

试验设计与分析

(第2版)

陈 魁 编著

$L_9(3^4)$

列号 试验号	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1



清华大学出版社

试验设计与分析

(第2版)

田 军 著

章 节	内 容	备 注
第1章	试验设计的基本概念	
第2章	试验设计的基本原理	
第3章	试验设计的基本方法	
第4章	试验设计的基本步骤	
第5章	试验设计的基本结果	

内 容 简 介

本书主要介绍工程技术中常用的试验设计与分析方法,内容包括方差分析、因子设计、正交试验设计、稳健设计和可靠性设计,其中稳健设计是较新的试验设计方法。本书内容丰富,例题多样,紧密联系实际。书中配有一定数量的习题,书后附有习题答案。概率统计的基础知识作为附录 A 列于书后,附录 B 是常用的分布表和正交表。

本书可作为理工科各专业及管理专业的大学生、研究生的教材,也可供工程技术人员、科研人员和教师参考。

版权所有,翻印必究。举报电话:010-62782989 13501256678 13801310933

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

本书防伪标签采用特殊防伪技术,用户可通过在图案表面涂抹清水,图案消失,水干后图案复现;或将表面膜揭下,放在白纸上用彩笔涂抹,图案在白纸上再现的方法识别真伪。

图书在版编目(CIP)数据

试验设计与分析/陈魁编著. —2 版. —北京:清华大学出版社,2005. 7

ISBN 7-302-10905-2

I. 试… II. 陈… III. 试验设计(数学)—高等学校—教材 IV. O212.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 039821 号

出 版 者: 清华大学出版社

<http://www.tup.com.cn>

社 总 机: 010-62770175

地 址: 北京清华大学学研大厦

邮 编: 100084

客户服务: 010-62776969

组稿编辑: 刘 颖

文稿编辑: 王海燕

印 刷 者: 清华大学印刷厂

装 订 者: 三河市化甲屯小学装订二厂

发 行 者: 新华书店总店北京发行所

开 本: 185×230 印 张: 19.75 字 数: 406 千字

版 次: 2005 年 7 月第 1 版 2005 年 7 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 7-302-10905-2/O.461

印 数: 1~3000

定 价: 34.00 元

第 2 版前言

《试验设计与分析》于 1996 年出版以后,经过几年的教学实践,又积累了一些经验,同时也收到许多读者反馈的信息.根据这些经验和反馈信息,修改后写成第 2 版.第 2 版增加了部分内容,修改了原书中存在的不当之处,文字叙述作了些修改,力求教材质量有所提高,使之更便于学习.

尚有不足之处,恳请读者批评指正.

陈 魁

2005 年 2 月

第 1 版前言

试验设计方法是当代工程技术人员必须掌握的技术方法之一. 从 1990 年起, 本人在清华大学多次讲授“试验设计”课, 听过课的学生都认为很有实用价值, 建议推广. 1993 年在讲稿的基础上, 写出了试验设计与分析讲义, 用过几遍, 学生反映很好. 为满足更多读者学习的需要, 应当有一本正式出版的教材, 这种情况促使本人编写此书.

本书是根据本人多年的教学经验, 在上述讲义的基础上, 经过较大的修改、补充完成的, 内容更加充实. 本书的核心内容是正交试验设计和方差分析. 还介绍了因子设计中的 2^k 、 3^k 因子设计, 稳健设计, 可靠性设计等内容. 这都是常用的优化设计方法.

为使读者阅读本书方便, 减轻查找资料的负担, 特将概率论与数理统计的基础知识作为附录 A、常用分布表和正交表等作为附录 B, 一并列于书末.

在编写本书的过程中, 参考了国内外的书籍和资料(主要书目列于书后), 引用了其中的一些内容和实例, 在此对所有作者和译者表示诚挚的感谢.

清华大学马振华教授对本书的编写给予了很大的帮助, 他审阅了讲义和书稿, 提出了很多宝贵的意见, 在此表示衷心的感谢.

