	164
四、分析题选解	167
五、考研题选解	169
六、竞赛题选解	172
第九节 函数的极值与最大、最小值	174
一、主要概念、方法、公式及定理	174
二、高数题选解	174

三、微积分题选解	177
四、分析题选解	180
五、考研题选解	184
六、竞赛题选解	188
第十节 函数作图 曲线的曲率	191
一、主要概念、方法、公式及定理	191
二、高数题选解	191
三、微积分题选解	193
四、分析题选解	194
五、考研题选解	195
六、竞赛题选解	196
第十一节 总习题二选解	196
一、高数题选解	196
二、微积分题选解	201
三、分析题选解	205
四、考研题选解	207
五、竞赛题选解	209
第三章 一元函数积分学	211
考纲要求	211
第一节 原函数与不定积分的概念	211
一、主要概念、方法、公式及定理	211
二、高数题选解	212
三、微积分题选解	213
四、分析题选解	214
五、考研题选解	214
六、竞赛题选解	216
第二节 不定积分的换元积分法	218
一、主要概念、方法、公式及定理	218
二、高数题选解	218
三、微积分题选解	221
四、分析题选解	223

五、考研题选解	225
六、竞赛题选解	228
第三节 不定积分的分部积分法	231
一、主要概念、方法、公式及定理	231
二、高数题选解	231
三、微积分题选解	233
四、分析题选解	235
五、考研题选解	236
六、竞赛题选解	239
第四节 有理函数的不定积分	240
一、主要概念、方法、公式及定理	240
二、高数题选解	241
三、微积分题选解	244
四、分析题选解	246
五、考研题选解	247
六、竞赛题选解	248
第五节 定积分的概念与性质	249
一、主要概念、方法、公式及定理	249
二、高数题选解	249
三、微积分题选解	253
四、分析题选解	254
五、考研题选解	256
六、竞赛题选解	259
第六节 微积分基本定理与牛顿-莱布尼兹公式	262
一、主要概念、方法、公式及定理	262
二、高数题选解	262
三、微积分题选解	265
四、分析题选解	267
五、考研题选解	269
六、竞赛题选解	275
第七节 定积分的换元法与分部积分法	279
一、主要概念、方法、公式及定理	279

二、高数题选解	280
三、微积分题选解	283
四、分析题选解	284
五、考研题选解	286
六、竞赛题选解	293
第八节 定积分的几何应用	298
一、主要概念、方法、公式及定理	298
二、高数题选解	299
三、微积分题选解	303
四、分析题选解	307
五、考研题选解	311
六、竞赛题选解	320
第九节 定积分的物理应用及其他应用	323
一、主要概念、方法、公式及定理	323
二、高数题选解	324
三、微积分题选解	327
四、分析题选解	330
五、考研题选解	332
六、竞赛题选解	334
第十节 反常积分	334
一、主要概念、方法、公式及定理	334
二、高数题选解	335
三、微积分题选解	338
四、分析题选解	339
五、考研题选解	340
六、竞赛题选解	342
第十一节 总习题三选解	345
一、高数题选解	345
二、微积分题选解	354
三、分析题选解	361
四、考研题选解	364
五、竞赛题选解	367

第四章 向量代数和空间解析几何	370
考纲要求	370
第一节 向量及其代数运算	370
一、主要概念、方法、公式及定理	370
二、高数题选解	372
三、微积分题选解	375
四、考研题选解	376
五、竞赛题选解	377
第二节 曲面与空间曲线及其方程	379
一、主要概念、方法、公式及定理	379
二、高数题选解	379
三、微积分题选解	381
四、考研题选解	383
五、竞赛题选解	384
第三节 平面与空间直线及其方程	386
一、主要概念、方法、公式及定理	386
二、高数题选解	387
三、微积分题选解	390
四、考研题选解	392
五、竞赛题选解	394
第四节 总习题四选解	395
一、高数题选解	395
二、微积分题选解	397
三、考研题选解	400
四、竞赛题选解	401
附录 2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题及	
解答	403
数学一	403
数学二	417
数学三	425
数学四	438
参考文献	447

第一章 函数、极限、连续

考纲要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，并会建立简单应用问题中的函数关系式。
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性。
3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念。
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形。
5. 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念，以及函数极限存在与左、右极限之间的关系。
6. 掌握极限的性质及四则运算法则。
7. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法。
8. 理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限。
9. 理解函数连续性的概念（含左连续与右连续），会判别函数间断点的类型。
10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理），并会应用这些性质。

第一节 集合、映射与函数

一、主要概念、方法、公式及定理

对偶律 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

直积(Descartes) $A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ 且 } y \in B\}$.

