HuoXueQiaoLian

桂壮红皮书系列

●丛书主编/陈桂壮

活学巧练

名师讲义　权威学案

第2次修订

全国名校特高级教师联合编写

高二数学 下A

北京大学出版社

桂壮红皮书系列

全国名校特高级教师联合编写

HUO XUE QIAO LIAN

活学巧练

高二数学（下A）

第2次修订

丛书主编　陈桂壮
本册主编　杨庆臣
编　　委　杨庆臣　于　林　张　梅

北京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

活学巧练.高二数学(下 A)/杨庆臣主编.——北京:北京大学出版社,2005.9
(桂壮红皮书系列)
ISBN 7-301-06731-3

Ⅰ.活…　Ⅱ.杨…　Ⅲ.数学课—高中—解题　Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 102226 号

书　　名:活学巧练·高二数学(下 A)
著作责任者:杨庆臣 主编
策　　划:刘建华
责 任 编 辑:郑全科
标 准 书 号:ISBN 7-301-06731-3/G·0942
出版发行者:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址:http://cbs.pku.edu.cn　http://www.hps365.com
电　　话:邮购部 01062752015　发行部 62750672　51893513　编辑部 51893283
电 子 信 箱:zpup@pup.pku.edu.cn　gz@hps365.com
排　版　者:北京科文恒信书业文化有限公司
印　刷　者:北京集惠印刷有限公司
经　销　者:新华书店
880 毫米×1230 毫米　大 16 开　10.75 印张　256 千字
2005 年 9 月第 3 版　2005 年 9 月第 1 次印刷
定　　价:14.80 元

目录

Contents

第九章 直线、平面、简单几何体

一 空间直线和平面

9.1 平 面

学习目标要求

目标1:理解平面的基本概念,掌握平面的画法.

目标2:会用图形、文字和符号描述点、直线、平面及其位置关系.

目标3:掌握平面的基本性质(3个公理和3个推论),并运用它解决一些简单问题.

重点难点突破

1. 平面的概念

平面是一个只描述而不定义的最基本的原始概念,平面无大小、厚薄之分,是无限延展的,即没有边界和面积,一般用平行四边形表示.

提醒:要注意平面与平面图形的区别,平面图形如三角形、平行四边形、圆等有大小之分,是平面的局部形象.

例1 下列说法中正确的一个是( )

A. 平面就是平行四边形

B. 任何一个平面图形都是一个平面

C. 平静的太平洋洋面就是一个平面

D. 圆和平面多边形都可以表示平面

分 析:利用平面的基本特征以及平面与平面图形的区别去进行判断.

解 答:A、B选项都不正确,平面是无限延展、没有边界的,而平行四边形和所有的平面图形都是有界的,当我们画平面时,只能画出它的一部分,因此习惯上用平行四边形来表示平面;C选项也不正确,一则太平洋洋面不可能平静,二是太平洋再大也会有边际,加之地球为椭球状,因此平静的太平洋无论如何都不可能是绝对平的;D选项正确,在需要时,除用平行四边形表示平面外,还能用三角形、圆等来表示平面.

拓展延伸 平面与平面图形是两个既有联系又有区别的易混概念,在本节课的学习中,必须突破这一难点,突破难点的关键之一是准确把握平面的基本特征——平面没有厚度、绝对平展,且无边界,是一种理想的图形;关键之二是掌握课本的约定——用平面图形来表示平面,画出的只能是平面的一部分.

2. 水平放置的平面的画法

画平行四边形表示平面,在立体几何中,我们画平行四边形表示平面,平行四边形的锐角画成45°,横边画成邻边的2倍长,这样的平面表示水平放置的平面.水平放置的平面在空间的相对位置,好比我们生活中的书桌面、地面、平静的水面……

拓展:实线、虚线的约定:空间图形中的线,无论是题目中原有的线还是后引的辅助线,没有先后顺序之分,用肉眼能够看得见的线就画成实线,否则,画成虚线或不画线.

例2 解答下列各题.

(1)选择一个适当的角度,画两个平面α与β,使得α是水平平面,表示α的平行四边形横边长为2.4 cm,且α与β相互被遮住一部分,要求"被遮部分"画成"虚线";

(2)画两个平面α与β,使得α是水平平面,且α与β相互被遮住一部分,要求"被遮部分"不画线.

分 析:学习水平放置的平面的画法,是学习画空间图形的必由之路,它是学好立体几何的始点.

解 答:(1)如图9-1-1(1),由已知,α是水平平面,表示α的平行四边形横边长为2.4 cm.按水平放置的平面的画法规则,表示α的平行四边形的"邻边"长为1.2 cm,"锐角"为45°;α与β相互被遮住的部分画成虚线,见图9-1-1(1);(2)见图9-1-1(2).

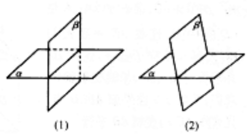

图9-1-1

方法提炼 本例涉及的画法规则,是对水平放置的平面而言的,看上去很简单,其实不然,今后无论是画什么样的空间图形,都必须先对水平放置的部分图形定位,然后再去画图形的其他部分.

3. 借助集合中的符号,表示点、线、平面间的位置关系

立体几何中,借用集合中的符号表示点、线、面位置关系时,点视为元素,直线与平面都视为集合.如:点A在(不在)直线a上表示为$A\in(\notin)a$;直线a在(不在)平面α内,用$\subset(\not\subset)$表示为$a\subset(\not\subset)\alpha$;直线$a$与直线$b$相交于点$A$,用$\cap$表示

为$a\cap b=A$等.

敲调:注意符号的正确应用.

例3 将下面用符号语言表示的关系改用文字语言予以叙述,并且用图形语言予以表示.

$\alpha\cap\beta=l,A\in l,AB\subset\alpha,AC\subset\beta.$

分 析:本题实质是数学三种语言——符号语言、文字语言、图形语言的互译.

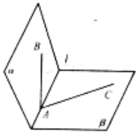

图 9-1-2

解 答:文字语言叙述为:点A在平面α与平面β的交线l上,AB,AC分别在α,β内.

图形语言表示为如图 9-1-2.

方法提炼 文字语言比较自然、生动,能将问题所研究的对象的含义明白地叙述出来;符号语言简洁、严谨,可缩短文字语言表达的长度,有利于推理、计算;图形语言,引起清晰的视觉形象,在抽象的数学思维面前起着具体化和加深理解的作用.各种数学语言间的互译是学好立体几何的前提.

4. 三个公理在今后解题中的作用

三个公理是平面的基本性质,是研究立体几何的基础.在解题中的具体作用如下:公理 1 可用来判断直线是否在平面内或证明若干直线共面的问题;公理 2 是判定两个平面相交的依据,说明两个平面的公共点在同一条直线上,在证明三点共线、三线共点问题时经常用到;公理 3 及推论是确定平面的依据,可用来证明"两个平面重合",是将立体图形问题转化为平面图形问题(降维法)的理论依据.

点拨:平面的基本性质是用公理的形式给出的,这是推理论证的基础,必须很好地掌握.

例4 如图 9-1-3,在正方体中,E是CD的中点,连接AE并延长与BC的延长线交于点F,连接BE并延长与AD的延长线交于点G.求证:直线FG在平面$ABCD$内,且直线FG与直线AB平行.

分 析:证明直线在平面内,只需找出直线上的两点在平面内即可,证明线线平行,可在这两条直线所在的平面内进行.