清华大学教材委员会的白光义、杨积康老师及清华大学出版社对本书的出版都给予了热情的支持和帮助, 特表示衷心的感谢.

由于编者水平所限, 错误和不妥之处在所难免. 恳请读者批评指正.

陈 魁

1995 年 8 月于清华园

目 录

绪言	1
第 1 章 方差分析和回归分析	3
1.1 单因素试验的方差分析	3
1.2 双因素试验的方差分析	10
1.2.1 无交互作用的方差分析	10
1.2.2 有交互作用的方差分析	16
1.3 一元线性回归	21
1.3.1 线性回归方程	21
1.3.2 σ^2 的点估计	25
1.3.3 线性假设的显著性检验(T 检验法)	26
1.3.4 线性回归的方差分析(F 检验法)	28
1.3.5 利用回归方程进行预报(预测)	29
1.3.6 非线性回归的线性转化	32
1.4 多元线性回归简介	37
习题	38
第 2 章 2^k 和 3^k 因子设计	41
2.1 因子设计的一般概念	41
2.2 2^k 因子设计	42
2.2.1 2^2 设计	42
2.2.2 2^3 设计	47
2.2.3 一般的 2^k 设计	83
2.2.4 2^k 设计的耶茨算法	59
2.3 3^k 因子设计	60
2.3.1 3^2 设计	61
2.3.2 3^3 设计	63
2.3.3 一般的 3^k 设计	67
习题	68
第 3 章 正交试验设计	72
3.1 正交表及其用法	72

3.2	多指标的分析方法	78
3.2.1	综合平衡法	78
3.2.2	综合评分法	81
3.3	混合水平的正交试验设计	83
3.3.1	混合水平正交表及其用法	83
3.3.2	拟水平法	86
3.4	有交互作用的正交试验设计	88
3.4.1	交互作用表	89
3.4.2	水平数相同的有交互作用的正交设计	90
3.5	正交表的构造法	91
3.5.1	符号转换法	91
3.5.2	阿达马矩阵法	94
3.5.3	正交拉丁方的方法	97
3.5.4	混合型正交表构造法	101
3.6	正交试验设计的方差分析	108
3.6.1	正交设计方差分析的步骤与格式	108
3.6.2	3 水平正交设计的方差分析	110
3.6.3	2 水平正交设计的方差分析	114
3.6.4	混合型正交设计的方差分析	119
3.6.5	拟水平法的方差分析	121
3.6.6	重复试验的方差分析	124
3.6.7	重复取样的方差分析	126
3.7	正交试验设计中的效应计算与指标值的预估计	129
3.7.1	正交试验设计的数据结构	129
3.7.2	正交试验设计中的效应计算	133
3.7.3	最优方案下指标值(理论值)的预估计	136
	习题	138
第 4 章	稳健设计	141
4.1	引言	141
4.2	质量工程原理	142
4.2.1	基本概念	142
4.2.2	质量损失函数	144
4.2.3	平均质量损失	146
4.2.4	利用非线性性减少质量损失	148

4.3	产品的三阶段设计	149
4.3.1	综述	149
4.3.2	参数设计	150
4.3.3	容差设计	151
4.4	信噪比及其应用	153
4.4.1	噪声灵敏度的估算	154
4.4.2	静力学问题的信噪比	155
4.4.3	动力学问题的信噪比	156
4.4.4	信噪比在寻求最优工艺条件问题中的 应用	160
4.5	稳健设计步骤	163
4.5.1	综述	163
4.5.2	多晶硅沉淀过程及其作用	164
4.5.3	噪声因子和试验条件	165
4.5.4	质量特征数和目标函数	166
4.5.5	控制因子和它们的水平	167
4.5.6	正交试验	168
4.5.7	数据分析	172
4.5.8	核实试验	179
4.5.9	有序类型数据分析	179
第5章	可靠性设计	186
5.1	可靠性概念	186
5.2	可靠度的计算	187
5.2.1	串联方式	187
5.2.2	并联方式	188
5.2.3	串-并联方式	190
5.3	可靠度函数与故障率	192
5.3.1	故障率计算实例	192
5.3.2	可靠度函数与故障率的精确定义	194
5.3.3	几个重要分布的可靠度函数和故障率	196
5.3.4	指数分布故障率的计算	200
5.4	可靠度设计	202
5.4.1	一般概念	202
5.4.2	元件可靠度的分配	203

