面向21世纪课程教材辅导用书

线性代数学习指南

房宏　陈立新　主编

(1) $D_n=\begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{vmatrix}$，其中主对角线上元素全为$a$，未写出的元素都是0；

(2) $D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$；

(3) $D_n=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1) & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & (a-n) \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$；

(4) $D_n=\begin{vmatrix} a_n & & & O & & b_n \\ & \ddots & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ O & & & & & O \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \ddots & \\ c_n & & & O & & d_n \end{vmatrix}$；

南开大学出版社

线性代数学习指南

房　宏　陈立新　主　编

参编者（按姓氏笔画排）

马志宏　王学会　孙国红

陈立新　赵翠萍　张海燕

南开大学出版社

天　津

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指南 / 房宏,陈立新主编．—天津:南开大学出版社，2004.6
ISBN 7-310-02088-X

Ⅰ.线...　Ⅱ.①房...②陈...　Ⅲ.线性代数—高等学校—教学参考资料　Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 019335 号

出版发行　南开大学出版社
地址:天津市南开区卫津路 94 号　邮编:300071
营销部电话:(022)23508339　23500755
营销部传真:(022)23508542
邮购部电话:(022)23502200

出版人　肖占鹏
承　印　南开大学印刷厂印刷
经　销　全国各地新华书店
版　次　2004 年 6 月第 1 版
印　次　2004 年 6 月第 1 次印刷
开　本　880mm×1230mm　1/32
印　张　10.375
字　数　298 千字
印　数　1—5000
定　价　18.00 元

前　言

编写本书的目的，是想对正在学习和复习线性代数的同学们提供一些辅导，帮助同学们加深对线性代数中基本概念、基本定理的理解，引导同学们掌握线性代数的解题方法和技巧，启发、培养同学们学习线性代数的兴趣。

本书是通过对例题的分析、讲解、解题方法的总结等方式提供辅导的，例题的选择基本上符合农科、工科、经济类等专业线性代数课程教学的基本要求。因此，不管读者使用什么样的教材，都能使用此书。

本书的例题中有介绍基本概念和基本运算方法的计算题或证明题，有一题多解的开拓思路题，也有较灵活的综合题。不少例题在答解前作了详细的分析，解答后有归纳，相信会对读者有较大的帮助。

由于本书主要是为初学者提供的辅导教材，故在每一章都安排有内容提要、课后习题全解及典型例题。我们建议读者对每一章的内容提要先看一看，想一想，再去看典型例题的题目；先自己动手算一算，再看题解，这样会帮助大些。在每一章的最后都有综合测试及相应的答案。

参加本书编写的教师有：马志宏（第一章），王学会（第二章），张海燕（第三章），房宏（第四章），赵翠萍（第五章），陈立新（第六章、附录），孙国红（第七章）。

编写本书时，参阅了许多书籍，引用了许多经典的例子，恕不一一指明出处，在此一并向有关的作者致谢。

编者虽然对本书的编写尽了最大的努力，但由于水平与经验有限，加之时间仓促，难免有错误与不妥之处，敬请读者指正。

编者

2004 年 1 月

目　　录

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

第一章　行列式

内容提要

一、全排列及逆序数

1. 全排列

把 n 个不同元素排成一排，叫做这 n 个元素的全排列（简称排列）.

2. 逆序数

在一个排列中任取两个数字，如果较大的数字排在较小数字的左边，则称这两个数字构成一个逆序.

一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数.

逆序数为奇数的排列叫做奇排列；逆序数为偶数的排列叫做偶排列.

二、n 阶行列式

***n* 阶行列式的定义**

设有 n^2 个数，排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \tag{1}$$

作出表(1)中位于不同行不同列的 n 个数的乘积，并冠以符号 $(-1)^t$ 得

到形如

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{2}$$

的项，其中 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，t 为这个排列的逆序数. 由于这样的排列共有 $n!$ 个，因此形如(2)式的项共有 $n!$ 项，所有这 $n!$ 项的代数和

$$\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

称为 n 阶行列式，记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

简记作 $\det(a_{ij})$，数 a_{ij} 称为行列式 $\det(a_{ij})$ 的元素.