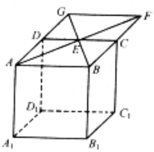

图 9-1-3

解 答:由已知,E是CD的中点.在正方体中,有

$$\left.\begin{array}{l}A\in\text{平面}ABCD\\E\in\text{平面}ABCD\end{array}\right\}\Rightarrow AE\subset\text{平面}ABCD.$$

$\because AE\cap BC=F$,

$\therefore F\in AE$,

$\therefore F\in$平面$ABCD$ ①

同理可得 $G\in$平面$ABCD$. ②

由①和②,得:直线$FG\subset$平面$ABCD$.

另外,在$Rt\triangle FBA$中,有$EC/\!/AB$,且$EC=\frac{1}{2}AB$,

所以$CF=BC$.同理$DG=AD$.

所以$CF/\!/DG$,且$CF=DG$,四边形$CFGD$是平行四边形.

所以$FG/\!/CD$,

所以直线$FG/\!/$直线AB.

方法提炼 绝大多数立体几何问题的研讨,都是首先根据立体几何的有关理论将其转化为平面几何问题;其次运用平面几何的有关知识获得其解;最后给出立体几何问题的解.这一过程可简记为:立体几何问题——平面几何问题——立体几何问题的解.因此,学好立体几何的关键是化空间问题为平面问题,新知识都在空间内!

思维能力拓展

文字语言、符号语言、图形语言之间的互译

例5 以P表示点,l表示直线,α表示平面,在下面给出的五种符号语言中,有且仅有一个是正确的,请找出正确的那一个,将其转译成相应的文字语言,并用图形表示出它的意义:

①$P\in l\in\alpha$;②$P\subset l\in\alpha$;③$P\in l\subset\alpha$;④$P\subset l\in\alpha$;⑤$P\in\alpha\subset l$.

分 析:弄清楚点与直线、点与平面以及直线与平面之间究竟该用怎样的符号联结是解答这类问题的关键.

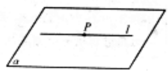

图 9-1-4

解 答:仅③是正确的,它表达的意义是"点P在直线l上,且直线l在平面α内",其图形表示如图 9-1-4.

方法提炼 使用符号语言表示点、线、面的关系时,最容易犯的错误即是混淆"$\in$"与"$\subset$"的使用对象,错用"$\not\subset$"、"$\subset$"来表示点与直线、点与平面的位置关系,而用"$\in$"、"$\notin$"来表示直线与平面位置关系.克服这一易错点的方法之一是结合集合的知识来认识点、直线和平面的关系.空间研究中最基本的元素是点,直线可以看成是由"共线点"组成的集合,平面则可能看成是"共面点"确定的集合,因此点与直线、点与平面都是元素与集合的关系,当然应该错用符号"$\in$"、"$\notin$"来表示它们之间的关系;而直线与平面是子集与全集的关系,自然应该用符号"$\not\subset$"、"$\subset$"来表示它们的关系了.

跟踪练习 1 如图 9-1-5(对该几何体暂不命名),用符号语言的形式表示.

(1)点E与直线BF的关系,点E与直线AF的关系;

(2)点F与平面ABC的关系,点F与平面ACD的关系;

(3)直线AE是否在平面ABD、平面ABF内?

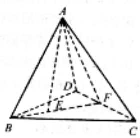

图 9-1-5

(4)直线AF与直线CD相交于点F;

(5)平面ABF与平面BCD有公共的直线BF.

综合探究创新

共点或共线问题

例6 (2003 年合肥市抽样测试)在正方体$ABCD—A_1B_1C_1D_1$

中，对角线 $A_1C\cap BDC_1=O$，AC、BD 交于点 M，求证：点 C_1、O、M 共线.

分 析：要证若干点共线的问题，只需证这些点同在两个相交平面内即可.

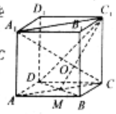

图 9-1-6

解 答：如图 9-1-6，由 $A_1A/\!/C_1C$，则 A_1A、C_1C 确定平面 A_1AC.

$\because$ $A_1C\subset$ 平面 A_1AC，$O\in A_1C$，

$\therefore$ $O\in$ 平面 A_1C.

又 $A_1C\cap$ 平面 $BDC_1=O$，

$\therefore$ $O\in$ 平面 BDC_1.

$\therefore$ O 在两平面 BDC_1 与平面 A_1AC 的交线上.

又 $AC\cap BD=M$，$\therefore$ $M\in$ 平面 BDC_1 且 $M\in$ 平面 A_1AC，

$\therefore$ 平面 $A_1AC\cap$ 平面 $BDC_1=C_1M$，

$\therefore$ $O\in C_1M$，即 O、C_1、M 三点共线.

点 睛 证明若干点共线问题，只需证明这些点同在两个相交平面内即可，证明三线共点，只需证明其中两线相交，然后证明另一条也过交点，实质上是证明点在线上的问题，可用公理 2.

跟踪练习 ② 如图 9-1-7，在正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，设线段 A_1C 与平面 ABC_1D_1 交于 Q，求证：B、Q、D_1 共线.

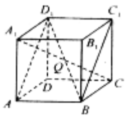

图 9-1-7

误区障碍跨越

障碍点 1 照搬平面几何中的结论到立体几何中

一定要注意，平面几何中的有些结论，在立体几何中不一定正确，可"类比"，但不可照搬.

［例］ 垂直于同一直线的两条直线可以确定几个平面？

［错解］ 设 $a\perp l$，$b\perp l$，则 $a/\!/b$，根据公理 3 的推论 3 知，a、b 可确定一个平面.

［正确解法］ (1)若 $a\perp l$，$b\perp l$，且 $a/\!/b$，则 a、b 可确定一个平面；

(2)若 $a\perp l$，$b\perp l$，且 a、b 相交，则 a、b 可确定一个平面；

(3)若 $a\perp l$，$b\perp l$，a 与 b 既不平行也不相交，则 a、b 不能确定平面.

综上所述，不能确定平面或可以确定一个平面.

［错解分析］ "垂直于同一直线的两条直线平行"这一结论在平面几何中成立，但在立体几何中不正确. 在学习立体几何时，经常采用"类比"的方法思考，但要十分注意立体几何与平面几何的区别.

［例］ 已知：如图 9-1-8，直线 $a/\!/b/\!/c$，直线 d 与 a、b、c 分别相交于 A、B、C. 求证：a、b、c、d 四条直线共面.

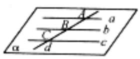

图 9-1-8

［错解一］ $\because a/\!/b/\!/c$，$\therefore a$、b、c 共面于平面 α.

$\because A\in a$，$\therefore A\in\alpha$. 同理 $B\in\alpha$.

又 $\because A\in d$，$B\in d$，$\therefore d\subset\alpha$. $\therefore a$、b、c、d 共面.

［错解二］ $\because a/\!/b$，$\therefore a$、b 共面.

设该平面为 α. $\because A\in a$，$B\in b$，$\therefore A\in\alpha$，$B\in\alpha$.

又 $\because A\in d$，$B\in d$，$\therefore d\subset\alpha$，$\because C\in d$，$d\subset\alpha$ $\therefore C\in\alpha$.

又 $\because C\in c$，$c/\!/a/\!/b$，$\therefore c\subset\alpha$.

$\therefore a$、b、c、d 四条直线共面.

［正确解法］ $\because a/\!/b$，$\therefore a$、b 共面. 设该平面为 α.

$\because A\in a$，$B\in b$，$\therefore A\in\alpha$，$B\in\alpha$.

又 $\because A\in d$，$B\in d$，$\therefore d\subset\alpha$.

$\therefore a$、b、d 共面于 α. 同理可证 b、c、d 共面.

设此平面为 β. $\because b\subset\alpha$，$d\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$d\subset\beta$，

而 $b\cap d=B$，$\therefore\alpha$ 与 β 为同一平面，$\therefore a$、b、c、d 四条直线共面.