5.4.3	可修复系统平均故障间隔的计算	206
5.4.4	元器件的选用	207
5.4.5	元器件的正确使用	207
5.4.6	固有可靠度的设计	208
附录A	概率论与数理统计基础知识	209
A1	概率论基础	209
A1.1	随机事件及其概率	209
A1.2	随机变量及其分布	215
A1.3	多维随机变量及其分布	221
A1.4	随机变量的数字特征	226
A1.5	极限定理	232
A2	数理统计基础——参数估计与假设检验	234
A2.1	数理统计的基本概念	234
A2.2	参数的点估计	240
A2.3	参数的区间估计	242
A2.4	参数的假设检验	247
附录B	附表	256
附表1	标准正态分布表	256
附表2	泊松分布表	259
附表3	t 分布表	261
附表4	χ^2 分布表	263
附表5	F 分布表	267
附表6	正交表	276
附表7	拉丁方设计所用标准方表	294
附表8	正交拉丁方表	297
习题答案		301
主要参考书目		303

绪 言

试验设计方法是数理统计学的应用方法之一。一般的数理统计方法主要是对已经获得的数据资料进行分析,对所关心的问题作出尽可能精确的判断。试验设计则是研究如何合理而有效地获得数据资料的方法,它的主要内容是讨论如何合理地安排试验、取得数据,然后进行综合的科学分析,从而达到尽快获得最优方案的目的。

在工农业生产、科学实验和经营管理中,经常要进行各种试验。如何安排试验、如何对试验进行科学的分析,是生产工作者、科技工作者经常遇到的现实问题。如果试验安排得好,且分析得当,就能以较少的试验次数、较短的试验时间、较低的费用,得到较满意的试验结果;反之,如果试验安排得不好,分析不得当,则试验次数增加,试验时间延长,浪费人力、物力、财力,难以达到预期的结果,甚至导致试验失败。因此对试验必须事先进行设计。

一个好的试验应包括三个方面:

(1) 试验的设计。这里首先要明确试验的目的,确定要考察的因素以及它们的变动范围,然后根据试验目的制定出合理的试验方案。

(2) 试验的实施。按照设计出的试验方案,实地进行试验,取得必要的数据结果。

(3) 试验结果的分析。对试验所得数据进行分析,判定所考察的因素中哪些是主要的,从而确定出最好的生产条件,即最优方案。

总之,试验设计就是试验的最优化设计。

试验设计方法始于 20 世纪 20 年代,至今已有 80 多年的历史。整个发展过程可分为三个阶段。

第一阶段:早期的方差分析法。这种方法是在 20 世纪 20 年代由英国生物统计学家、数学家费希尔(R. A. Fisher, 1890—1962 年,英国洛萨姆斯台特试验农场工程师)提出的,开始主要应用于农业、生物学、遗传学方面,取得了丰硕的成果。此方法用于田间试验,使农业大幅度增产,费希尔把这种方法定名为“试验设计”,并出版了专著《试验设计》,从而开创了一门新的应用技术学科。20 世纪 30 到 40 年代,英国、美国、苏联等国家都对此进行研究,并把这种方法逐步推广到工业生产领域中,在采矿、冶金、建筑、纺织、机械、医药等行业都有所应用。第二次世界大战期间,英国、美国采用这种方法在工业生产中取得了显著效果。

