



面向 21 世纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

高等学校经济学类核心课程教材

计量经济学习题集

潘文卿 李子奈 高吉丽 编著



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

面向 21 世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

高等学校经济学类核心课程教材

计量经济学学习题集

潘文卿 李子奈 高吉丽 编著



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容简介

本书是与“面向 21 世纪课程教材”《计量经济学》(第二版)(李子奈,潘文卿编著)配套的学习辅导书。

本书按照主教材的内容体系编写,对主教材中的全部习题给予了详细解答。同时本书还选取了一些比较有代表性的例题予以讲解,并搜集了一些补充习题,帮助学生加强对所学知识理解,巩固和提高学习效果。

本书可供选用《计量经济学》(第二版)作为教材的师生作为教学和学习参考书使用,也可供其他社会读者选择使用。

图书在版编目(CIP)数据

计量经济学习题集 / 潘文卿, 李子奈, 高吉丽编著.
北京: 高等教育出版社, 2005.3
ISBN 7-04-016397-7

I. 计... II. ①潘... ②李... ③高... III. 计量
经济学-高等学校-习题 IV. F224.0-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 017588 号

策划编辑 于 明 责任编辑 张晓晶 封面设计 杨立新 责任绘图 尹 莉
版式设计 王 莹 责任校对 金 辉 责任印制 孔 源

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100011
总 机 010-58581000
经 销 北京蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 化学工业出版社印刷厂

购书热线 010-58581118
免费咨询 800-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landracom.com>
<http://www.landracom.cn>

开 本 787×960 1/16
印 张 18.75
字 数 340 000

版 次 2005 年 4 月第 1 版
印 次 2005 年 4 月第 1 次印刷
定 价 22.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 16397-00

总 前 言

高等学校经济学类核心课程和工商管理类核心课程是在高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划“经济学类专业课程结构、共同核心课程及主要教学内容改革研究与实践”和“工商管理类专业课程结构及主要教学内容改革研究与实践”两个项目调研基础上提出、经经济学学科教学指导委员会和工商管理类学科教学指导委员会讨论通过、教育部批准的必修课程。其中，经济学类各专业的核心课程共 8 门：政治经济学、西方经济学、计量经济学、国际经济学、货币银行学、财政学、会计学、统计学；工商管理类各专业的核心课程共 9 门：微观经济学、宏观经济学、管理学、管理信息系统、会计学、统计学、财务管理、市场营销学、经济法。这些课程确定后，教育部高教司组织有关专家制定了各门课程的教学基本要求，并组编了相应的各门教材。各门课程的教学基本要求及教材由高等教育出版社于 2000 年秋季出齐，供各高等学校选用。

教育部高等教育司

2000 年 3 月

前 言

计量经济学作为经济学科最重要的方法论课程,与微观经济学和宏观经济学一道成为经济学科的重要组成部分。它不仅在国外高等学校经济学的教学中一直占据着重要的地位,而且近年来在我国高等教育中也开始成为经济学科最重要的课程,并受到越来越多的关注与重视。国内的各高等院校相继开设了不同层次的计量经济学课程。1998年教育部高等学校经济学学科教学指导委员会也将计量经济学首次列入到了8门专业核心课程之列。

近年来,随着计量经济学的教学与研究在国内的开展,计量经济学的教材建设也备受重视。不仅国外经典的教材被逐次引进,而且国内部分院校也开始编写不同层次的计量经济学教材。与此同时,我们发现,与国外的教材相比,国内的计量经济学教材对练习题的重视程度还不够。众所周知,计量经济学的学习离不开一定量的练习,足够的练习对课程相关概念的领会和方法的掌握是十分重要的。当前,国内的大部分计量经济学教材给出的习题量都相对较少,而且一般都没有解答;引进的国外教材尽管有较多的练习题,但也很少有解答。这样,学生在学习过程中,即使想做练习,也由于没有解答,往往自己并不知道是否做对了,从而影响到学习效果。