［错解分析］ 错解一的错误在于误以为三条直线平行可以确定一个平面；错解二是对 $c\subset\alpha$ 的证明缺少理论根据.

障碍点 2 直观图的画法

画直观图时，一方面要注意各边的比例，另一方面要注意实、虚线的正确应用.

对于初学的同学来说，易忽略的地方较多. 如点与线、点与面、线与面间的关系，用符号表示时经常出现错误. 如直线 l 在平面 α 内写成 $l\in\alpha$. 再有画直观图时，虚、实线使用不当.

［例］ 画出两个相交平面的直观图.

［错解］ 如图 9-1-9.

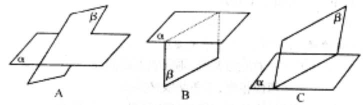

图 9-1-9

［正确解法］ 如图 9-1-10.

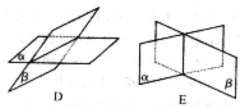

图 9-1-10

［错解分析］ 画直观图要注意实、虚线，它是正确表示空间位置关系的关键. 图 9-1-9 中 A 应画出平面 α、β 的交线；B 中 α、β 的交线应为实线；C 中被平面 β 挡着的部分应画成虚线.

方法规律总结

本节是基础内容，是学习立体几何的基础，高考一般不单独命题，但三个公理及推论的作用始终体现在立体几何的学习中，公理 1 的作用：判断线在面内，或点在面内，确定交线，检验平面是否平整；公理 2 的作用：确定交线，证明多点共线；公理 3 的作用：确定平面，证明共面问题，三个推论也主要是确定平面，论证点线共面或平面重合问题.

(1)证明共面问题

证明共面问题，一般有两种证法，一是由某些元素确定一个平面，再证明其余元素在这个平面内. 二是分别由不同元素确定若干个平面，再证明这些平面重合.

(2)证明三点共线问题

证明空间三点共线问题，通常证明这些点都在两个平面的交线上，即先确定出某两点在某两个平面的交线上，再证明第三点是两个平面的公共点. 当然必在两个平面的交线上.

(3)证明三线共点问题

证明空间三线共点问题，先证两条直线交于一点，再证明第三条直线经过这点，把问题转化为证明点在直线上的问题.

跟踪练习答案

1. (1)点 $E\in$ 直线 BF；点 $E\notin$ 直线 AF；

(2)点 $F\notin$ 平面 ABC；点 $F\in$ 平面 ACD；

(3)直线 $AE\not\subset$ 平面 ABD；直线 $AE\subset$ 平面 ABF；

(4)直线 $AF\cap$ 直线 $CD=$ 点 F；

(5)平面 $ABF\cap$ 平面 $BCD=$ 直线 BF.

2. 略.

优化题型展示

考查目标

一、选择题

1. (基础题)给出下列三个命题：

①平行四边形就是一个平面 ②矩形不能用来表示平面 ③长方体的各个面可以用来表示六个不同的平面

其中正确的命题的个数是(　　)

A. 0个　　B. 1个　　C. 2个　　D. 3个

←考查平面的概念.

2. (基础题)下列命题：

①如果一条直线与两条相交直线都相交，那么这三条直线确定1个平面 ②经过一点的两条直线确定一个平面 ③经过一点的三条直线确定一个平面 ④点 A 在平面 α 内，也在直线 a 上，则直线 a 在平面 α 内 ⑤平面 α 和平面 β 相交于不在同一条直线上的三个点 A,B,C

其中正确的命题个数是(　　)

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

←考查平面的概念、直线和平面的位置关系.

3. (能力题)下列命题中正确的是(　　)

A. 空间四点中有三点共线，则此四点必共面

B. 三个平面两两相交，三条交线必共点

C. 空间两组对边分别相等的四边形是平行四边形

D. 平面 α 和平面 β 只有一个交点

←考查共面与共点问题.

4. (能力题)下列说法中正确的是(　　)

A. 如果两个平面 α,β 有一条公共直线 a，就说平面 α,β 相交，并记作 $\alpha\cap\beta=a$

B. 两平面 α,β 有一公共点 A，就说 α,β 相交于过 A 的任意一条直线

C. 两平面 α,β 有一公共点 A，就说 α,β 相交于点 A，记作 $\alpha\cap\beta=A$

D. 平面 ABC 与平面 DBC 相交于线段 BC

←考查符号语言的应用.

5. (应用题)下列图形中不一定是平面图形的是(　　)

A. 三角形　　B. 菱形　　C. 梯形　　D. 四边相等的四边形

←考查平面的概念.

6. (能力题)若 $a\subset\alpha,b\subset\beta,\alpha\cap\beta=c,a\cap b=M$，则错误的是(　　)

A. $M\in c$　　B. $M\notin c$　　C. $M\in\alpha$　　D. $M\in\beta$

←考查符号语言的应用.

7. (能力题)空间三条直线，两两相交，点 P 不在这三条直线上，那么由点 P 和这三条直线最多可以确定的平面个数为(　　)

A. 4个　　B. 5个　　C. 6个　　D. 7个

←考查公理的应用.

8. (能力题)四条线段顺次首尾相连，它们最多可确定的平面个数有(　　)

A. 4个　　B. 3个　　C. 2个　　D. 1个

←考查公理的应用.

9. (提高题)已知平面 $\alpha,\beta,\gamma,\beta\cap\gamma=a,\gamma\cap\alpha=b,\alpha\cap\beta=c$，且点 $O\in a,O\in b,O\in c$，平面 α,β,γ 把空间分成 n 部分，则 n 是(　　)

A. 8　　B. 7　　C. 6　　D. 5

←考查公理的应用.

10. (综合题)两条相交直线 l,m 都在平面 α 内，且都不在平面 β 内，命题甲：l 和 m 中至少有一条与 β 相交；命题乙：平面 α 与 β 相交. 则甲是乙的(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件　　C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

←考查公理的应用.

二、填空题

11.（基础题）设平面 α 与平面 β 交于直线 l，$A\in\alpha$，$B\in\alpha$，且 $AB\cap l=C$，则 $AB\cap\beta=$______.

←考查直线和平面的位置关系.

12.（能力题）与不共线的三点距离都相等的点的个数是______.

←考查公理的应用.

13.（基础题）对于命题：$\left.\begin{array}{l}\text{直线 } a\cap\text{直线 } b=P\\ a\subset\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow P\in\alpha$，用文字语言可叙述为________________________.

←考查符号语言与文字语言的互译.

图 9-1-11

14.（提高题）图 9-1-11 是一个平面图形的直观图，则该平面图形是______.

←考查水平放置的图形的画法知识的应用.

三、解答题

15.（提高题）如图 9-1-12 所示，已知直线 l 与四边形 $ABCD$ 的三边分别交于 P、Q、R.
求证：四边形 $ABCD$ 为平面图形.

←考查公理的应用.

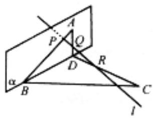

图 9-1-12

16.（提高题）证明：过直线外一点有且只有一条直线与它平行.

←考查公理的应用.

17.（提高题）在正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，记 A_1C 与平面 ABC_1D_1 交于点 Q（如图 9-1-13），求证：点 B，Q，D_1 共线.

←考查公理的应用及点共线问题.

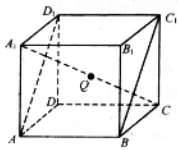

图 9-1-13

9.2 空间直线

学习目标要求

目标 1：空间两直线的三种位置关系.
目标 2：空间的平行直线、等角定理.
目标 3：异面直线的定义及异面直线所成角的定义.
目标 4：会求给出公垂线的异面直线的距离.