第二阶段:传统的正交试验设计法。第二次世界大战后,日本面临着恢复发展国民经济的问题。他们把前面所说的试验设计方法作为质量管理技术之一从英国、美国引进。1949 年以田口玄一为首的一批研究人员在日本电讯研究所研究电话通讯的系统质量时

应用此方法,并发现了它的不足,他们加以改进,创造了正交试验设计法,即用正交表安排试验的方法.这种方法在日本迅速推广,据统计,推广这种方法的前10年,试验项目超过100万项,其中有1/3效果十分显著,获得极大的经济效益.在日本,正交表设计技术早已成为企业界人士、工程技术人员、研究人员和管理人员必备的技术,成为工程师们共同语言的一部分.

第三阶段:稳健(robust)设计.有些书中将稳健性(robustness)翻译为鲁棒性.一般来讲,产品的性能与许多误差因素有关(有时将这些误差因素称为噪声),要想通过消除这些误差因素来提高产品的性能往往是不现实的,因此,人们寄希望于尽可能降低误差因素的影响,使产品性能对误差因素的变化是不敏感的,或称为是稳健的.基于这种思想,对产品的性能、质量和成本做综合考虑,所提出的既提高产品质量,又降低成本的设计方法就称为稳健设计.1957年,田口玄一把信噪比设计和正交表设计、方差分析相结合,用信噪比作为特征数来衡量质量,用正交表来安排试验,选择最佳的参数组合,从而确立了稳健设计的基本原理,开辟了更为重要、更为广泛的应用领域.它可以进行评价与改善计测仪表的计测方法的误差,解决产品或工序的最佳稳定性和最佳动态特性问题.产品设计一般分为三个阶段,它们是系统设计、参数设计和容差设计,三阶段设计是传统的试验设计方法的重要发展和完善,它充分利用专业技术、生产实践提供的信息资料,和正交表设计方法相结合,取得了十分显著的技术与经济效果.

实践证明,正交设计法与产品的三阶段设计法是试验设计技术的重要方法,它带来巨大的经济效益.日本战后工业生产迅速发展的重要原因之一就是在各工业领域里普遍推广和应用试验设计法,日本把试验设计技术誉为他们的国宝.

可靠性设计是另外一个重要的专题,内容非常丰富,应用非常广泛.一般情况下,不可能作全面的研究.但它又是一个很重要的问题,为了对它有个基本的了解,在本书的最后开出一章——可靠性设计,介绍其最基本内容,以满足读者在这方面的需要.

我国从20世纪50年代开始研究这门学科,并逐步应用到工农业生产中.20世纪60年代末,中国科学院系统研究所(统计数学室)的研究人员,在正交试验设计的观点、理论和方法上都有新的创见,编制了一套适用的正交表,简化了试验程序和试验结果的分析方法,创立了简单易懂、行之有效的正交试验设计法.自1973年,特别是推行全面质量管理以来,研究和推广正交试验设计法又有了很大的进展,在正交理论的研究上有了新的突破.不少科研生产单位,应用正交试验设计方法,解决了一些问题、取得了显著的效果.产品的三阶段设计法在我国起步较晚,20世纪80年代才开始研究,也取得了一些成果.试验设计方法,不仅在技术性领域应用广泛,在非技术性领域,如生产计划、产品销售、经营管理业务上也有应用.普及和推广试验设计方法对我国的经济发展一定会起到很大的推动作用.

第 1 章 方差分析和回归分析

方差分析是一种统计方法,有着广泛的应用.它是试验设计中用到的重要分析方法.

在实践中,影响一个事物的因素往往是很多的,人们总是要通过试验,观察各种因素的影响.例如,不同型号的机器,不同的原材料,不同的技术人员以及不同的操作方法,等等,对产品的产量、性能都会有影响.当然有的因素影响大,有的因素影响小,有的因素可以控制,有的因素不能控制.如何从多种可控因素中找出主要因素,通过对主要因素的控制调整,提高产品的产量、性能,这是人们所希望的,解决这个问题的有效方法之一就是方差分析.