针对上述情况,我们在对《计量经济学》(第一版)(李子奈编著,高等教育出版社,2000)进行全面修订的同时,也编写了这本配套的《计量经济学习题集》。它不仅可以满足教学与学习的需要,而且也填补了国内图书市场的这一空白。

这本《计量经济学习题集》按照高等教育出版社“面向21世纪课程教材”《计量经济学》(第二版)的内容体系编写。除第一章绪论只包括内容提要与教材练习题及参考解答外,其余各章都包括了内容提要、典型例题分析、教材练习题及参考解答、补充练习题和补充练习题参考答案五个部分。内容提要对每章的主要学习内容作了简要的归纳与总结,提示了学习的要点和应当关注的问题。典型例题分析则对每一章挑选了典型题型作了较为详细的分析与解答,例题中往往包括了教材内容中由于篇幅限制而没有详细讨论的问题。教材练习题及参考解答是对教材中每章练习题的参考解答。同样地,教材中一些没有展开讨论的问题,也以练习的方式出现在每章的练习题及其参考解答中。补充练习题选取了各类教材的相关练习题,目的是增加练习量以达到对课程内容的熟练掌握。补充练习题参考答案是对补充练习题的较为详细的参考解答。习题集中

涉及的题型包括概念辨析、思考问答、推理证明、计算分析等四大类。

本书是高等教育出版社“面向 21 世纪课程教材”《计量经济学》(第二版)的配套教材,自己也可以独立成册。本书的所有计算题都是采用 EViews 软件进行计算的,书中的相关习题解答部分都给出了 EViews 软件下的详细操作步骤。无论对于在校学生,还是对于从事经济学研究和经济分析领域的其他人员,本书都是一本更具操作性与实用性的读物。同时,为方便教学,本书还配有相关电子课件,包括电子教案、数据集和相关试卷等内容,读者可通过书后的回执免费索取。另外,读者还可通过《计量经济学》(第二版)配套的学习卡登录高等教育出版社的网站(<http://4a.hep.com.cn>, <http://la.hep.com.cn>),浏览相关的网络课程并进行教学答疑。

本书的编写分工如下:潘文卿负责各章的内容提要、典型例题分析、教材练习题的收集与解答,以及少部分补充练习题的解答工作;高吉丽负责第二、三、四、五、六章的全部补充练习题的收集与大部分解答工作;李子奈负责全书的审校工作。

这里需要致谢硕士研究生杨晶、金海龙与刘洋三位同学。他们收集与试做了第七、八、九章的大部分补充练习题。

本书中少部分例题与练习题是作者重新编写的,大部分例题、练习题与补充练习题参考或直接取自作者编著的《计量经济学》(第一版)(李子奈编著,高等教育出版社,2000)和《高等计量经济学》(李子奈,叶阿忠编著,清华大学出版社,2000)。另有少部分练习题参考了《计量经济学》(李长风编著,上海财经大学出版社,1996),《计量经济学》(张保法著,河南人民出版社,1992),《计量经济学》(王国维主编,东北财经大学出版社,2002),《应用计量经济学》(拉姆·拉玛纳山著,薛菁睿译,机械工业出版社,2003), *Econometric Models and Economic Forecasts* (Robert S. Pindyck, 4th edition), *Basic Econometrics* (Damodar N. Gujarati, 4th edition), *Introductory Econometrics* (Jeffrey M. Wooldridge, 2th edition), 《计量经济学精要习题集》(黄梅波主编,机械工业出版社,2003), 《计量经济学——习题与解答》(于俊年主编,对外经济贸易大学出版社,2001),在此向相关作者表示感谢。