重点难点突破

1. 空间两直线的位置关系

空间两条直线的位置关系既是研究直线与直线及后面将要学习的直线和平面，平面和平面的各种位置关系的开始和基础，考虑问题要从平面移到空间来进行，空间两直线有三种位置关系. 即相交、平行、异面. 若从有无公共点的角度看，可分为两类：有且只有一个公共点——相交直线；没有公共点——平行或异面；若从共面角度来划分为：在同一平面内——

相交或平行;不同在任何一个平面内——异面.

点拨:判定空间两直线的位置关系可以从公共点个数或是否共面入手.

例1 图9-2-1是呈长方形状的一个房间的直观图的一部分,在墙面与墙面、墙面与地面的交线AB,BC,AA_1,CC_1,A_1B_1,B_1C_1,C_1D_1,D_1A_1中:

(1)找出与AB相交、平行、异面的直线;

(2)找出与AA_1相交、平行、异面的直线.

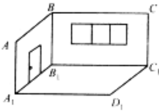

图9-2-1

分析:由于两直线相交或平行时,确定一个平面.故可从是否共面角度去判断.

解答:(1)与AB相交、平行、异面的直线依次是AA_1,BB_1,BC;A_1B_1,C_1D_1;B_1C_1,CC_1,A_1D_1.

(2)与AA_1相交、平行、异面的直线依次是AB,A_1B_1,A_1D_1;BB_1,CC_1;BC,B_1C_1,C_1D_1.

方法提炼 观察实物有助于提高空间意识.

2. 公理4

平行于同一直线的两条直线平行,这就是公理4,称为平行公理.由此可知直线间平行的传递性在空间也是成立的,它给出空间两条直线平行的一种证明方法,是证明等角定理、研究异面直线所成的角的基础.

注意:平面几何中的定义、定理等,在立体图形中,需要经过证明才能应用.

例2 如图9-2-2,已知E,F分别是空间四边形$ABCD$的边AB与BC的中点,G,H分别是CD与AD上靠近点D的所在边的三等分点,求证:四边形$EFGH$是梯形.

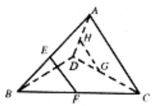

图9-2-2

分析:要证明四边形$EFGH$是梯形,则需要证明它有一对边平行但不相等(或另一对边不平行).可以考虑EF与GH是否平行且不相等.

解答:连AC,则在$\triangle ABC$中,由于E,F分别是AB与BC边上的中点,

$\therefore EF$是$\triangle ABC$与AC边平行的中位线.

$\therefore EF=\frac{1}{2}AC$且$EF/\!/AC$

在$\triangle ACD$中,由于$\frac{DG}{DC}=\frac{DH}{DA}=\frac{1}{3}$,

$\therefore GH=\frac{1}{3}AC$且$GH/\!/AC$.

于是可知:$EF/\!/GH$且$EF\neq GH$.

$\therefore$四边形$EFGH$是梯形.

拓展延伸 (1)易错点为仅证$EF/\!/GH$,而不论证$EF\neq GH$;若E,F,G,H均为相应边的中点时,可以论证四边形$EFGH$为平行四边形;

(2)一般地,若$\frac{BF}{FC}=\frac{BE}{EA}=\lambda$,$\frac{DG}{GC}=\frac{DA}{HA}=\mu$,当$\lambda=\mu$时,四边形$EFGH$为平行四边形;当$\lambda\neq\mu$时,四边形$EFGH$为梯形.

3. 异面直线的概念

不同在任何一个平面内的两条直线叫做异面直线.

异面直线的概念是本节知识的重点与难点,可从下面三点来加深理解:

(1)异面直线具有既不相交也不平行的特点,要通过实例来加强认识.

(2)异面直线定义中"不同在任何一个平面内"是指这两条直线"不能确定一个平面",不能误解为"不同在某一个平面内".例如图9-2-2中直线$EF/\!/GH$,不同在平面BCD,就误认为EF与GH异面.

(3)通过正确地作图来直观地认识异面直线.图9-2-3是常见的三种直观图.画异面直线要以一个平面或两个平面为衬托,体现出不相交、不平行的特点.

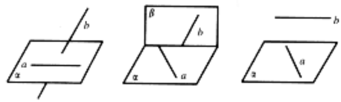

图9-2-3

例3 已知$\alpha\cap\beta=a$,$b\subset\beta$,且$b\cap a=A$,$c\subset\alpha$,且$c/\!/a$.求证:b和c是异面直线.

分析:证明b和c是异面直线可以从异面直线定义出发(反证法),也可以用教材的例题的证法.

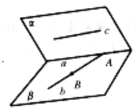

图9-2-4

解答:证法一:如图9-2-4,

$\because\alpha\cap\beta=a$,$b\cap a=A$,

$\therefore A\in\alpha$,又$c\subset\alpha$,$c/\!/a$.

$\therefore A\notin c$,在直线b上任取一点B(不同于A).因$b\subset\beta$,故$B\notin a$.$\therefore b$,c是异面直线.

证法二:假设b,c共面,则$b/\!/c$或b与c相交.

(1)若$b/\!/c$,又$\because a/\!/c$,$\therefore a/\!/b$.与已知$b\cap a=A$矛盾.故$b/\!/c$不成立.

(2)若b与c相交,交点为O,因$b\subset\beta$,$c\subset\alpha$且$\alpha\cap\beta=a$,则交点O必在直线a上.

$\therefore a$与c交于O与已知$a/\!/c$矛盾.

$\therefore b$与c不相交.

由(1)(2)知:b,c不共面,故b,c为异面直线.

方法提炼 证法一是利用教科书的例题:平面内一点和平面外一点的连线,和平面内不经过该点的直线是异面直线.可以当作判定定理.教材中的例题、练习题在高考中可以直接应用.

4. 两异面直线所成的角

异面直线所成的角及异面直线的距离确定了异面直线在空间的相对位置,平行公理及等角定理为定义异面直线所成的角提供了可能性.

点拨：求两条异面直线所成的角的关键是作出异面直线所成的角，其方法是：将其中一条平移到某个位置使其与另一条相交或是将两条异面直线同时平移到某个位置使它们相交. 值得注意的是：平移后相交所得的角必须容易算出，因此，平移时要求选择适当位置和注意角的范围.

例④ 如图9-2-5，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，求：

(1)求AD与BB_1所成的角；

(2)求AC与BC_1所成的角；

(3)EF与A_1G所成的角，其中E，F，G分别是AA_1，AB，CC_1的中点.

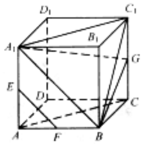

图9-2-5

分 析：从异面直线所成的角的定义看，求两条异面直线a与b所成的角，可在空间任选一点O，过点O分别作a、b的平行线就可以了. 但在实际操作中，点O往往在a上或b上，这样只需移动一条直线，就可以作出异面直线所成的角. 在正方体中讨论两条异面直线所成的角，又常常将点O取在线段的端点上，以便使异面直线所成的角成为三角形的内角，为求出这个角创造条件.

解 答：(1)$\because AA_1 /\!/ BB_1$，

$\therefore \angle A_1AD$就是异面直线AD与BB_1所成的角.

$\because \angle A_1AD=90°$，

$\therefore$异面直线AD，BB_1成$90°$角.

(2)连接A_1C_1，由$A_1C_1 /\!/ AC$，知$\angle A_1C_1B$就是异面直线AC与BC_1所成的角.

连接A_1B. 由$A_1C_1=BC_1=A_1B$知，$\triangle A_1BC_1$是等边三角形，即$\angle A_1C_1B=60°$，

$\therefore$异面直线AC与BC_1成$60°$角.

(3)连接A_1B，BG，$\because A_1B /\!/ EF$，

$\therefore \angle BA_1G$就是异面直线EF、A_1G所成的角.