上述产品的产量、性能等称为试验指标,它们受因素的影响.因素的不同状态称为水平,一个因素可采取多个水平.不同的因素、不同的水平可以看作是不同的总体.通过观测可以得到试验指标的数据,这些数据可以看成是从不同总体中得到的样本数值,利用这些数据可以分析不同因素、不同水平对试验指标影响的大小.为便于说明问题,我们先从最简单的单因素情况说起.

1.1 单因素试验的方差分析

设单因素 A 有 a 个水平 $A_1, A_2, \dots, A_a$, 在水平 $A_i (i=1, 2, \dots, a)$ 下, 进行 n_i 次独立试验, 得到试验指标的观察值列于表 1.1.1.

表 1.1.1

	1	2	...	n_i
A_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n_1}
A_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n_2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$
A_i	x_{i1}	x_{i2}	...	x_{in_i}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$
A_a	x_{a1}	x_{a2}	...	x_{an_a}

假定在各个水平 $A_i (i=1, 2, \dots, a)$ 下的样本为 $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i}$, 它们来自具有相同方差 σ^2 , 均值分别为 μ_i 的正态总体 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$, 其中 μ_i, σ^2 均为未知, 并且不同水平 A_i 下的样本之间相互独立.

取下面的线性统计模型:

$$\begin{cases} x_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}, & i = 1, 2, \dots, a, \quad j = 1, 2, \dots, n_i, \\ \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2), & \text{各 } \varepsilon_{ij} \text{ 相互独立,} \end{cases} \quad (1.1.1)$$

其中 ε_{ij} 为随机误差.

设

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^a n_i \mu_i \quad (1.1.2)$$

为总平均值, 其中 $n = \sum_{i=1}^a n_i$. 令

$$\delta_i = \mu_i - \mu \quad (1.1.3)$$

为第 i 个水平 A_i 的效应, 则 $\sum_{i=1}^a n_i \delta_i = 0$, 于是式(1.1.1) 变成

$$\begin{cases} x_{ij} = \mu + \delta_i + \varepsilon_{ij}, & i = 1, 2, \dots, a, \quad j = 1, 2, \dots, n_i, \\ \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2). \end{cases} \quad (1.1.1)'$$

方差分析的任务就是检验线性统计模型(1.1.1)中 a 个总体 $N(\mu_i, \sigma^2)$ 中的各 μ_i 的相等性, 即有

$$\text{原假设 } H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_a, \quad (1.1.4)$$

对立假设 $H_1: \mu_i \neq \mu_j$, 至少有一对这样的 i, j ,

也就是下面的等价假设:

$$\begin{aligned} H_0: \delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_a = 0, \\ H_1: \delta_i \neq 0, \text{ 至少有一个 } i. \end{aligned} \quad (1.1.4)'$$

检验这种假设的适当的程序就是方差分析.

顺便指出, 对线性统计模型(1.1.1)或(1.1.1)', 进行形如式(1.1.4)或式(1.1.4)'的假设检验, 这种模型叫做固定效应模型.

解决这种模型的具体步骤如下:

1. 总离差平方和的分解

记在水平 A_i 下的样本均值为

$$\bar{x}_{i\cdot} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}, \quad (1.1.5)$$

样本数据的总平均值为

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}, \quad (1.1.6)$$

总离差平方和为

$$S_T = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x})^2. \quad (1.1.7)$$

将 S_T 改写并分解,得

$$\begin{aligned} S_T &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} [(\bar{x}_{i.} - \bar{x}) + (x_{ij} - \bar{x}_{i.})]^2 \\ &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{x}_{i.} - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_{i.})^2 \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{x}_{i.} - \bar{x})(x_{ij} - \bar{x}_{i.}), \end{aligned}$$

上面展开式中的第三项为 0.

