高中数学

题源

TIYUAN

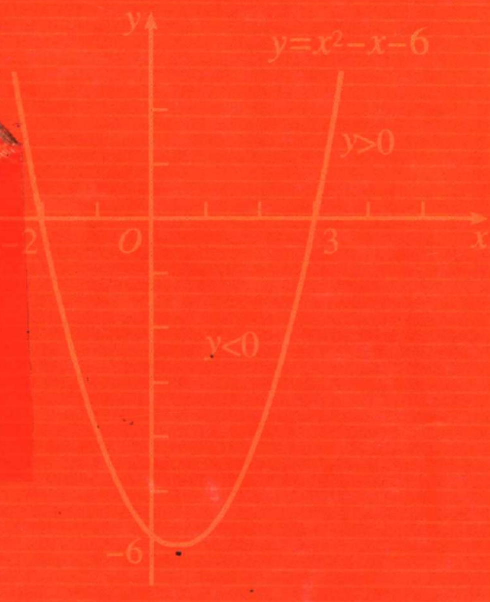
与各种版本的高中课程教材配套使用

数列

GAOZHONGSHUXUE

丛书主编：傅荣强
本册主编：常　青

按专题分册
按知识划块
按题型归类
按方法总结
按梯度训练



河北教育出版社

数列题源

高中数学

丛书主编：傅荣强　本册主编：常　青

河北教育出版社

丛书编写委员会

主编：傅荣强

编委：王鸿雁　王家志　于长军　傅荣福　朱　岩
常　青　金　秋　付明忠　苏金生　牛鑫哲
宋冰倩　韩丽云　马金凤

本书作者

主编：常　青

编者：韩丽云　翟凤霞

责任编辑：赵毅蔚

装帧设计：比目鱼工作室

题源 高中数学 数 列

出版发行	河北教育出版社 （石家庄市友谊北大街 330 号　http://www.hbep.com）
印　刷	保定市印刷厂
开　本	880 × 1230　1/32
印　张	7.25
字　数	208 千字
版　次	2003 年 12 月第 1 版
印　次	2003 年 12 月第 1 次印刷
书　号	ISBN 7－5434－2445－2/G・1998
定　价	8.50 元

前　言

本书名曰“题源”，有两层含义：一是“题”；二是“源”。这里的“题”是指精选的例题、习题，题目讲解的角度新颖独特，避免题海战术；“源“是指出处、源头，即题目的来龙去脉。“题源”即通过追溯源头来了解数以万计的“题”为何抽象成了有限的“题型”，各种“题型”如何提炼出具体的解决“方法”，各种“方法”又如何再落实到具体应用。

目前的教材改革提倡由具体到抽象、由特殊到一般的教育理念，由具体入手，通过具体操作，体会方法延伸，以提高其实用价值。

本套书从实战操作入手，从“题”的角度切入，每本书224页的内容，足以让你领略“题”的意境；从“源”的角度着重，讲求“题型”、“方法”归纳的简练，提纲挈领，充分让你体会“源”的韵味。

本套书的设计思路：

1. 按专题分册　本套书以现有的各种版本教材为基础，取材于各种教材的交汇处，按专题分册编写，可与各种版本的教科书配套使用。全套书共计52册，包含初、高中的数学、物理、化学、三个学科的40个专题，计40册；另有按册编写的初、高中语文各6册。