设$AB=2a$，则$A_1B=2\sqrt{2}a$，$BG=\sqrt{5}a$，$A_1G=3a$，在$\triangle A_1BG$中，由余弦定理，得：

$$\cos\angle BA_1G=\frac{A_1B^2+A_1G^2-BG^2}{2A_1B\times A_1G}=\frac{8a^2+9a^2-5a^2}{2\times2\sqrt{2}a\times3a}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\because 0°<\angle BA_1G\leqslant 90°$，

$\therefore \angle BA_1G=45°$，即异面直线$EF$，$A_1G$成$45°$角.

方法提炼 求两条异面直线所成角的一般步骤是：①构造：用平移法作出异面直线所成的角；②认定：证明作出的角就是要求的角或其补角；③计算：利用三角形中余弦定理求角；④结论：注意异面直线所成角的范围是$(0°,90°]$.

5. 异面直线间的距离

简单地说，抓住定义就能产生“定义法”，即设法作出异面直线的公垂线段，再求出它的长；又由于异面直线的距离具有“存在性”、“唯一性”和“最小性”. 即公垂线段是分别在异面直线上任意两点间的连接长度最短的一条线段，抓住“最小性”就能产生“最小值法”.

注意：高考中只要求已知公垂线段求异面直线距离.

例⑤ 在空间四边形$ABCD$中，$AB=BC=CD=DA=AC=BD=a$，E、F分别是AB和CD的中点.

(1)求证：DF是AB和CD的公垂线段；

(2)求AB和CD的距离.

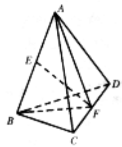

图9-2-6

分 析：利用等腰三角形底边上的中线即是高的性质，从而易证EF就是异面直线AB和CD的距离. 要求AB和CD的距离，只需解$\mathrm{Rt}\triangle FEB$，求出EF即可(如图9-2-6所示).

解 答：(1)如图9-2-6所示，连AF，BF.

$\because \triangle BCD$与$\triangle ACD$为边长为a的正三角形，F为CD的中点，

$\therefore AF=BF=\frac{\sqrt{3}}{2}a$. 又$E$为$AB$的中点，

$\therefore EF$与AB垂直相交，同理$EF\perp CD$.

$\therefore EF$为AB，CD的公垂线段.

(2)由(1)知，EF为AB和CD的距离.

在$\mathrm{Rt}\triangle FEB$中，$BF=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，$BE=\frac{a}{2}$，

$$\therefore EF=\sqrt{BF^2-BE^2}=\sqrt{\frac{3}{4}a^2-\frac{1}{4}a^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

即AB和CD间的距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

拓展延伸 本例考查我们对两条异面直线间距离的概念的理解以及论证与计算能力. 用“定义法”求异面直线间的距离的步骤可简单地归纳为：一作，二证，三计算.

思维能力拓展

空间两条直线位置关系的判定

例⑥(2005年北京春招理工卷)有如下三个命题：

①分别在两个平面内的两条直线是异面直线；

②垂直于同一个平面的两条直线是平行直线；

③过平面α的一条斜线有一个平面与平面α垂直.

其中正确命题的个数为(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

分 析：两条直线的位置关系有三种，注意分析，可构造正方体帮助分析.

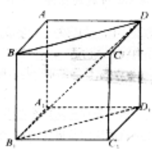

图9-2-7

解 答：如图 9-2-7，正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，BD 在平面 $ABCD$ 内，B_1D_1 在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 内，但它们又同时在平面 BDD_1B_1 内，故①错误；②显然正确；对于③，平面 BDD_1B_1 过底面平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的一条斜线 DB_1 且和底面 $A_1B_1C_1D_1$ 垂直，故③正确. 故选 C.

点 拨 空间两条直线的位置关系有三种：平行、相交和异面，而两条直线异面是个重点. 异面直线的判定主要有两种方法：判定定理和反证法.

跟踪练习 1 已知直线 a、b 是异面直线，A、B 是 a 上相异两点，C、D 是 b 上相异两点. 求证：AC、BD 是异面直线.

综合探究创新

异面直线所成的角与距离

例 7 如图 9-2-8，在棱长都为 a 的四面体 $ABCD$ 中，E、F 分别为 AD、BC 的中点.

(1)求证：EF 是 AD 和 BC 的公垂线，并求 EF 的长；

(2)求异面直线 AF 与 CE 所成的角.

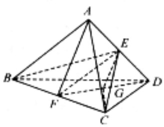

图 9-2-8

分 析：(1)利用等腰三角形证明线线垂直；

(2)利用三角形中位线平移线段找异面直线所成的角.

解 答：(1)连接 BE、CE，

$\because$ $ABCD$ 是正四面体，E 为 AD 中点，$\therefore$ $BE=CF$.

又 F 为 BC 中点，$\therefore$ $EF\perp BC$，同理 $EF\perp AD$.

$\therefore$ EF 为 AD 和 BC 的公垂线.

又 $CE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，$CF=\dfrac{1}{2}a$. $\therefore$ $EF=\sqrt{CE^2-CF^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

故异面直线 AD 和 BC 的距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

(2)取 FD 中点 G，则 $FG/\!/AF$，连 CG.

$\therefore$ $\angle CEG$ 为异面直线 AF 与 CE 所成的角.

在 $\triangle CEG$ 中，$CE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，$EG=\dfrac{1}{2}AF=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a$，

$CG=\sqrt{FG^2+FC^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}a$.

$\therefore$ $\cos\angle CEG=\dfrac{CE^2+EG^2-CG^2}{2CE\cdot EG}=\dfrac{2}{3}$.

故异面直线 AF 与 CE 所成的角为 $\arccos\dfrac{2}{3}$.

点 拨 求异面直线所成的角，一般应将它们所成的角作出来，作角的方法通常有：在一条直线上取合适一点，过这点作另一条的平行线；在空间选一点作两条平行线，可借助平行四边形或三角形的中位线来作平行线.

求异面直线的距离，一般应先找出两异面直线的公垂线段，再通过解三角形求解. 若不能直接找出公垂线，则可考虑用线面平行法或面面平行法.

跟踪练习 2 如图 9-2-9，在棱长为 1 的正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中 M、N、P 分别为 A_1B_1、BB_1、CC_1 的中点.

(1)求异面直线 D_1P 与 AM，CN 与 AM 所成的角；

(2)判断 D_1P 与 AN 是否为异面直线，若是，求其距离.

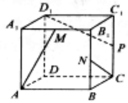

图 9-2-9

课区障碍跨越

障碍点 1　对异面直线概念的理解

对异面直线应注意以下两个方面：(1)不能把异面直线的定义误解为“分别位于两个不同平面内的两条直线”. (2)不能把异面直线的定义误解为“在某一平面内的一条直线和这个平面外的另一条直线”.

障碍点 2　异面直线所成角的范围

异面直线所成角的范围是 $\theta\in(0°,90°]$，在利用余弦定理求异面直线所成角时，若出现角的余弦值为负值，错误地得出异面直线所成角为钝角，此时应转化为正值求出相应的锐角才是异面直线所成的角.

［例］ 已知 a、b 是两条异面直线，直线 c 和直线 d 分别与 a、b 都相交，试判断 c、d 的位置关系.

［错解］ 如图 9-2-10 所示，设直线 c 与 a、b 分别交于 A、B. 直线 d 与 a、b 分别交于 D、C，$\therefore$ A、B、C、D 四点不共面，否则与 a、b 异面矛盾，故直线 AB、CD 异面. 即直线 c、d 是异面直线.

［正确解法］ 直线 c、d 的位置关系是相交或异面，如图 9-2-10 和 9-2-11 所示.

