



劉徽研究

主 编 吳文俊
副主编 白尚恕 沈康身
李 迪

陕西人民教育出版社
九 章 出 版 社

刘徽研究

主 编 吴文俊
副主编 白尚恕 沈康身
李 迪

陕西人民教育出版社
九 章 出 版 社

(陝)新登字 004 號

劉徽研究

主編 吳文俊

陝西人民教育出版社 出版
九章出版社

(西安長安路南段 376 號)

各地新華書店經銷 陝西師大印刷廠印刷

850×1168 毫米 1/32 開本 16 印張 5 插頁 370 千字

1993 年 11 月第 1 版 1993 年 11 月第 1 次印刷

印數:1—1,000

ISBN 7-5419-3263-9/G·2830

定價:19.00 元

前 言

北京師範大學，內蒙古師範大學，杭州大學，西北大學的有關人員自 1977 年合作以來，迄今已有 15 年，先後出版有關《九章算術》及劉徽的學術專著計有：《〈九章算術〉與劉徽》（1982），《〈九章算術〉注釋》（1983），《〈九章算術〉及其劉徽注研究》（1990），《〈九章算術〉今譯》（1990），《〈九章算術〉導讀》（1992），並在國內外發表學術論文數十篇，上述有關人員在研究中，感覺到對《九章》及劉徽的研究很有必要再深入下去，於是，便動議集體攻關，於 1988 年在國家自然科學基金委員會的支持下，成立了“劉徽及其《九章算術注》研究”課題組，並確定出版一部學術論文集《劉徽研究》，還計劃召開一次“《九章算術》暨劉徽學術思想國際研討會”。

在研究過程中，經常與著名數學家兼數學史家吳文俊教授接觸，他也經常表示，《九章》與劉徽的研究，應該繼續深入下去。現今的研究祇不過剛剛開始，並於《〈九章算術〉與劉徽》的序言中說：“《九章算術》與劉徽《九章注》源遠流深，不僅對我國古代數學的發展有巨大影響，對整個世界數學的發展也有巨大影響……，要把《九章》在世界數學中的地位，與世界其它地域數學發展的關係及影響的來龍去脈弄清，還需做大量細緻的研究調查工作，本書所收集的一些論文，還祇能算是一個開端，真正的艱巨工作還在今後”。可見，對於《九章》及劉徽的研究是非常重要的，不但涉及到對中國古代傳統數學的發展研究，也涉及到對世界數學的發展研究。其重要意義是不言而喻的。

本課題組經過潛心研究，搜集了一些學術論文，又由“《九章算

術》暨劉徽學術思想國際研討會”收集了一些學術論文，共計三十篇論文，形成《劉徽研究》一書。在本書中，不但論述了《九章》及劉徽研究歷史，還深入探討了劉徽的各種學術思想及其源泉，也進一步論證了《九章》及劉徽的各種學術貢獻和各個專題研究，對於《九章》及劉徽的各種造術，尤其是劉徽的“重差術”造術作了各類較深入的探討，例如，《〈九章算術〉研究》及《〈九章算術〉研究史綱》分別論述了在歷史上對《九章》的研究概況和傳播情況，還總結了對《九章》研究的 50 個專題。另外，對劉徽的傳略，劉徽的思想，劉徽對後世的影響，劉徽與兩漢典籍的關係，對劉徽的一些研究等，都有專文論述。對於劉徽的各項專題也進行了研究，如“小數觀點”，“數學原理”，“弧田公式”，“幾何作圖”，“劉祖原理”，“陽馬注記”，“邏輯理論”，“消息意義”，“海島算法”，“重差算法”，“積矩算法”，“句股算法”，“齊同算法”等，都提出了一些新見。

研究中國數學史，尤其研究中國古代傳統數學史，必需實事求是，按照當時的社會背景，哲學思潮，學術水平，以及各種學術之間的關係進行分析，對於評價既不能以今人之見代替古人之說，也不能使古人之論屈就今人之說，對於古代語句的理解，既不當斷章取義，又不當屈解古意。對於校勘工作，應該慎重從事，既不可臆意校勘，又不可使校勘的文字屈從己意。對於注釋工作，應該在正確的理解基礎上進行解釋，既應該恰如其分地解釋，又應該切合原意地說明。可見，研究古代傳統數學，對評價，對理解，對校勘，對注釋都是艱苦的工作，切不可掉以輕心。