三、行列式的性质

性质 1 行列式与它的转置行列式相等.

性质 2 一数乘行列式等于该数乘以行列式的某一行(列).

推论 若行列式中一行(列)元素为零，则行列式为零.

性质 3 互换行列式的两行(列)，行列式变号.

推论 如果行列式有两行(列)完全相同，则此行列式等于零.

性质 4 行列式中如果有两行(列)元素成比例，则此行列式等于零.

性质 5 若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和，则行列式等于该行(列)的元素对应的两个行列式之和，其余各行(列)的元素与原行列式相同. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 6 把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数,然后再加到另一行(列)对应的元素上去,行列式的值不变.

性质 7 行列式等于它的任一行(列)的各元素分别与其对应的代数余子式乘积之和.

性质 8 行列式的任一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式的乘积之和必为零.

四、行列式的计算方法

1. 定义法.
2. 化成三角形行列式法.
3. 逆推法.
4. 降阶法.
5. 升阶法.
6. 分解之和法.
7. 分解之积法.
8. 换元法.
9. 数学归纳法.
10. 线性因子法.
11. 辅助行列式法.
12. 应用范德蒙行列式进行计算.
13. n 阶循环行列式算法.

五、行列式的应用

1. 克莱姆法则

如果线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\quad\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\neq0,$$

则方程组有惟一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad\cdots,\quad x_n=\frac{D_n}{D}.$$

其中 D_j $(j=1,2,\cdots,n)$是把系数行列式中第 j 列的元素换成方程组的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 所构成的行列式.

2. 推论

如果齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\\quad\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases}$$

的系数行列式 $D\neq0$,则方程组只有零解;若 $D=0$,则方程组有非零解.反之亦然.

习题全解

1.1 利用对角线法则计算下列三阶行列式.

(1) $\begin{vmatrix}2&0&1\\1&-4&1\\-1&8&3\end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix}a&b&c\\b&c&a\\c&a&b\end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$

$$=2\times(-4)\times3+0\times(-1)\times(-1)+1\times1\times8-$$
$$2\times(-1)\times8-0\times1\times3-1\times(-4)\times(-1)$$
$$=-4.$$

(2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

$$=acb+bac+cba-a^3-b^3-c^3=3abc-a^3-b^3-c^3.$$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

$$=bc^2+ca^2+ab^2-ba^2-cb^2-ac^2=(a-b)(b-c)(c-a).$$

(4) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$

$$=x(x+y)y+yx(x+y)+(x+y)yx-x^3-y^3-(x+y)^3$$
$$=-2(x^3+y^3).$$

1.2 按自然数从小到大为标准次序，求下列各排列的逆序数.

(1) 1　2　3　4;

(2) 4　1　3　2;

(3) 3　4　2　1;

(4) 2　4　3　1;

(5) 1　3　…　$(2n-1)$　2　4　…　$(2n)$;

(6) 1　3　…　$(2n-1)$　$2n$　$(2n-2)$　…　2.

解 (1) $t=0$.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

(2) $t=0+1+1+2=4$.

(3) $t=0+0+2+3=5$.

(4) $t=0+0+2+1=3$.

(5) $t=0+0+\cdots+(n-1)+(n-2)+\cdots+1+0=\dfrac{(n-1)n}{2}$.

(6) $t=0+0+\cdots+0+2+4+\cdots+2n-2=n(n-1)$.

1.3 写出四阶行列式中含有 $a_{11}a_{23}$的项.

解 因为 $D=\sum(-1)^t a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}a_{4i_4}$，其中 i_1,i_2,i_3,i_4 是 1,2,3,4 的某个排列，其中 $i_1=1,i_2=3$，所以排列 i_1,i_2,i_3,i_4 是 i_3,i_4 分别为 2,4 的某些排列，即 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$和 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$.

1.4 计算下列各行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$.