［错解分析］ 错解在于缺乏空间想像力，没有对交点个数进行分类讨论.

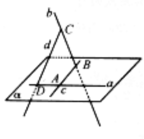

图 9-2-10

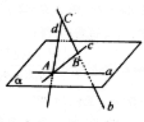

图 9-2-11

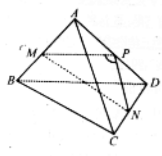

图 9-2-12

［例］ 如图 9-2-12，空间四边形 $ABCD$ 的对角线 $AC=10$，$BD=6$，M、N 分别是 AB、CD 的中点，$MN=7$，求异面直线

AC、BD 所成角.

［错解］ 取 AD 的中点 P，连接 PM、PN.

$\because M$、N 分别为 AB、CD 的中点，$\therefore PM /\!/ BD, PN /\!/ AC$.

$\therefore \angle MPN$ 即为异面直线 AC 与 BD 所成角.

$\because AC=10, BD=6, \therefore PN=\frac{1}{2}AC=5, PM=\frac{1}{2}BD=3$.

又$\because MN=7$，$\therefore$ 在$\triangle MPN$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle MPN=-\frac{1}{2}$.

$\therefore AC$ 与 BD 所成的角为 $120°$.

［正确解法］ 由于两异面直线所成角的范围是$(0°,90°]$，

$\therefore AC$ 与 BD 所成的角为 $60°$.

［错解分析］ 错解中的错误之处在于误把$\angle MPN$ 看作直线 AC 与 BD 所成的角，事实上，当$\angle MPN$ 为锐角或直角时，是两条异面直线所成角，当$\angle MPN$ 为钝角时，应取它的补角.

方法规律总结

1. 证明两条直线平行的方法

(1)定义：在同一平面内两条直线无公共点.

(2)公理4：若 $a /\!/ c, b /\!/ c$，则 $a /\!/ b$.

2. 判定空间两条直线是异面直线的方法

(1)根据异面直线的定义.

(2)异面直线的判定定理.

(3)反证法.

3. 求异面直线所成角的方法

求异面直线所成的角是通过平移直线，把异面问题转化为共面问题来解决. 根据等角定理及推论，异面直线所成的角的大小与顶点位置无关，将角的顶点取在一些特殊点上(如线段端点，中点等)，以便于计算，具体步骤如下：

①利用定义构造角；②证明所作出的角为异面直线所成的角；③解三角形求角.

4. 求异面直线距离的方法

(1)公垂线法：找出或作出两异面直线的公垂线，再计算公垂线段的长度.

(2)线面平行法：过其中一条直线作和另一直线平行的平面，则异面直线的距离转化为线到面的距离.

(3)面面平行法：作出过两异面直线的两个平行平面，则异面直线的距离转化为两平行平面的距离.

跟踪练习答案

1. 略

2. (1)D_1P 与 AM 所成角为$90°$，CN 与 AM 所成角为 $\arccos\frac{2}{5}$；

(2)D_1P 与 AN 为异面直线，其距离为 1.

优化题型展示

考查目标

一、选择题

1. (基础题)一条直线与两条平行线中的一条是异面直线，那么它与另一条直线的位置关系是(　　)

A. 相交　　B. 异面　　C. 平行　　D. 相交或异面

←考查空间两直线的位置关系.

2. (能力题)空间四边形 $ABCD$ 中，M，N 分别是 AB，CD 的中点，设 $l=\frac{1}{2}(BD+AC)$，则(　　)

A. $MN>l$　　B. $MN<l$　　C. $MN=l$　　D. MN 与 l 的大小关系不定

←考查空间直线的位置关系.

3. (能力题)如图 9-2-13，$ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 是正方体，$B_1E_1=D_1F_1=\frac{A_1B_1}{4}$，则 BE_1 与 DF_1 所成角的余弦值是(　　)

A. $\frac{15}{17}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{8}{17}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

←考查异面直线所成的角.

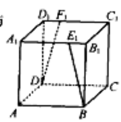

图 9-2-13

4. (综合题)设 a,b,c 是两两异面的三条直线，已知 $a\perp b$，且 d 是 a,b 的公垂线，如果 $c\perp a$，那么 c 与 d 的位置关系是(　　)

A. 相交　　B. 平行　　C. 异面　　D. 异面或平行

←考查公垂线、空间直线的位置关系.

5. (基础题)长方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 的一条对角线与长方体的棱所组成的异面直线有(　　)

A. 2 对　　B. 3 对　　C. 6 对　　D. 12 对

←考查异面直线的概念.

6. (能力题)两条异面直线所成角为 θ，则有(　　)

A. $0<\cos\theta\leq 1$　　B. $0\leq\cos\theta<1$

C. $0\leq\sin\theta<1$　　D. $0\leq\sin\theta\leq 1$

←考查异面直线所成的角.

7. (能力题)如图 9-2-14，点 P,Q,R,S 分别在正方体的四条棱上，并且是所在棱的中点，则直线 PQ 和 RS 是异面直线的一个图是(　　)

←考查异面直线的概念.

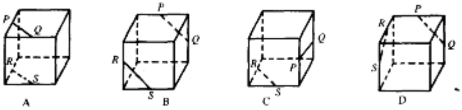

图 9-2-14

8. (能力题)设正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中,六个面内的对角线共有 n 条,与 BD 成 $60°$ 角,则 n 等于(　　)　←考查异面直线所成的角.

A. 0　　B. 2　　C. 4　　D. 8

二、填空题

9. (能力题)把边长为 a 的正方形 $ABCD$ 沿对角线 BD 折起,使 A,C 的距离等于 a,如图 9-2-15 所示,则异面直线 AC 和 BD 的距离为________.　←考查异面直线间的距离.

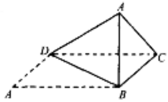

图 9-2-15

10. (能力题)正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中,BD_1 与 A_1D 所成的角为 α_1,AB_1 与 BC_1 所成的角为 α_2,AA_1 与 BD_1 所成的角为 α_3,则 α_1,α_2,α_3 的大小关系是____________.　←考查异面直线所成的角.

11. (探究题)"a,b 为异面直线"是指:①$a\cap b=\varnothing$,且 a 不平行 b;②$a\subset\alpha$,$b\subset\beta$,且 $a\cap b=\varnothing$;③$a\subset\alpha$,$b\subset\beta$,且 $\alpha\cap\beta=\varnothing$;④$a\subset\alpha$,$b\not\subset\alpha$;⑤不存在平面 α,使 $a\subset\alpha$,$b\subset\alpha$ 成立. 上述结论中,正确的是____________.　←考查异面直线的概念及相关知识.

12. (探究题)下列 5 个命题中:　←考查公理 4 及空间两直线的位置关系.

(1)平行于同一直线的两条直线平行;

(2)垂直于同一直线的两条直线平行;

(3)过直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行;

(4)与已知直线平行且距离等于定长的直线只有两条;

(5)若一个角的两边分别与另一个角的两边平行,那么这两个角相等.

其中正确的是________(填序号).

三、解答题

13. (能力题)如图 9-2-16,已知 a,b 是异面直线,$A,B\in a$,$C,D\in b$.

求证:AC 和 BD 也是异面直线.　←考查异面直线的概念.

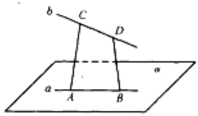

图 9-2-16

14. (能力题)在棱长为 a 的正四面体 $ABCD$ 中,E、F 分别为 BC、AD 中点,求异面直线 DE 与 BF 所成角的余弦值.　←考查异面直线所成的角.

15. (综合题)如图 9-2-17,AB 和 CD 是两异面直线,BD 是它们的公垂线,$AB=CD$,M 是 BD 的中点,N 是 AC 的中点.　←考查异面直线、公垂线.