由于我们的水平有限,对计量经济学的理解和掌握存在一定的局限性,因此,本习题集中可能存在不妥甚至错误之处,恳请读者批评指正,以便对其不断进行修正与完善。

潘文卿

2004 年 11 月于清华大学

目 录

第一章 绪论	1
一、内容提要	1
二、教材练习题及参考解答	1
第二章 经典单方程计量经济学模型：一元线性回归模型	5
一、内容提要	5
二、典型例题分析	5
三、教材练习题及参考解答	13
四、补充练习题	24
五、补充练习题参考答案	29
第三章 经典单方程计量经济学模型：多元线性回归模型	41
一、内容提要	41
二、典型例题分析	41
三、教材练习题及参考解答	50
四、补充练习题	61
五、补充练习题参考答案	66
第四章 经典单方程计量经济学模型：放宽基本假定的模型	78
一、内容提要	78
二、典型例题分析	79
三、教材练习题及参考解答	84
四、补充练习题	96
五、补充练习题参考答案	100
第五章 经典单方程计量经济学模型：专门问题	115
一、内容提要	115
二、典型例题分析	116
三、教材练习题及参考解答	127
四、补充练习题	139

五、补充练习题参考答案	141
第六章 经典联立方程计量经济学模型：理论与方法	152
一、内容提要	152
二、典型例题分析	153
三、教材练习题及参考解答	160
四、补充练习题	169
五、补充练习题参考答案	170
第七章 经典计量经济学应用模型	180
一、内容提要	180
二、典型例题分析	181
三、教材练习题及参考解答	187
四、补充练习题	199
五、补充练习题参考答案	201
第八章 扩展的单方程计量经济学模型	209
一、内容提要	209
二、典型例题分析	210
三、教材练习题及参考解答	225
四、补充练习题	232
五、补充练习题参考答案	234
第九章 时间序列计量经济学模型	238
一、内容提要	238
二、典型例题分析	239
三、教材练习题及参考解答	249
四、补充练习题	261
五、补充练习题参考答案	263
附录 1 《计量经济学》(第二版) 目录	271
附录 2 统计表	277

第一章 绪 论

一、内 容 提 要

本章是全课程的纲，主要介绍计量经济学的基本概念、经典计量经济学模型的建模步骤和要点，以及计量经济学模型的应用三方面的内容。

计量经济学是经济学的一个重要分支，以揭示经济活动中客观存在的数量关系的理论与方法为主要内容，其核心是建立计量经济学模型。计量经济学的内容体系包括广义计量经济学和狭义计量经济学，理论计量经济学和应用计量经济学等各方面，有初级、中级与高级三个层次。计量经济学在经济学科中已占据了重要的地位。

计量经济学的建模步骤包括理论模型的设计、样本数据的收集、模型参数的估计与模型的检验四个方面。理论模型的设计是建立计量经济学模型的第一步，包括了选择变量，确定变量间的数学关系，以及拟定模型中参数的数值范围。在样本数据的收集阶段，主要关注数据的类型与数据的质量，它们对所建模型的好坏有着较大的影响。模型参数的估计是建立计量经济学模型的核心，涉及对模型的识别、估计方法的选择等多个方面。模型的检验包括了经济意义检验、统计检验、计量经济学检验，以及模型预测检验等几个方面。一个成功的计量经济学模型离不开对经济理论的深刻领会和对建模方法的熟练掌握，并要收集加工出高质量的统计数据。经济理论、建模方法与高质量的数据是计量经济学模型成功的三要素。

计量经济学模型的应用主要涉及四个方面：结构分析、经济预测、政策评价，以及检验与发展经济理论。结构分析就是对经济现象中变量间关系的研究，主要方法有弹性分析、乘数分析与比较静力分析。经济预测包括短期预测与中长期预测。政策评价主要指研究不同的政策对经济运行的影响，并从中选择相对适当的政策的一种模拟性试验，起到“经济政策实验室”的作用。检验与发展经济理论则是通过实际数据考察理论的适用性并发展新的适用的经济学理论。