2. 按知识划块　每册书的内容即一个专题内容，全书按知识点分成若干讲，使你对本部分知识的脉络框架一目了然。

3. 按题型归类　每一讲按具体内容分成若干题型，使你对本部分知识都包含哪些题型心中有数，避免因不清楚自己对本部分知识掌握的深浅程度而浪费精力。

4. 按方法总结　每个题型都有相应总结出的方法作为解题指导，使你能知其然，还能知其所以然。

5. 按梯度训练　每一讲的例题及习题都是精选的与题型相关的经典题、创新题，其中创新题篇幅约占30%，大多从具体问题入手，以

探究问题的发展趋势为主，由易到难，循序渐进。

全书栏目设计简单、清晰，具体包括：

1. **题型归纳** 每一讲内容按知识点分布结构归纳成若干题型；

2. **方法概述** 每一个题型后紧随针对此题型的具体解题方法；

3. **例题设计** 每一个方法后是阐述此方法应用的经典例题；

4. **解法点评** 每组例题后相应都有关于此方法适用程度的点评；

5. **要点提示** 解题过程中间或有插入提示指点迷津；

6. **习题配备** 每讲后都配有为巩固本讲知识内容而设置的习题，后附答案与提示。

书由“越学越厚”到“越学越薄”，表明接受知识由难到易的进程，本书教你“越学越薄”的办法。俗语说“万变不离其宗”，宗在哪儿？本书旨在告诉大家如何从源头找到解决各种复杂问题的思路，体味什么是真正的“举一反三”。

“问渠哪得清如许，为有源头活水来”。最近几年的中、高考命题，向综合性、多元化、实用性方向发展，如何把握命题方向，从最简单的角度切入复杂问题当中，从而把复杂问题分解、简化，逐一解决，这是本书要着意顾及的。愿本套书的编写模式，能使你不再不知道学得是否到位，不再对新题型懵懵懂懂，不再对难题发怵。

本套书经过近百位一线教师近一年的努力，终于功成。使我们感到欣慰的是本书从整体框架设计、题型结构设计，到例题、习题选取、讲解梯度，都达到了我们设想的最佳水准。当然，因为种种原因，书中还有一些不尽如人意之处，欢迎广大读者提出宝贵意见。

2004年元月

目 录

第一讲　数　　列

本讲题型

序　号	题　　型
1	数列的定义
2	数列的通项公式
3	数列的前 n 项的和 S_n
4	递推公式
5	单调数列

题型 1　数列的定义

(1)通过数列的定义掌握数列的有关概念

方法　按照一定的次序排列的一列数

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$$

叫做数列,简记为$\{a_n\}$.

其中,$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$依次叫做数列的第 1 项,第 2 项,…,第 n 项,….特别地,a_1 还叫做首项,a_n 还叫做通项.

当数列由有限个数

$$a_1,a_2,\cdots,a_n$$

构成时,a_n 又叫末项,n 称为数列的项数.

【例 1】　指出下列数列的第 1 项,第 n 项:

(1)$1,2,\cdots,n,\cdots$;

(2)$2,4,6,8,\cdots$.

解　(1)数列的第 1 项是 1,第 n 项是 n;

(2)数列由正偶数构成,第 1 项是 2,第 n 项是 $2n$.

【例 2】　指出下列数列的首项、通项、末项、项数:

(1)$1,3,5,\cdots,2n-1,\cdots,21$;

(2)2004.

数列共有多少项

解　(1)数列的首项是 $a_1=1$,通项是 $a_n=2n-1$,末项是 21.

在 $a_n=2n-1$ 中,$n=11$ 时,$a_n=a_{11}=2\times11-1=21$,

所以,数列的项数是 11;　数列共有 11 项

(2)数列的首项、通项、末项都是 2004,项数是 1.

(2)通过函数认识数列形成的过程

方法　如果函数 $f(x)$ 的定义域里面含有 $1,2,\cdots,n,\cdots$ 这些正整数,那么

$$f(1),f(2),\cdots,f(n),\cdots$$

就是一个数列.

【例 3】　在函数 $f(x)=2x+1$ 中,令 $x=1,2,\cdots,n,\cdots$,写出数列 $f(1),f(2),\cdots,f(n),\cdots$.

解　在函数 $f(x)=2x+1$ 中,当 $x=1,2,\cdots,n,\cdots$时,有

$$f(1)=2\times1+1=3,$$

$$f(2)=2\times2+1=5,$$

$$\cdots\cdots$$

$$f(n)=2n+1,$$

$$\cdots\cdots$$

具体地写出这个数列就是

$$3,5,\cdots,2n+1,\cdots.$$

点评

把本例的结果 $3,5,\cdots,2n+1,\cdots$记作

$$a_1=3,a_2=5,\cdots,a_n=2n+1,\cdots.$$

由本例的解答过程我们不难看出,数列

$$a_1=3,a_2=5,\cdots,a_n=2n+1,\cdots$$

就是函数 $f(x)=2x+1$ 当自变量 x 依次取正整数 $1,2,\cdots,n,\cdots$ 时所对应的一列函数值.