(1)求证:$MN\perp AC$;

(2)当 $AB=CD=a$,$BD=b$,$AC=c$ 时,求 MN 的长.

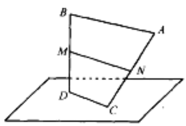

图 9-2-17

9.3 直线与平面平行的判定和性质

学习目标要求

目标 1：直线与平面的位置关系.
目标 2：直线与平面平行的判定和性质.

重点难点突破

1. 直线与平面的位置关系

直线与平面的位置关系为：

(1) 直线在平面内——有无数个公共点；

(2) 直线与平面相交——有且只有一个公共点；

(3) 直线和平面平行——没有公共点，如图 9-3-1 所示.

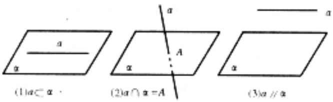

图 9-3-1

注意：判断直线与平面的位置关系关键在于判断直线与平面的交点个数，或结合图形进行判断.

例 1 给出一条直线 a 和两个平面 α,β，画图：

(1) $a\subset\alpha$，且 $a\subset\beta$；

(2) $a\cap\alpha=A$，且 $a\cap\beta=B$，要求画两图；

(3) $a\parallel\alpha$，且 $a\parallel\beta$，要求画两图.

分 析：本题要求将符号语言转化成图形.

解 答：(1) $\because a\subset\alpha$，且 $a\subset\beta$，$\therefore \alpha\cap\beta=a$，图形见图 9-3-2(1)；

(2) 图形见图 9-3-2(2)(3)；

(3) 图形见图 9-3-2(4)(5).

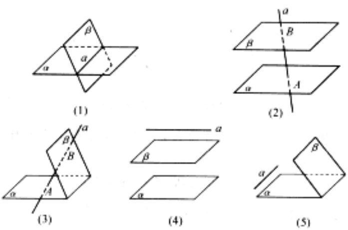

图 9-3-2

拓展延伸 画图没有虚线实线结合，体现不出立体感，是常见的错误.

2. 直线与平面平行的判定定理和性质定理

直线与平面平行的判定定理和性质定理可以用于证明空间两直线平行，判定定理可以概括为“线线平行⇒线面平行”；性质定理可以概括为“线面平行⇒线线平行”.

直载：(1) 在应用时要注意定理中的条件. 判定定理中有三个条件：① $a\not\subset\alpha$；② $b\subset\alpha$；③ $a\parallel b$. 性质定理也有三个条件：① $a\parallel\alpha$；② $\alpha\cap\beta=b$；③ $a\subset\beta$. 这些条件缺一不可.

(2) 判定与性质定理常常交替使用：即先通过线线平行推出线面平行，再通过线面平行推出新的线线平行，复杂的试题还可能继续下去. 我们可称此为平行链，如下所示：

线线平行 $\xrightarrow[\text{或找一直线}]{\text{在平面内作}}$ 线面平行 $\xrightarrow[\text{找平面与平面的交线}]{\text{经过直线作或}}$ 线线平行.

例 2 已知 AB,BC,CD 是不在同一平面内的三条线段，E,F,G 分别是 AB,BC,CD 的中点.

求证：平面 EFG 和 AC 平行，也和 BD 平行.

分 析：欲证明直线 $AC\parallel$ 平面 EFG，根据直线和平面平行的判定定理只需证明 AC 平行平面 EFG 内的一条直线，由图 9-3-3 可知，只需证明 $AC\parallel EF$.

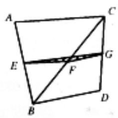

图 9-3-3

解 答：如图 9-3-3，连接 AC,EG,EF,GF.

在 $\triangle ABC$ 中，E,F 分别是 AB,BC 的中点.

$\because AC\parallel EF$. 又 $AC\not\subset$ 平面 EFG，$EF\subset$ 平面 EFG.

$\therefore AC\parallel$ 平面 EFG. 同理可证：$BD\parallel$ 平面 EFG.

拓展延伸 到目前为止，判定直线和平面平行有以下两种方法：

(1) 根据直线与平面平行的定义；

(2) 根据直线和平面平行的判定定理.

思维能力拓展

1. 有关线线平行的问题

例 3 如图 9-3-4，已知 $\alpha\cap\beta=l$，$a\parallel\alpha$，$a\parallel\beta$. 求证：$a\parallel l$.

分 析：由已知直线与平面平行想到线面平行的性质定理，可作辅助平面，寻找交线，应用线面平行的性质定理和平行公理证明.

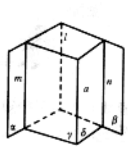

图 9-3-4

解 答：过直线 a 作两个平面 γ 和 δ，分别与 α,β 相交于 m,n.

$\because a\parallel\alpha$，$a\subset\gamma$，$\alpha\cap\gamma=m$，

$\therefore a\parallel m$，同理 $a\parallel n$，$\therefore m\parallel n$.

又 $\because n\subset\beta$，$\therefore m\parallel\beta$.

又 $m\subset\alpha,\alpha\cap\beta=l$.

$\therefore m/\!/l$，又 $a/\!/m$，$\therefore a/\!/l$.

方法提炼 正确使用线面平行性质定理的关键是：过已知直线作一个辅助平面. 本题易产生错误的是：对直线 m,n，不是利用线面平行的性质定理作平面得到，而是在平面 α（或平面 β）内直接作直线 m（或直线 n），导致推理不严谨.

跟踪练习 1　求证：如果一条直线和两个相交平面都平行，那么这条直线和它们的交线也平行.

2. 有关线面平行问题

例4 已知有公共边 AB 的两个全等的矩形 $ABCD$ 和 $ABEF$ 不在同一平面内，P、Q 分别是对角线 AE、BD 上的点，且 $AP=DQ$.

求证：$PQ/\!/$平面 CBE.

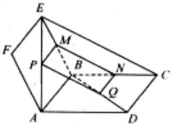

图 9-3-5

分　析：关键是在平面 CBE 内找到一条直线，使 PQ 平行于这条直线.

解　答：如图 9-3-5，作 $PM/\!/AB$ 交 BE 于 M，作 $QN/\!/AB$ 交 BC 于点 N，则 $PM/\!/QN$.

$\therefore \dfrac{PM}{AB}=\dfrac{EP}{EA},\dfrac{QN}{CD}=\dfrac{BQ}{BD}$.

$\because AP=DQ$，$\therefore EP=BQ$，

又 $\because AB=CD,EA=BD$，$\therefore PM=QN$.

又 $\because PM/\!/QN$，$\therefore$ 四边形 $PMNQ$ 是平行四边形.

$\therefore PQ/\!/MN$.

$\because PQ\not\subset$ 平面 CBE，$MN\subset$ 平面 CBE，$\therefore PQ/\!/$平面 CBE.

总结 应用线面平行的判定定理证明线面平行，关键是找到平面内与平面外直线平行的直线. 应用线面平行的性质定理解题的关键是利用已知条件作辅助平面，然后把已知中的线面平行转化为直线和交线平行.

跟踪练习 2　如图 9-3-6 所示，已知空间四边形 $ABCD$ 中，P，Q 两点分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 的重心，试判断直线 PQ 与平面 ACD 的位置关系如何？

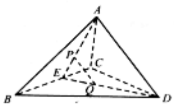

图 9-3-6

综合探究创新

直线与平面平行知识的创新应用

例5（2004 年全国高考天津文科卷）如图 9-3-7，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，侧棱 $PD\perp$ 底面 $ABCD$，$PD=DC$，E 是 PC 的中点.

（Ⅰ）证明 $PA/\!/$平面 EDB；

（Ⅱ）求 EB 与底面 $ABCD$ 所成的角的正切值.