映射 $f: X \rightarrow Y$; 定义域: $D_f = X$, 值域: $R_f = f(X) = \{f(x) | x \in X\}$.

函数 $f: D \rightarrow \mathbf{R}$, D 为数集, $y \triangleq f(x)$, $x \in D$.

$$\text{符号函数 } y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

$$x = \operatorname{sgn} x |x|.$$

取整函数 $y = [x]$, $[x] \in \mathbf{Z}$, 若 $z \in \mathbf{Z}$, $z \leq x$, 则 $[x] = \max\{z\}$.

$$\text{双曲函数 } \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

反双曲函数

$$y = \operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}),$$

$$y = \operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}),$$

$$y = \operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

二、高数题选解(习题 1-1, [1]P. 20[⊙])

1. 设 A, B 是任意两个集合, 证明对偶律: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$. (原书第 2 题)

分析 证此对偶律可采用一般的证明两集合相等的方法证明, 即用集合相等的定义, 分为两步骤, 证明互相包含.

具体解法可参考本节四、第 4 题, 留给读者自己写出.

注 由上述两个集合 A 与 B 的对偶律(De Morgan 律), 用上述方法或数学归纳法, 推广至几个集合的情形, 记为

$$\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \cdots \cup \bar{A}_n,$$

⊙ 指教材[1], 第 20 页. 下类似, 不注.

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_n.$$

2. 设映射 $f: X \rightarrow Y, A \subset X, B \subset X$. 证明

(1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;

(2) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. (原书第3题)

证 【利用集合相等与包含的定义证之.】

(1) 设任意 $x \in A \cup B, f: x \rightarrow y \in f(A \cup B)$, 于是 $x \in A$ 或 $x \in B$, 相应地有 $y \in f(A)$ 或 $y \in f(B)$, 故 $y \in f(A) \cup f(B)$, 从而 $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$; 反之, 类似地可证得 $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$, 于是(1)得证. 同理可证(2).

3. 设映射 $f: X \rightarrow Y$, 若存在一个映射 $g: Y \rightarrow X$, 使 $g \circ f = I_X, f \circ g = I_Y$, 其中 I_X, I_Y 分别是 X, Y 上的恒等映射, 即对于每一个 $x \in X$, 有 $I_X(x) = x$; 对于每一个 $y \in Y$, 有 $I_Y(y) = y$. 证明: f 是双射, 且 g 是 f 的逆映射: $g = f^{-1}$. (原书第4题)

证 【只需证 f 既是满射又是单射, 则 f 是一一映射, 即双射; 再按照定义证明 $g = f^{-1}$.】

(1) 记 D_f 与 R_f 分别是映射 $f: X \rightarrow Y$ 的定义域与值域, 设任一元素 $x \in D_f = X, \exists y \in Y = R_f$, 由 $g: Y \rightarrow X$, 有 $x = g(y) \xrightarrow{f} y$, 可见 Y 中任一元素 y 都是 X 中某一元素 x 的像, 即 f 是满射.

(2) 设 $x_1, x_2 \in X$ 且 $x_1 \neq x_2, y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$, 则有 $y_1 \neq y_2$. 否则若 $y_1 = y_2$, 即 $f(x_1) = f(x_2)$, 有

$$\begin{aligned} g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) &\implies I_X(x_1) = I_X(x_2) \\ &\implies x_1 = x_2, \end{aligned}$$

得到矛盾, 故 f 是单射.

由(1)、(2)知, f 是双射, 即一一映射.

(3) 上面已证 $f: X \rightarrow Y$ 是满射, 同理 $g: Y \rightarrow X$ 也是满射, 则对于每个 $y \in R_f$, 有 $y = f(x)$, 于是

$$g(y) = g \circ f(x) = I_X(x) = x,$$

又由 g 也是单射, 即有惟一的 $x \in X$, 适合 $f(x) = y$, 规定 $g(y) = x$, 这 x 满足 $f(x) = y$, 故由定义, g 是 f 的逆映射, 即 $g = f^{-1}$.