二、教材练习题及参考解答

1. 什么是计量经济学？计量经济学方法与一般经济数学方法有什么区别？

解答 计量经济学是经济学的一个分支学科,以揭示经济活动中客观存在的数量关系为主要内容,是由经济学、统计学和数学三者结合而成的交叉性学科。

计量经济学方法揭示经济活动中具有因果关系的各因素间的定量关系,它用随机性的数学方程加以描述;而一般经济数学方法揭示经济活动中各个因素之间的理论关系,更多地用确定性的数学方程加以描述。

2. 计量经济学的研究对象和内容是什么? 计量经济学模型研究的经济关系有哪两个基本特征?

解答 计量经济学的研究对象是经济现象,主要研究经济现象中的具体数量规律,换言之,计量经济学是利用数学方法,根据统计测定的经济数据,对反映经济现象本质的经济数量关系进行研究。计量经济学的内容大致包括两个方面:一是方法论,即计量经济学方法或理论计量经济学;二是应用,即应用计量经济学。无论是理论计量经济学还是应用计量经济学,都包括理论、方法和数据三要素。

计量经济学模型研究的经济关系有两个基本特征:一是随机关系,二是因果关系。

3. 为什么说计量经济学在当代经济学科中占据重要地位? 当代计量经济学发展的基本特征与动向是什么?

解答 计量经济学自 20 世纪 20 年代末 30 年代初形成以来,无论在技术方法还是在应用方面发展都十分迅速,尤其是经过 20 世纪 50 年代的发展阶段和 60 年代的扩张阶段,计量经济学在经济学科中占据了重要的地位,主要表现在:

第一,在西方大多数大学和学院中,计量经济学的讲授已成为经济学课程表中最具有权威性的一部分。

第二,1969—2003 年诺贝尔经济学奖的 53 位获奖者中有 10 位与研究 and 应用计量经济学有关,居经济学各分支学科之首。除此之外,绝大多数诺贝尔经济学奖获奖者,即使其主要贡献不在计量经济学领域,但在他们的研究中都普遍应用了计量经济学方法。著名经济学家、诺贝尔经济学奖获得者萨缪尔森曾说过:“第二次世界大战后的经济学是计量经济学的时代”。

第三,计量经济学方法与其他经济数学方法的结合应用得到了长足发展。

从当代计量经济学的发展动向看,有以下基本特点:

(1) 非经典计量经济学的理论与应用研究成为计量经济学越来越重要的内容。

(2) 计量经济学方法从主要用于经济预测转向经济理论假设和政策假设的检验。

(3) 计量经济学模型的应用从传统的领域转向新的领域,如货币、工资、就业、福利、国际贸易等,从宏观领域的研究开始转向微观领域的研究。

(4) 计量经济学模型的规模不再是水平高低的衡量标准,人们更喜欢建立一些简单的模型,从总量上和趋势上说明经济现象。

4. 建立与应用计量经济学模型的主要步骤有哪些?

解答 建立与应用计量经济学模型的主要步骤如下:(1) 设定理论模型,包括选择模型所包含的变量,确定变量之间的数学关系和拟定模型中待估参数的数值范围;(2) 收集样本数据,要考虑样本数据的完整性、准确性、可比性和一致性;(3) 估计模型参数;(4) 检验模型,包括经济意义检验、统计检验、计量经济学检验和模型预测检验。

5. 计量经济学模型主要有哪些应用领域?各自的原理是什么?

解答 计量经济学模型主要有以下几个方面的用途:

(1) 结构分析,即研究一个或几个经济变量发生变化及结构参数的变动对其他变量以至整个经济系统产生何种影响。其原理是弹性分析、乘数分析与比较静力分析。

(2) 经济预测,即进行中短期经济的因果预测。其原理是模拟历史,从已经发生的经济活动中找出变化规律。

(3) 政策评价,即利用计量经济学模型定量分析政策变量变化对经济系统运行的影响,是对不同政策执行情况的“模拟仿真”。

(4) 检验与发展经济理论,即利用计量经济学模型和实际统计资料实证分析某个理论假说正确与否。其原理是如果按照某种经济理论建立的计量经济学模型可以很好地拟合实际观察数据,则意味着该理论是符合客观事实的,否则,则表明该理论不能解释客观事实。

6. 模型的检验包括几个方面?其具体含义是什么?