因为

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{x}_{i.} - \bar{x})(x_{ij} - \bar{x}_{i.}) &= 2 \sum_{i=1}^a (\bar{x}_{i.} - \bar{x}) \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_{i.}) \\ &= 2 \sum_{i=1}^a (\bar{x}_{i.} - \bar{x}) \left(\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} - n_i \bar{x}_{i.} \right) = 0, \end{aligned}$$

若记

$$S_A = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{x}_{i.} - \bar{x})^2, \quad (1.1.8)$$

$$S_E = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_{i.})^2, \quad (1.1.9)$$

则有

$$S_T = S_A + S_E. \quad (1.1.10)$$

这里 S_T 表示全部试验数据与总平均值之间的差异,又称为总变差. S_A 表示在 A_i 水平下的样本均值与总平均值之间的差异,叫做因素 A 效应的平方和,又称为组间差. S_E 表示在 A_i 水平下的样本均值与样本值之间的差异,它是由随机误差引起的,叫做误差平方和,又称为组内差. 式(1.1.10)表示 S_T 等于 S_A 与 S_E 之和. 这就是总离差平方和的分解式.

2. 统计分析

由式(1.1.1)知,

$$x_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma^2), \quad (1.1.11)$$

将 S_T 改写为

$$S_T = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x})^2 = (n-1)S^2, \quad (1.1.12)$$

这里 S^2 是样本方差,即

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x})^2.$$

考虑到

$$\frac{S_T}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1), \quad (1.1.13)$$

从而知 S_T 的自由度为 $n-1$.

将 S_E 改写为

$$S_E = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_{i.})^2 = \sum_{i=1}^a (n_i - 1) S_i^2, \quad (1.1.14)$$

这里 S_i^2 是在 A_i 水平下的样本方差, 即

$$S_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_{i.})^2.$$

因为

$$\frac{(n_i - 1) S_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_i - 1), \quad (1.1.15)$$

再由 χ^2 分布的可加性知

$$\frac{S_E}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^a \frac{(n_i - 1) S_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m), \quad (1.1.16)$$

其中 $m = \sum_{i=1}^a (n_i - 1) = n - a$, 即

$$\frac{S_E}{\sigma^2} \sim \chi^2(n - a). \quad (1.1.17)$$

由此可知, S_E 的自由度为 $n - a$, 并且有

$$E\left(\frac{S_E}{\sigma^2}\right) = n - a, \quad (1.1.18)$$

即有

$$E(S_E) = (n - a)\sigma^2, \quad (1.1.19)$$

或

$$E\left(\frac{S_E}{n - a}\right) = \sigma^2. \quad (1.1.20)$$

由式(1.1.8)知,

$$S_A = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{x}_{i.} - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^a n_i (\bar{x}_{i.} - \bar{x})^2,$$

展开后可化成

$$S_A = \sum_{i=1}^a n_i \bar{x}_{i.}^2 - n \bar{x}^2. \quad (1.1.21)$$

由式(1.1.2)、式(1.1.6)、式(1.1.11)和 x_{ij} 之间的独立性可知

$$\bar{x}_{i.} \sim N\left(\mu_i, \frac{\sigma^2}{n_i}\right), \quad (1.1.22)$$

$$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), \quad (1.1.23)$$

所以

$$E(\bar{x}_{i.}) = \mu_i, \quad V(\bar{x}_{i.}) = \frac{\sigma^2}{n_i}, \quad E(\bar{x}) = \mu, \quad V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