解 (1) $$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{c_4-c_2} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2-2c_1} \begin{vmatrix} 4 & -7 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & -15 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -7 & 2 & 3 \\ -15 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1-r_2} \begin{vmatrix} 8 & 0 & 8 \\ -15 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-2r_3} \begin{vmatrix} 8 & 0 & 8 \\ -17 & 0 & -17 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 8 & 8 \\ -17 & -17 \end{vmatrix}=0.$$

(2) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \\ -3 & 0 & -5 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)\begin{vmatrix} 5 & 6 & 2 \\ -3 & -5 & 0 \\ 5 & 6 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

(3) $$\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}=adf\begin{vmatrix} -b & c & e \\ b & -c & e \\ b & c & -e \end{vmatrix}$$

$$=abcdef\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3+r_1]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{3+2}2abcde\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=4abcdef.$$

(4) $$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$$

$$=a\begin{vmatrix} b & 1 & 0 \\ -1 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix}$$

$$=ab\begin{vmatrix} c & 1 \\ -1 & d \end{vmatrix}-a\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c & 1 \\ -1 & d \end{vmatrix}$$

$$=ab(cd+1)+(cd+1)+da$$

$$=abcd+ab+cd+da+1.$$

1.5 证明：

(1) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$;

(2) $\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$;

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$

$= (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$;

(5) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$.

证明

(1) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[c_2-c_3]{c_1-c_2} \begin{vmatrix} a^2-ab & ab-b^2 & b^2 \\ a-b & a-b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a(a-b) & b(a-b) \\ a-b & a-b \end{vmatrix} = (a-b)^2 \begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$.

(2) $\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = \cdots$(各列展开)$\cdots$

$$
=\begin{vmatrix} ax & ay & az \\ ay & az & ax \\ az & ax & ay \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} by & bz & bx \\ bz & bx & by \\ bx & by & bz \end{vmatrix}
$$

$$
=(a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}.
$$

(3) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$

$$
\overline{\overline{\substack{c_2-c_1\\c_3-c_1\\c_4-c_1}}}\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix}
$$

$$
\overline{\overline{\substack{c_3-2c_2\\c_4-3c_2}}}\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6 \end{vmatrix}=0.
$$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$

$$
\underline{\underline{r_4-a^2r_3}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ 0 & b^4-a^2b^2 & c^4-a^2c^2 & d^4-a^2d^2 \end{vmatrix}
$$

$$
\underline{\underline{r_3-ar_2}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ 0 & b^2-ab & c^2-ac & d^2-ad \\ 0 & b^4-a^2b^2 & c^4-a^2c^2 & d^2-a^2d^2 \end{vmatrix}
$$

$$\xlongequal{r_2-ar_1}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & b-a & c-a & d-a\\ 0 & b(b-a) & c(c-a) & d(d-a)\\ 0 & b^2(b^2-a^2) & c^2(c^2-a^2) & d^2(d^2-a^2)\end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)\cdot$$

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ b & c & d\\ b^2(b+a) & c^2(c+a) & d^2(d+a)\end{vmatrix}\xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ b & c-b & d-b\\ b^2(b+a) & c^2(c+a)-b^2(b+a) & d^2(d+a)-b^2(b+a)\end{vmatrix}\cdot$$

$$(b-a)(c-a)(d-a)$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\cdot$$

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\ c^2+cb+b^2+ac+ab & d^2+db+b^2+ad+ab\end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\cdot$$

$$[(d^2-c^2)+b(d-c)+a(d-c)]$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)$$

$$=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d).$$

(5) 设 $D=\begin{vmatrix}x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1\\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1\\ a_n & a_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1\end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x \end{vmatrix}$$

当 $x\neq 0$ 时，有

$$D \xlongequal{r_n-\frac{a_n}{x}r_1} \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ 0 & a_{n-1}+\dfrac{a_n}{x} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 \end{vmatrix} + x^n$$

$$\xlongequal{r_n-\frac{1}{x}\left(a_{n-1}+\frac{a_n}{x}\right)r_2} \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ 0 & 0 & a_{n-2}+\dfrac{a_n}{x^2}+\dfrac{a_{n-1}}{x} & & a_2 & a_1 \end{vmatrix} + x^n$$

$=\cdots$（再把第 n 行与第三行，…，第四行依此类推）…

$$= \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1+\dfrac{a_2}{x}+\cdots+\dfrac{a_n}{x^{n-1}} \end{vmatrix} + x^n$$

$=a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n+x^n$

$=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$

当 $x=0$ 时，有

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com