解答 模型的检验主要包括经济意义检验、统计检验、计量经济学检验和模型的预测检验四个方面。在经济意义检验中,需要检验模型是否符合经济意义,检验求得的参数估计值的符号与大小是否与根据人们的经验和经济理论所拟订的期望值相符合;在统计检验中,需要检验模型参数估计值的可靠性,即检验模型的统计学性质;在计量经济学检验中,需要检验模型的计量经济学性质,包括随机干扰项的序列相关性检验、异方差性检验,解释变量的多重共线性检验,模型设定的偏误性检验等;模型的预测检验主要检验模型参数估计量的稳定性及样本容量发生变化时的灵敏度,以确定所建立的模型是否可以用于样本观测值以外的范围。

7. 下列假想模型是否属于揭示因果关系的计量经济学模型?为什么?

(1) $S_t = 112.0 + 0.12R_t$, 其中 S_t 为第 t 年农村居民储蓄增加额(单位:亿元),

R_t 为第 t 年城镇居民可支配收入总额(单位: 亿元)。

(2) $S_{t-1} = 4\,432.0 + 0.30R_t$, 其中 S_{t-1} 为第 $t-1$ 年底农村居民储蓄余额(单位: 亿元), R_t 为第 t 年农村居民纯收入总额(单位: 亿元)。

解答 (1) 不是。因为农村居民储蓄增加额应与农村居民可支配收入总额有关, 而与城镇居民可支配收入总额之间没有因果关系。

(2) 不是。第 t 年农村居民的纯收入对当年及以后年份的农村居民储蓄有影响, 但并不对第 $t-1$ 年的储蓄产生影响。

8. 指出下列假想模型中的错误, 并说明理由:

$$RS_t = 8\,300.0 - 0.24 \cdot RI_t + 1.12 \cdot IV_t$$

其中, RS_t 为第 t 年社会消费品零售总额(单位: 亿元), RI_t 为第 t 年居民收入总额(单位: 亿元)(城镇居民可支配收入总额与农村居民纯收入总额之和), IV_t 为第 t 年全社会固定资产投资总额(单位: 亿元)。

解答 一是居民收入总额 RI_t 前参数的符号有误, 应是正号; 二是全社会固定资产投资总额 IV_t 这一解释变量的选择有误, 它对社会消费品零售总额应该没有直接的影响。

第二章 经典单方程计量经济 学模型：一元线性回归模型

一、内容提要

本章介绍了回归分析的基本思想与基本方法。本章从总体回归模型与总体回归函数、样本回归模型与样本回归函数这两组概念开始，建立了回归分析的基本思想。总体回归函数是对总体变量间关系的定量表述，由总体回归模型在若干基本假设下得到，但它只是建立在理论之上，在现实中只能先从总体中抽取一个样本，获得样本回归函数，并用它对总体回归函数做出统计推断。

本章学习的一个重点是如何获取线性的样本回归函数，主要涉及普通最小二乘法(OLS)的学习与掌握。同时，也介绍了最大似然估计法(ML)以及矩估计法(MM)。

本章另一个学习的重点是对样本回归函数能否代表总体回归函数进行统计推断，即进行所谓的统计检验。统计检验包括两个方面：一是先检验样本回归函数与样本点的“拟合优度”；二是检验样本回归函数与总体回归函数的“接近”程度。后者又包括两个层次：第一，检验解释变量对被解释变量是否存在显著的线性影响，通过变量的 t 检验完成；第二，检验样本回归函数与总体回归函数的“接近”程度，通过参数估计值的“区间检验”完成。