通過對《九章》及劉徽《九章注》的研究，不難發現，其內容異常豐富，特別是其機械化傾向，程序化算法的數學體系對中國數學的發展起到巨大作用，並與以歐幾里得《原本》為代表的公理化傾向，演繹算法的數學體系相輔相成的，對世界數學的發展起到推動作

用。《九章》及劉徽《九章注》的數學思想，可以指導對中國傳統數學的研究，也可以對現代數學的研究起到借鑒的作用。正如吳文俊教授在“《九章算術》暨劉徽學術思想國際研討會”開幕式上講話指出：“我們研究歷史，不能光是爲了研究歷史搞清楚各種事物的發展情況，而更重要的是古爲今用。就是說，通過這次會議以及通過數學史界許多同仁的科研工作，希望能促進數學界，把《九章算術》及劉徽所代表的中國古代學術思想貫徹到現在和未來的數學研究中去。”與會者大都認爲：對中國傳統數學的研究具有重大意義，應該把這種精神貫徹到工作中去。

本文集的編寫，雖然是在本課題組的努力下，以及諸同仁的努力下完成的，但是，我們的文章並不很成熟，有的是年輕人的習作，有的觀點需要進一步探討，而各篇文章之間也有些矛盾現象……。我們作爲課題組的研究工作，可以暫告結束；而作爲研究對象的劉徽還有研究的餘地。在本文集出版之際，謹向諸同仁及有關同志致以崇高的敬意。

“劉徽及其《九章算術注》研究”課題組

1992年2月，北京。

目 錄

前言	國家自然科學基金“劉徽及其 《九章算術注》研究”課題組(1)
《九章算術》研究	國家自然科學基金“劉徽及其 《九章算術注》研究”課題組(1)
《九章算術》研究史綱	李 迎(23)
劉徽傳瑣考	李 迎(43)
劉徽數學思想	白尚恕(63)
劉徽生平、數學思想淵源及其對後世的影響試析	沈康身(79)
在《九章算術》及其劉徽注所見秦漢社會	沈康身(87)
先秦兩漢典籍與《九章算術·劉徽注》	沈康身(104)
對《九章算術》的一些研究	莫紹揆(122)
《九章算術》原造術與劉徽注造術的幾點比較	勞漢生(139)
位置在《九章算術》及劉徽注中的意義	胡明燮(150)
劉徽的奇零小數觀	郭世榮(160)
劉徽割圓術的數學原理	曲安京(170)
對中算家弧田公式的研究	王榮彬(193)
劉徽的幾何作圖	李 迎(205)
關於劉、祖原理的對話	羅見今(219)
關於“陽馬術注”的注記	劉潔民(244)
劉徽的幾何成就與幾何邏輯系統	李 迎(253)

劉徽與歐幾里得的邏輯	郭樹理、倫華祥(269)
劉徽與歐幾里得對整句股數公式的證明	劉黎民(282)
劉徽消息衍義	沈康身、韓祥臨(296)
劉徽與《海島算經》	洪天賜(306)
劉徽重差術探源	馮立升(317)
《九章算術》的新研究	白尚恕(334)
劉徽齊同術難議	何文炯(351)
略論李淳風等對《九章》及其劉徽注的注	郭世榮(364)
劉徽《九章算術注》附圖的失傳問題	紀志剛(376)
《九章算術》及其劉徽注對運動學的深邃認識	沈康身(385)
《九章算術》與劉徽注中的度量衡及力學知識	徐義保(395)
《九章算術》及其劉徽注有關方程論述的世界意義	沈康身(402)
中國和希臘數學發展中的平行性	沈康身(414)
東西方積分概念的發展及其比較	沈康身(442)
關孝和求積術——《九章·劉注》對和算發展的 潛移默化一例	沈康身(460)
句股、重差和積矩法	程貞一(476)
編後記	《劉徽研究》編輯組(503)