再由 $E(\bar{x}_{i.}^2) = V(\bar{x}_{i.}) + E^2(\bar{x}_{i.})$, $E(\bar{x}^2) = V(\bar{x}) + E^2(\bar{x})$, 得

$$\begin{aligned} E(S_A) &= E\left(\sum_{i=1}^a n_i \bar{x}_{i.}^2 - n \bar{x}^2\right) \\ &= \sum_{i=1}^a n_i E(\bar{x}_{i.}^2) - n E(\bar{x}^2) \\ &= \sum_{i=1}^a n_i \left(\frac{\sigma^2}{n_i} + \mu_i^2\right) - n \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right) \\ &= a\sigma^2 + \sum_{i=1}^a n_i (\mu + \delta_i)^2 - \sigma^2 - n\mu^2 \\ &= (a-1)\sigma^2 + \sum_{i=1}^a n_i \mu^2 + 2\mu \sum_{i=1}^a n_i \delta_i + \sum_{i=1}^a n_i \delta_i^2 - n\mu^2. \end{aligned}$$

由于 $\sum_{i=1}^a n_i = n$, $\sum_{i=1}^a n_i \delta_i = 0$, 所以得出

$$E(S_A) = (a-1)\sigma^2 + \sum_{i=1}^a n_i \delta_i^2. \quad (1.1.24)$$

在 $H_0: \delta_i = 0$ 成立的条件下, 有

$$E(S_A) = (a-1)\sigma^2, \quad (1.1.25)$$

$$E\left(\frac{S_A}{a-1}\right) = \sigma^2. \quad (1.1.26)$$

因为 S_A 与 S_E 相互独立(证明略), 再由式(1.1.10)、式(1.1.13)、式(1.1.17)和 χ^2 分布的加法性质可得出

$$\frac{S_A}{\sigma^2} \sim \chi^2(a-1), \quad (1.1.27)$$

并得出 S_A 的自由度为 $a-1$.

记

$$MS_A = \frac{S_A}{a-1}, \quad (1.1.28)$$

$$MS_E = \frac{S_E}{n-a}, \quad (1.1.29)$$

并分别称之为 S_A , S_E 的均方. 由式(1.1.20)可知, MS_E 是 σ^2 的无偏估计, 当 H_0 成立时, 由式(1.1.26)可知, MS_A 也是 σ^2 的无偏估计.

在 H_0 成立的条件下, 取统计量

$$F = \frac{\frac{S_A}{\sigma^2} / a - 1}{\frac{S_E}{\sigma^2} / n - a} \sim F(a-1, n-a),$$

即

$$F = \frac{MS_A}{MS_E} \sim F(a-1, n-a). \quad (1.1.30)$$

对于给出的 α , 查出 $F_\alpha(a-1, n-a)$ 的值, 由样本值计算出 S_A , S_E , 从而算出 F 值. 由式(1.1.24)看出, 若 H_0 不成立, 即 $\delta_i \neq 0$ (至少一个 i), S_A 偏大, 导致 F 偏大, 因此, 判断如下: 若 $F > F_\alpha(a-1, n-a)$, 则拒绝 H_0 ; 若 $F < F_\alpha(a-1, n-a)$, 则接受 H_0 .

为了计算的方便, 通常采用下面的简便计算公式.

$$\text{记 } x_{i.} = \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, a, \quad x_{..} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}, \text{ 则有}$$

$$\begin{cases} S_T = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2 - \frac{x_{..}^2}{n}, \\ S_A = \sum_{i=1}^a \frac{x_{i.}^2}{n_i} - \frac{x_{..}^2}{n}, \\ S_E = S_T - S_A. \end{cases} \quad (1.1.31)$$

将上面的分析过程和结果, 列成一个简洁的表格(见表 1.1.2), 能给解决问题带来方便, 这个表叫做单因素方差分析表.

表 1.1.2 单因素方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均方	F 比
因素 A	S_A	$a-1$	$MS_A = \frac{S_A}{a-1}$	$F = \frac{MS_A}{MS_E}$
误差 E	S_E	$n-a$	$MS_E = \frac{S_E}{n-a}$	
总和 T	S_T	$n-1$		

例 1.1.1 人造纤维的抗拉强度是否受掺入其中的棉花的百分比的影响是有疑问