本章还有三方面的内容不容忽视。其一，若干基本假设。样本回归函数参数的估计，对参数估计量的统计性质的分析，以及所进行的统计推断都是建立在这些基本假设之上的。其二，参数估计量统计性质的分析，包括小样本性质与大样本性质，尤其是无偏性、有效性与一致性构成了对样本估计量优劣的最主要的衡量准则。Gauss-Markov 定理表明 OLS 估计量是最佳线性无偏估计量。其三，运用样本回归函数进行预测，包括被解释变量条件均值与个值的预测，预测置信区间的计算及其变化特征等。

二、典型例题分析

例 1 令 Y 表示一名妇女生育孩子的生育率， X 表示该妇女接受过教育的年数。生育率对教育年数的简单回归模型为

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \mu$$

(1) 随机干扰项 μ 包含什么样的因素？它们可能与教育水平相关吗？

(2) 上述简单回归分析能够揭示教育对生育率在其他条件不变下的影响吗？请解释。

解答 (1) 收入、年龄、家庭状况、政府的相关政策等也是影响生育率的重要因素，在上述简单回归模型中，它们被包含在了随机干扰项之中。有些因素可能与教育水平相关，如收入水平与教育水平往往呈正相关，年龄大小与教育水平呈负相关等。

(2) 当归结在随机干扰项中的重要影响因素与模型中的教育水平 X 相关时，上述回归模型不能够揭示教育对生育率在其他条件不变下的影响，因为这时出现解释变量与随机干扰项相关的情形，违背了基本假设。

例 2 已知回归模型 $E = \alpha + \beta N + \mu$ ，式中 E 为某类公司一名新员工的起始薪金(单位：元)， N 为所受教育水平(单位：年)。随机干扰项 μ 的分布未知，其他所有假设都满足。

(1) 从直观及经济角度解释 α 和 β 。

(2) OLS 估计量 $\hat{\alpha}$ 和 $\hat{\beta}$ 满足线性性、无偏性及有效性吗？简单陈述理由。

(3) 对参数的假设检验还能进行吗？简单陈述理由。

解答 (1) $\alpha + \beta N$ 为接受过 N 年教育的员工的总体平均起始薪金。当 N 为零时，平均薪金为 α ，因此 α 表示没有接受过教育的员工的平均起始薪金。 β 是每单位 N 变化所引起的 E 的变化，即表示每多接受一年教育所对应的薪金增加值。

(2) OLS 估计量 $\hat{\alpha}$ 和 $\hat{\beta}$ 仍满足线性性、无偏性及有效性，因为这些性质的成立无需随机干扰项 μ 的正态分布假设。

(3) 如果 μ 的分布未知，则所有的假设检验都是无效的。因为 t 检验与 F 检验是建立在 μ 的正态分布假设之上的。

例 3 在例 2 中，如果被解释变量新员工起始薪金的计量单位由元改为百元，估计的截距项与斜率项有无变化？如果解释变量所受教育水平的度量单位由年改为月，估计的截距项与斜率项有无变化？

解答 首先考察被解释变量度量单位变化的情形。以 E^* 表示以百元为度量单位的薪金，则

$$E = E^* \times 100 = \alpha + \beta N + \mu$$

由此有如下新模型：

$$E^* = \frac{\alpha}{100} + \frac{\beta N}{100} + \frac{\mu}{100}$$

或

$$E^* = \alpha^* + \beta^* N + \mu^*$$

这里 $\alpha^* = \frac{\alpha}{100}$, $\beta^* = \frac{\beta}{100}$, $\mu^* = \frac{\mu}{100}$, 即估计的截距项与斜率项均为原回归系数的 $\frac{1}{100}$ 。