《九章算術》研究*

自然科學基金“劉徽及其《九章算術注》研究”課題組

《九章算術》(簡稱《九章》)是中國現存一部較古老的數學經典專著。它採用問題集的形式,全書共收集二百四十六道與生產實踐有密切關係的應用問題,并按問題的性質及其解法分別隸屬於方田、粟米、衰分、少廣、商功、均輸、盈不足、方程、句股九章。在論述上,多處反映了秦、漢時代的一些制度及社會狀況;還總結了秦、漢時代的數學成就;并為中國傳統數學提供了開拓的因素,在世界數學發展中也起到不可忽視的作用。

《九章》的具體成書年代,因為史料匱乏,很難準確判斷。《後漢書·馬援列傳》稱:馬續“善《九章算術》”。《太平御覽》稱:“鄭玄……,兼通《九章算術》”。馬續、鄭玄都是東漢人,依此可證,《九章》形成定本當在東漢初期。

《九章》的編纂,可能經過多人之手,修改、充實、刪補、編輯逐漸形成的。如劉徽說:“往者暴秦焚書,經術散壞,自時厥後,漢北平侯張蒼,大司農中丞耿壽昌皆以善算命世。蒼等因舊文之遺殘,各稱刪補。故校其目則與古或異,而所論者多近語也。”

1983年在湖北出土一部西漢初期的《算數書》,全書約七千

* 本文曾於1991年在北京《九章算術》暨劉徽學術思想國際研討會上宣讀,在這裏發表時,略作修改。國家自然科學基金資助項目。

字，共有六十多個標題，如《增乘》、《分乘》、《合分》、《里田》、《稅田》、《程禾》、《錢息》、《少廣》等。在《少廣》下有一問爲：“廣一步，半步。以一爲二，半爲一，同之三，以爲法。即直二百卅步，亦以一爲二，除如法得從步。爲從百六十步”。而《九章》少廣第一問爲：“今有田廣一步半。求田一畝，問從幾何。答曰：一百六十步。術曰：下有半，是二分之一，以一爲二，半爲一，并之得三，爲法。置田二百四十步，亦以一爲二乘之，爲實。實如法得從步。”又如《算數書·錢息》下一問爲：“貸錢百，月息三。今貸六十錢，月末盈，十六日歸，請息幾何。得曰：二十五分錢二十四。術曰：計百錢一月，積錢數爲法。直貸錢以一月百錢息乘之，有（又）以日乘之爲實。如法得一錢”。而《九章·衰分》第 20 問爲：“今有貸人千錢，月息三十。今有貸人七百五十錢，九日歸之，問息幾何。答曰：六錢四分錢之三。術曰：以月三十日乘千錢爲法。以息三十乘今所貸錢數，又以九日乘之，爲實。實如法得一錢”。

由上述兩對問題中，既可看出《九章》是在《算數書》的基礎上修改而成的，又可看出《算數書》對《九章》的成書有所影響。可以說，《算數書》可能是《九章》的母本之一。

《前漢書》稱：“《許商算術》二十六卷”。又稱：“《杜忠算術》一十六卷”。《廣韻》稱：“九章術，漢、許商、杜忠、吳、陳熾、王粲并善之”。西漢數學家許商、杜忠的數學著作早經散失，而《九章》必然參考過他們的數學著作，雖不便認爲“許商、杜忠《算術》即是《九章》”。但是，以爲《九章》是由《算數書》、《許商算術》、《杜忠算術》演變而成的。并非毫無依據。

《九章》的內容非常豐富，與秦、漢時期的社會制度有着密切的聯繫，而且反映出當時的政治、經濟、軍事的一些情況。顯示出中國傳統數學的理論聯繫實際的特色，從而形成中國傳統數學的理論

體系。

一、早期的注釋與研究

《九章》成書後，引起社會上的普遍關注，對《九章》學習、探討、注疏、研究者日漸增多。《玉海》稱：“劉洪好學，以天文數術，探賾鉤深，遂專心銳思”。曾研究《九章》，并撰有《乾象歷》。《後漢書·馬援列傳》稱：馬續“七歲通《論語》，十三明《尚書》，十六治《詩》，博觀群籍，善《九章算術》”。《高士傳》稱：“鄭玄字康成，北海高密人也。學《孝經》、《論語》，兼通京氏《易》、《公羊》、《春秋》、《三正曆》、《九章算術》、《周官禮記》、《左氏春秋》”。此外，東漢徐岳、三國闕澤、北周甄鸞等人對《九章》都作過研討、注解工作，他們的著作早已亡佚。流傳至今的《九章》，祇有劉徽、李淳風的注解文字。