分　析：（Ⅰ）E 为中点，底面为正方形，可以利用中位线的性质，

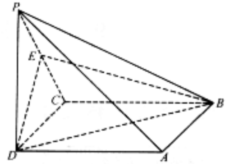

图 9-3-7

连 AC 得与 BD 的交点 O 为 AC 的中点. 证 $EO/\!/PA$ 后转化为线面平行.

（Ⅱ）作 $EF\perp CD$ 于 F，连 BF，则 $\angle EBF$ 为所求的 EB 与底面 $ABCD$ 所成的角，再求其正切值.

解　答：方法一：（Ⅰ）证明：连接 AC，AC 交 BD 于 O. 连接 EO.

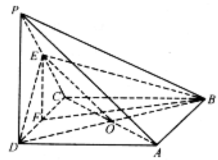

图 9-3-8

$\because$ 底面 $ABCD$ 是正方形，$\therefore$ 点 O 是 AC 的中点.

在 $\triangle PAC$ 中，EO 是中位线，$\therefore PA/\!/EO$.

而 $EO\subset$ 平面 EDB 且 $PA\not\subset$ 平面 EDB，所以，$PA/\!/$平面 EDB.

（Ⅱ）解：作 $EF\perp DC$ 交 DC 于 F. 连接 BF，设正方形 $ABCD$ 的边长为 a.

$\because PD\perp$ 底面 $ABCD$，$\therefore PD\perp DC$.

$\therefore EF/\!/PD$，F 为 DC 的中点.

$\therefore EF\perp$ 底面 $ABCD$，BF 为 BE 在底面 $ABCD$ 内的射影，故 $\angle EBF$ 为直线 EB 与底面 $ABCD$ 所成的角.

在 $Rt\triangle BCF$ 中，

$BF=\sqrt{BC^2+CF^2}=\sqrt{a^2+(\dfrac{a}{2})^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}a$.

$\because EF=\dfrac{1}{2}PD=\dfrac{a}{2}$，$\therefore$ 在 $Rt\triangle EFB$ 中，

$\tan EBF=\dfrac{EF}{BF}=\dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}a}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

所以 EB 与底面 $ABCD$ 所成的角的正切值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

方法二：如图 9-3-9 所示建立空间直角坐标系，D 为坐标原点. 设 $DC=a$.

（Ⅰ）证明：连接 AC，AC 交 BD 于 G. 连接 EG.

依题意得 $A(a,0,0)$，$P(0,0,a)$，$E(0,\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2})$.

$\because$ 底面 $ABCD$ 是正方形，$\therefore G$ 是此正方形的中心，故点 G 的坐标为 $(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2},0)$.

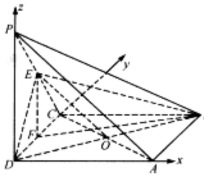

图 9-3-9

$\therefore \overrightarrow{PA}=(a,0,-a),\overrightarrow{EG}=(\frac{a}{2},0,-\frac{a}{2})$.

$\therefore \overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{EG}$. 这表明 $PA/\!/EG$.

而 $EG\subset$ 平面 EDB 且 $PA\not\subset$ 平面 EDB,

$\therefore PA/\!/$ 平面 EDB.

(Ⅱ)解:依题意得 $B(a,a,0)$,$C(0,a,0)$.

取 DC 的中点,$F(0,\frac{a}{2},0)$,连接 EF,BF.

$\because \overrightarrow{FE}=(0,0,\frac{a}{2})$,

$\overrightarrow{FB}=(a,\frac{a}{2},0),\overrightarrow{DC}=(0,a,0)$,

$\therefore \overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{FB}=0,\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{DC}=0$.

$\therefore FE\perp FB,FE\perp DC$.

$\therefore EF\perp$ 底面 $ABCD$,BF 为 BE 在底面 $ABCD$ 内的射影,故 $\angle EBF$ 为直线 EB 与底面 $ABCD$ 所成的角.

在 $\mathrm{Rt}\triangle EFB$ 中,

$|\overrightarrow{FE}|=\frac{a}{2},|\overrightarrow{FB}|=\sqrt{a^2+(\frac{a}{2})^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}a$.

$$\therefore \tan\angle EBF=\frac{|\overrightarrow{FE}|}{|\overrightarrow{FB}|}=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}a}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

所以,EB 与底面 $ABCD$ 所成的角的正切值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

评注 在本题考查了直线与平面平行、直线与平面所成的角等基础知识,考查空间想像能力和推理论证能力.

跟踪练习 3 有如图 9-3-10 所示的木块,点 P 在平面 $A'C'$ 内,棱

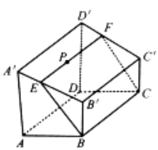

图 9-3-10

BC 平行于平面 $A'C'$,要经过点 P 和棱 BC 将木料锯开,锯开的面必须平整,怎样锯?

课区障碍跨越

障碍点 对问题的全面思考

对于本节内容,考虑问题必须全面,特别是要注意空间想像能力的培养与应用,不能只考虑一般情况,而丢掉特殊情况.

[例] 已知 P 是异面直线 a、b 外一点,则过 P 与 a、b 都平行的平面有几个?

[错解] 设平面 α 过点 P,且与 a、b 都平行,则直线 a 与其外一点 P 确定的平面与 α 的交线为 a',$\therefore a'/\!/a$. 同理,由 b 及其外一点 P 确定的平面与 α 的交线为 b',$\therefore b'/\!/b$,$\therefore \alpha$ 即为 a'、b' 所确定的平面.

由于过点 P 与 a 平行的直线 a' 是唯一的,b' 也是唯一的,因而 a'、b' 确定的平面 α 也是唯一的.

综上所述,过点 P 与 a、b 都平行的平面只有一个.

[正确解法] (1)当点 P 所在的位置使 a、P(或 b、P)本身确定的平面平行与 b(或 a)时,过点 P 作不出与 a、b 都平行的平面. (2)当点 P 所在的位置使 a、P(或 b、P)本身确定的平面与(b 或 a)不平行时,可过点 P 作 $a'/\!/a$,$b'/\!/b$,由于 a、b 异面,则 a'、b' 不重合且相交于 P,由于 $a'\cap b'=P$,所以 a'、b' 可确定一个平面 α,则由线面平行的判定定理知,$a/\!/\alpha$,$b/\!/\alpha$,所以可作一个平面与 a、b 都平行.

故应作"0 个或 1 个"平面.

[错解分析] 错解没有注意到 $a\subset\alpha$ 或 $b\subset\alpha$ 的特殊情况.

方法规律总结

直线和平面平行的判定方法

(1)定义:$a\cap\alpha=\varnothing\Rightarrow a/\!/\alpha$;

(2)判定定理:$a/\!/b,a\not\subset\alpha,b\subset\alpha\Rightarrow a/\!/\alpha$;

(3)线面垂直的性质:$b\perp a,b\perp\alpha,a\not\subset\alpha\Rightarrow a/\!/\alpha$;

(4)面面平行的性质:$\alpha/\!/\beta,a\subset\alpha\Rightarrow a/\!/\beta$.

跟踪练习答案

1. 略

2. $PQ/\!/$ 平面 ACD

3. 过点 P 在平面 $A'C'$ 内画线 $EF/\!/B'C'$.

$\because BC/\!/$ 面 $A'C'$,$BC\subset$ 平面 $BCC'B'$,面 $BCC'B'\cap$ 面 $A'C'=B'C'$,

$\therefore BC/\!/B'C'$,$\therefore EF/\!/BC$. 则 E、F、B、C 确定一个平面 α.

连接 EB、CF,则沿 BE、EF、FC、CB 将木块锯开,可得一符合条件的平面.