再考虑解释变量度量单位变化的情形。设 N^* 为用月表示的新员工受教育的时间长度, 则 $N^* = 12N$, 于是

$$E = \alpha + \beta N + \mu = \alpha + \beta \frac{N^*}{12} + \mu$$

或
$$E = \alpha + \frac{\beta}{12} N^* + \mu$$

可见, 估计的截距项不变, 而斜率项将为原回归系数的 $\frac{1}{12}$ 。

例 4. 没有截距项的一元回归模型

$$Y_i = \beta_1 X_i + \mu_i$$

称之为过原点回归(regression through the origin)。试证明:

(1) 如果通过相应的样本回归模型可得到通常的正规方程组

$$\begin{cases} \sum e_i = 0 \\ \sum e_i X_i = 0 \end{cases}$$

则可以得到 β_1 的两个不同的估计值:

$$\tilde{\beta}_1 = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}, \quad \hat{\beta}_1 = \frac{\sum X_i Y_i}{\sum X_i^2}$$

(2) 在基本假设 $E(\mu_i) = 0$ 下, $\tilde{\beta}_1$ 与 $\hat{\beta}_1$ 均为无偏估计量。

(3) 拟合线 $\hat{Y} = \hat{\beta}_1 X$ 通常不会经过均值点 $(\bar{X}, \bar{Y})$, 但拟合线 $\tilde{Y} = \tilde{\beta}_1 X$ 则相反。

(4) 只有 $\hat{\beta}_1$ 是 β_1 的 OLS 估计量。

证 (1) 由第一个正规方程 $\sum e_i = 0$ 得

$$\sum (Y_i - \tilde{\beta}_1 X_i) = 0$$

或

$$\sum Y_i = \tilde{\beta}_1 \sum X_i$$

求解得

$$\tilde{\beta}_1 = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}$$

由第二个正规方程 $\sum X_i (Y_i - \hat{\beta}_1 X_i) = 0$ 得

$$\sum X_i Y_i = \hat{\beta}_1 \sum X_i^2$$

求解得

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum X_i Y_i}{\sum X_i^2}$$

(2) 对于 $\tilde{\beta}_1 = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}$, 求期望

$$\begin{aligned} E(\tilde{\beta}_1) &= E\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{X}}\right) = \frac{1}{\bar{X}} E\left[\frac{1}{n}(\beta_1 X_i + \mu_i)\right] \\ &= \frac{1}{\bar{X}} \left[E\left(\frac{\beta_1 X_i}{n}\right) + \frac{1}{n} E(\mu_i)\right] \\ &= \frac{\bar{X}}{\bar{X}} \beta_1 = \beta_1 \end{aligned}$$

这里用到了 X_i 的非随机性。

对于 $\hat{\beta}_1 = \frac{\sum X_i Y_i}{\sum X_i^2}$, 求期望

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}_1) &= E\left(\frac{\sum X_i Y_i}{\sum X_i^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sum X_i^2} \sum E(X_i Y_i) = \frac{1}{\sum X_i^2} \sum E[X_i(\beta_1 X_i + \mu_i)] \\ &= \frac{1}{\sum X_i^2} \beta_1 \sum X_i^2 + \frac{1}{\sum X_i^2} \sum X_i E(\mu_i) = \beta_1 \end{aligned}$$

(3) 要想拟合值 $\hat{Y} = \hat{\beta}_1 X$ 通过点 $(\bar{X}, \bar{Y})$, $\hat{\beta}_1 \bar{X}$ 必须等于 $\bar{Y}$ 。但

$$\hat{\beta}_1 \bar{X} = \frac{\sum X_i Y_i}{\sum X_i^2} \bar{X}$$

通常不等于 $\bar{Y}$ 。这就意味着点 $(\bar{X}, \bar{Y})$ 不太可能位于直线 $\hat{Y} = \hat{\beta}_1 X$ 上。

相反地, 由于 $\tilde{\beta}_1 \bar{X} = \bar{Y}$, 所以直线 $\hat{Y} = \tilde{\beta}_1 X$ 经过点 $(\bar{X}, \bar{Y})$ 。