《隋書·律曆志》稱：“魏陳留王景元四年（263年）劉徽注《九章》”。不拘是開始注《九章》，或是注畢《九章》，兩年後咸熙二年魏亡，司馬炎建立西晉，劉徽或不致去世。又由《九章》劉注“晉武庫中有漢時王莽所作銅斛，……，後有贊文，與今《律曆志》同。亦魏、晉所常用”。可以斷定，劉徽是魏、晉間人，劉徽在魏注《九章》，入晉以後，仍在注《九章》。

劉徽在精心研究《九章》的基礎上，潛心為《九章》撰寫注解文字。如他說：“幼習《九章》，長再詳覽。觀陰陽之割裂，總算術之根源，探賾之暇，遂悟其意。是以敢竭頑魯，采其所見，為之作注”。劉徽採用高理論，精計算進行注解，正如他說：“析理以辭，解體用圖。庶亦約而能周，通而不黷，覽之者思過半矣”。在理論上，他創造許多數學原理，嚴加證明，應用於各種算法中，從而形成中國傳統數學的理論體系。在計算上，他創造十進分數，小單位數，依據數學原

理，精心計算各種有關數據，從而得到精密而正確的結果。在態度上，他以嚴肅、認真而客觀的精神，判別粗糙、錯誤的論述，創造精細、正確的觀點，以理服人，從而為後人樹立良好的榜樣與學風。在例證上，他另闢蹊徑，用模型、圖形、例題以論證或推廣有關算法，加強說服力，從而形成中國傳統數學的特色。在言辭上，他引經據典，深入淺出，既論及治學之道，也談及學習途徑，其錚錚之詞鏗鏘有聲，從而成為古代數學的典範著作。

劉宋數學家祖冲之曾注《九章》，并撰《綴術》一書。可惜的是，祖冲之《九章注》未見流傳，其《綴術》也早已散失。《隋書·律曆志》稱：“宋末南徐州從事史祖冲之……，所著之書，名為《綴術》，學官莫能究其深奧，是故廢而不理”。流傳下來的祇有他所求得的圓周率：

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927.$$

$$\pi = \frac{22}{7}, \quad \pi = \frac{355}{113}.$$

祖冲之之子祖暅，也是著名數學家，曾研究《九章》，繼劉徽之後，巧妙地求得球積的正確計算公式為：

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

唐代初期，天算家王孝通撰《緝古算經》一書，其《上緝古算術表》稱：“昔周公制禮，有九數之名。竊尋九數即《九章》是也。……，魏朝劉徽篤好斯言，博綜纖隱，更為之注。徽思極毫芒，觸類增長，乃造重差之法，列於終篇。雖即未為司南，然亦一時獨步”。可見王孝通對《九章》及劉徽注文作了精心的研究，高度的評價。雖未對劉徽的學說作深入探討，但他卻補充了《九章》的不足。

唐代，天算學家李淳風為當時國子監明算科的需要，奉敕選

定十部算經作為教科書，並為之注解。《九章》即是被選定的教科書之一。在《九章·少廣》注文中，李淳風引述了祖沖之父子推證球積算法及“劉、祖原理”，才能使得這項著名於世的精巧算法傳之後世。

現傳本《九章》，除經文外，具有劉徽、李淳風的注解文字，是一部舉世聞名的中國古代數學經典著作。

二、宋、元、明、清對《九章》的研究

《宋史》稱：“李籍《九章算術音義》一卷”。宋人李籍，其傳略不詳，他對《九章》重要詞、字的讀音、意義都作了確切的解釋，共寫出193條文字。其《音義》流傳至今，成為重要參考文獻之一。