【例 4】 在函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 中,给 x 赋值 1,2,3,4,5,写出数列 $f(1)$,$f(2)$,$f(3)$,$f(4)$,$f(5)$.

解 在函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 中,当 $x=1,2,3,4,5$ 时,有

$$\left.\begin{aligned}&f(1)=1,\\&f(2)=\frac{1}{2},\\&f(3)=\frac{1}{3},\\&f(4)=\frac{1}{4},\\&f(5)=\frac{1}{5}.\end{aligned}\right\}$$

这是在研究函数与数列的联系,x 由取非零实数向取正整数转化

具体地写出这个数列就是

$$a_1=1,a_2=\frac{1}{2},a_3=\frac{1}{3},a_4=\frac{1}{4},a_5=\frac{1}{5}.$$

点评

由本例可知,数列就是某一个函数的一列函数值,这些函数值对应的自变量都是正整数,并且函数值是按自变量由小到大的顺序进行排列的.

【例 5】 在函数 $f(x)=x^2+1$ 中,令 $x=\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$ 可得到三个函数值,问 $f\left(\frac{1}{2}\right),f\left(\frac{1}{3}\right),f\left(\frac{1}{4}\right)$ 是不是数列?

解 在函数 $f(x)=x^2+1$ 中,当 $x=\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$ 时,有

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+1=\frac{5}{4},$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^2+1=\frac{10}{9},$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^2+1=\frac{17}{16}.$$

令 $a_1=f\left(\frac{1}{2}\right),a_2=f\left(\frac{1}{3}\right),a_3=f\left(\frac{1}{4}\right)$,得

$$a_1=\frac{5}{4},a_2=\frac{10}{9},a_3=\frac{17}{16}.$$

显然，a_1,a_2,a_3 是数列，即 $f\left(\frac{1}{2}\right),f\left(\frac{1}{3}\right),f\left(\frac{1}{4}\right)$是数列.

点评

本例中的数列 a_1,a_2,a_3 是经过两次对应得到的，用“$\longleftrightarrow$”表示对应，这样的对应可以表示为

$$\begin{array}{ll} x\longleftrightarrow n, & f(x)\longleftrightarrow a_n, \\ \frac{1}{2}\longleftrightarrow 1, & f\left(\frac{1}{2}\right)\longleftrightarrow\frac{5}{4}, \\ \frac{1}{3}\longleftrightarrow 2, & f\left(\frac{1}{3}\right)\longleftrightarrow\frac{10}{9}, \\ \frac{1}{4}\longleftrightarrow 3; & f\left(\frac{1}{4}\right)\longleftrightarrow\frac{17}{16}. \end{array}$$

由此可知，只要某个函数 $f(x)$在离散点 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$的函数值是存在的，无论 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$是否是正整数，函数值列

$$f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n),\cdots$$

就是数列.

【例 6】 在函数 $f(x)=\log_5(9-x)$中，令 $x=-4,-1,2,4$ 可得到四个函数值，写出数列 $f(-4),f(-1),f(2),f(4)$.

解 在函数 $y=\log_5(9-x)$中，x 满足 $9-x>0,x<9$.

当 $x=-4,-1,2,4$ 时，有

$$f(-4)=\log_5[9-(-4)]=\log_5 13,$$

$$f(-1)=\log_5[9-(-1)]=\log_5 10,$$

$$f(2)=\log_5(9-2)=\log_5 7,$$

$$f(4)=\log_5(9-4)=\log_5 5=1.$$

令 $a_1=f(-4),a_2=f(-1),a_3=f(2),a_4=f(4)$，得

$$a_1=\log_5 13,a_2=\log_5 10,a_3=\log_5 7,a_4=1.$$

具体地写出这个数列就是

$$\log_5 13,\log_5 10,\log_5 7,1.$$

题型 2 数列的通项公式

(1)已知数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=f(n)$,求数列的第k项a_k或某些项

方法 在通项公式$a_n=f(n)$中,令$n=k$,得$a_k=f(k)$.依此规律可求出数列$\{a_n\}$的某些项.