(4) OLS 方法要求残差平方和最小, 即

$$\text{Min} \quad \text{RSS} = \sum e_i^2 = \sum (Y_i - \hat{\beta}_1 X_i)^2$$

将 RSS 对 $\hat{\beta}_1$ 求偏导得

$$\frac{\partial \text{RSS}}{\partial \hat{\beta}_1} = 2 \sum (Y_i - \hat{\beta}_1 X_i)(-X_i) = 0$$

即

$$\begin{aligned} \sum X_i (Y_i - \hat{\beta}_1 X_i) &= 0 \\ \hat{\beta}_1 &= \frac{\sum X_i Y_i}{\sum X_i^2} \end{aligned}$$

可见 $\hat{\beta}_1$ 是 OLS 估计量。

例 5 假设模型为 $Y_i = \alpha + \beta X_i + \mu_i$ 。给定 n 个观察值 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$, 按如下步骤建立 β 的一个估计量: 在散点图上把第 1 个点和第 2 个

点连接起来并计算该直线的斜率；同理继续，最终将第1个点和最后一个点连接起来并计算该直线的斜率。最后对这些斜率取平均值，称之为 $\hat{\beta}$ ，即 β 的估计值。

(1) 画出散点图，给出 $\hat{\beta}$ 的几何表示并推出代数表达式。

(2) 计算 $\hat{\beta}$ 的期望值并对所做假设进行陈述。这个估计值是有偏的还是无偏的？解释理由。

(3) 证明为什么该估计值不如以前用 OLS 方法所获得的估计值，并做具体解释。

解答 (1) 散点图如图 2-1 所示。

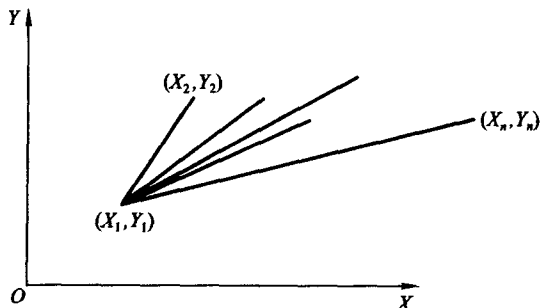


图 2-1

首先计算每条直线的斜率，而后求平均斜率。连接 (X_1, Y_1) 和 (X_i, Y_i) 的直线斜率为 $(Y_i - Y_1)/(X_i - X_1)$ 。由于共有 $n-1$ 条这样的直线，因此

$$\hat{\beta} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n \frac{Y_i - Y_1}{X_i - X_1}$$

(2) 因为 X 非随机且 $E(\mu_i) = 0$ ，因此

$$\begin{aligned} E\left(\frac{Y_i - Y_1}{X_i - X_1}\right) &= E\left[\frac{(\alpha + \beta X_i + \mu_i) - (\alpha + \beta X_1 + \mu_1)}{X_i - X_1}\right] \\ &= \beta + E\left(\frac{\mu_i - \mu_1}{X_i - X_1}\right) = \beta \end{aligned}$$

这意味着求和中的每一项都有期望值 β ，所以平均值也会有同样的期望值，表明 $\hat{\beta}$ 是无偏的。

(3) 根据高斯-马尔可夫定理，只有 β 的 OLS 估计量是最佳线性无偏估计量，因此，这里得到的 $\hat{\beta}$ 的有效性不如 β 的 OLS 估计量，所以较差。

例 6 对于人均存款与人均收入之间的关系式 $S_t = \alpha + \beta Y_t + \mu_t$ ，使用美国 36 年的年度数据，得到如下估计模型（括号内为标准差）：

$$\begin{aligned} \hat{S}_t &= 384.105 + 0.067Y_t \\ &\quad (151.105) \quad (0.011) \end{aligned}$$