北宋天算家楚衍，通《曆法》，善《九章》，其著名弟子有賈憲、朱吉二人。賈憲著有《算法數古集》二卷，《黃帝九章算法細草》九卷。此二書早已失傳。

南宋末年，數學家楊輝在鑽研《九章》的基礎上，編寫了《詳解九章算法》，並附有《詳解九章算法纂類》。他精選了《九章》80題作為典範，還附加一些相同解法類比的題。給出各題具體而詳細的算法，有的題則配以“題意圖”或“算法圖”，按問題的繁簡、難易編排了次序。如他說：“靖康以來，古本浸失，後人補續不得其真，致有題重法闕，使學者難入其門，好者，不得其旨。輝雖慕此書，未能貫理，妄以淺也，聊為編述。擇八十題以為矜式，自余一百六十六問，無出前意。……，凡題法解白不明者，別圖而驗之。編乘除諸術，以便入門”。尤其在商功術各問之後所編的“比類”題，是依據沈括隙積術所提出的高階等差級數求和問題，從而彌補了《九章》的不足。在“纂類”中，是以算法為綱，每種算法之下，列舉了《九章》的一些問

題作為例證。在開方術下，引述了賈憲的立成釋鎖平方法、立方法、增乘開平方法、立方法以及開方作法本源。使得瀕於失傳的寶貴文化遺產傳於後世。

明代，《九章》一類的古籍，幾乎失傳。雖然《永樂大典》內載有《九章》，但一般學人很難參閱。如吳敬《九章算法比類大全》，程大位《直指算法統宗》等書，都是以《九章》的名目分類的。這些書既間接參考了《九章》，又為《九章》的傳播起到媒體作用。

清代中期，戴震任四庫館纂修官，他從《永樂大典》中輯錄出《九章》，并作了一番校勘工作，他的校訂，確有許多精妙之處，但也有一些誤校處。

此外，孔繼涵、焦循、李銳、汪萊、顧觀光等人，對《九章》也進行了研究。

嘉慶年間，李潢著有《九章算術細草圖說》一書。李潢對《九章》也作了校勘工作，通過他的校勘，一般文從字順，便於閱讀，但也有些漏校、誤校和避而不校之處。李潢對《九章》各問都作了具體計算和詳細演草。他對《九章》以及劉、李注文一般都給予解說，使人一目瞭然，但是對於一些疑難之處，卻未能徹底予以解說，也有一些誤釋之處。即使如此，對於學習、研究《九章》者來說，仍不失為一部導讀之作。

《九章》自成書迄今，前後經歷了約兩千年。這期間，學習、研究《九章》者頗不乏人，然而系統、全面、深入地研究並有著述問世者，似不多見。近幾十年來，科學史成為一門新興的學科，在國際學術界普遍受到關注，尤其中國數學史更是受到重視。例如美國數學史家史密斯、卡約黎、日本三上義夫、薮內清、英國李約瑟、德國福格爾、蘇聯尤什凱維奇、中國李儼、錢寶琮等人的有關論著發表以來，使得中國數學史的研究、中國經典數學著作研究、《九章》研究逐漸

走向高潮。研究的隊伍日趨壯大，研究的問題也日益深化，研究的範圍日臻完備，研究的成果日漸豐碩。在國際間逐漸形成了欣欣向榮的局面。

三、近期對《九章》的探討

李儼用畢生的精力為中國數學史打下了堅實的基礎，他雖然沒有一部關於《九章》研究的專門著作，但在他數百萬字的著作中，有數十萬字對《九章》及劉、李注文進行考證、補佚、校注與研討。對後世學者啓迪了研討的思維，开辟了研討的道路。從而使中國數學史的研究逐步發展起來。

錢寶琮早年即發表過多篇關於《九章》的考證、研究文章，對於研討《九章》都起到指導性的作用。尤其在他晚年所出版的《算經十書》校點本，對於研讀中國古算書具有不可磨滅的功績。其中所校點的《九章》，更具特色。幾百年來，錢校本當是最佳校點本，也是後世研討《九章》所依據的藍本。

最近，據不完全統計，在國內、外先後發表了有關《九章》及劉、李注文的學術論文四百余篇；出版有關《九章》及劉、李注文學術專著計有：吳文俊主編《中國數學史研究叢書之一·〈九章算術〉與劉徽》，川原秀城《劉徽注〈九章算術〉》，白尚恕《〈九章算術〉注釋》，李繼閔《〈九章算術〉及其劉徽注研究》，白尚恕《〈九章算術〉今譯》等。在這些論著中，探討了不少問題，計有：

1. 《九章》的成書年代

根據考證，大多數學者都認為《九章》是經過多人之手，進行刪補、修改，逐漸形成了定本。至於《九章》的成書年代，眾說紛紜，莫衷一是。有人以為成書於西漢中期，有人以為成書於西漢宣帝時

代，有人以為成書於西漢末年，也有人以為成書於東漢初期等等。即使本課題組成員對《九章》成書年代的看法也不一致，現今為了求大同、存小異，不拘對“成書”的概念如何理解，顧及大多數學者的意見，可以說《九章算術》成書於公元前1世紀至公元後1世紀。

2. 劉徽的籍貫

劉徽的籍貫身世、生平事迹，不見諸史籍。現今祇能根據一些不多的史料，探測劉徽的一些情況。宋徽宗為了提倡天算教育，於大觀三年(1109)追封歷代畸人，根據《宋史》的記載，追封劉徽為“魏劉徽淄鄉男”。宋徽宗所追封的六、七十名畸人中，其追封的詞句，多符合其籍貫或活動的地區，因此，可以認為劉徽是現今山東淄川或臨淄一帶人。而劉徽在《海島算經》中所撰測望海島一問，可以作為劉徽是山東人的旁證。因為淄川或臨淄臨近渤海，故有測望海島之設。雖然有人認為證據似嫌不足，但是未嘗不可以在新的、確鑿的證據發現之前，無妨先承認其為山東淄川或臨淄一帶人。

3. 劉徽的齊、同、通思想

劉徽在前人的基礎上，於通分運算中，對“齊”、“同”給予明確的定義，然後，由兩個分數的通分運算，推廣到若干個分數的通分運算。並拓廣了“齊”、“同”的定義，使之適用於整數乘法運算，成為整數乘法運算中的一條特性。還把這一特性應用於合分術、減分術、課分術、平分術、環田術、少廣術、盈不足術、方程術、方程新術、其一術等。劉徽把齊、同、通思想幾乎應用於《九章》全書中，成為《九章》基本算法之一。劉徽還用“齊”、“同”、“通”的概念，提出“不失本數”的性質，並推廣為“不失本率”原理。

4. 互乘與維乘

《九章》中，雖然劉徽對於一些名詞、術語給出了定義，但大部份名詞、術語多不揭示其概念。研讀《九章》時，必須仔細推敲、深刻

體會其含義，否則便無法進行鑽研。如“乘”、“相乘”、“相命”、“互相乘”、“互乘”、“維乘”、“交互相生”都是《九章》的術語。“乘”、“相乘”、“相命”是指兩數相乘或多數連乘；“互相乘”、“互乘”是指四、六、八、十等多數交叉相乘，而“交互相生”是“互乘”的另一提法；“維乘”是指四數交叉相乘。可見，“相乘”、“互乘”、“維乘”是三個不同的概念，對這三個不同概念必須嚴格區分，切不可混為一談。

5. 率以及相與率

劉徽在經分術下注稱：“凡數相與者謂之率”；又稱“等除法實，相與率也”。這就是他給“率”、“相與率”下的確切定義。此外，還明確了“率”的性質。劉徽以“率”的概念及其性質應用於注文中，使之成為《九章》各種算法的主綫，他不但把各種算法在理論上歸結為“率”的學說，而且在運算技巧上，也結合着率的性質，使得“率”成為劉徽《九章注》的核心思想之一。

6. 出入相補

劉徽為了論證直綫型平面圖形的面積及某些直綫型立體圖形的體積，在前人的基礎上，總結、提煉、使之理論化，並應用於各種有關問題中，形成了所謂“出入相補原理”，成為中國古代幾何學的基礎理論之一。也是中國古代幾何學所具有的特色之一。在《九章》中，雖沒有明確記載有“出入相補原理”的文字，但是，由圭田術、邪田術、箕田術、圓田術、環田術、開方術、城垣術、勾股術等劉徽注文中可以看出，劉徽不但具有高度的概括能力，而且善於由實際問題提高到理論上來，使之成為中國古代數學的特色。

7. 劉徽的割圓術

為了推證圓面積的計算公式及圓周率的確值，劉徽創造了割圓術。割圓術就是由圓內接正 6 邊形起算，使邊數倍增，不是用三角形而是用箏形面積算法，逐次求得正 12、24、48、96、192、……邊