【例7】 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\begin{cases} n & (n=2k-1,k\in\mathbf{N}^*), \\ n+1 & (n=2k,k\in\mathbf{N}^*). \end{cases}$

(1)写出这个数列的奇数项的前3项;(2)写出这个数列的前3项.

分析 可以直接按项数的奇偶性求所求的项,另一种方法是将通项公式整理成$a_n=n+\dfrac{1+(-1)^n}{2}$后再求指定的项.

解 (1)$a_1=1,a_3=3,a_5=5$;(2)$a_1=1,a_2=3,a_3=3$.

【例8】 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\begin{cases} \dfrac{1}{n} & (n\text{ 为奇数}), \\ (n-2)^{n-1} & (n\text{ 为偶数}), \end{cases}$求$\{a_n\}$的前5项.

解 将$n=1,3,5$代入$a_n=\dfrac{1}{n}$,得

$$a_1=1,a_3=\frac{1}{3},a_5=\frac{1}{5}.$$

将$n=2,4$代入$a_n=(n-2)^{n-1}$,得

$$a_2=0,a_4=8.$$

所以,数列的前5项为$1,0,\dfrac{1}{3},8,\dfrac{1}{5}$.

(2)已知数列的前几项,求数列的通项公式$a_n=f(n)$

方法 解决此类问题,原则上就是观察.必须掌握下列四个方面的问题:

(1)由$(-1)^n$产生的符号规律是

$$-,+,-,+,\cdots,$$

由$(-1)^{n+1}$产生的符号规律是

$$+,-,+,-,\cdots;$$

(2)归纳$|a_n|$的规律；

(3)求形如$\{a_nb_n\}$与$\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$形式的数列的通项公式，先分解后组合；

(4)常见的结果：

简单数列	通项公式
$1,1,1,1,\cdots$	$a_n=1$
$1,2,3,4,\cdots$	$a_n=n$
$2,4,6,8,\cdots$	$a_n=2n$
$1,3,5,7,\cdots$	$a_n=2n-1$
$1,2,4,8,\cdots$	$a_n=2^{n-1}$
$2,6,12,20,\cdots$	$a_n=n(n+1)$
$1,4,9,16,\cdots$	$a_n=n^2$
$1,8,27,64,\cdots$	$a_n=n^3$
$1,-1,1,-1,\cdots$	$a_n=(-1)^{n-1}=\cos(n-1)\pi$
$-1,1,-1,1,\cdots$	$a_n=(-1)^n=\cos n\pi$
$1,-2,3,-4,\cdots$	$a_n=(-1)^{n+1}n$
$0,1,0,1,\cdots$	$a_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2}=\left\lvert\sin\dfrac{(n-1)\pi}{2}\right\rvert$
$1,0,1,0,\cdots$	$a_n=\dfrac{1+(-1)^{n+1}}{2}=\left\lvert\sin\dfrac{n\pi}{2}\right\rvert$
$1,11,111,1111,\cdots$	$a_n=\dfrac{10^n-1}{9}$

其中$\cos n\pi=\begin{cases}1 & (n\text{ 是偶数}),\\ -1 & (n\text{ 是奇数});\end{cases}$ $\sin\dfrac{n\pi}{2}=\begin{cases}0 & (n\text{ 是偶数}),\\ \pm1 & (n\text{ 是奇数}).\end{cases}$

【例 9】 写出下列数列的一个通项公式.

(1)$1,2,3,4,\cdots$；

(2)$2,4,6,8,\cdots$；

(3)$3,5,7,9,\cdots$；

(4)$5,15,25,35,\cdots$；

(5)$-1,1,-1,1,\cdots$；

(6)$1,-1,1,-1,\cdots$；

调号数列

(7)$-6,7,-8,9,\cdots$；

(8) $\frac{4}{7},-\frac{5}{8},\frac{6}{9},-\frac{7}{10},\cdots$;

(9) $10,100,1000,\cdots$;

(10) $9,99,999,9999,\cdots$;

(11) $1,11,111,1111,\cdots$;

(12) $7,77,777,7777,\cdots$;

(13) $0.7,0.77,0.777,0.7777,\cdots$;

(14) $2,11,101,1001,\cdots$;

与10^n相关的数列

(15) $0,1,0,1,\cdots$;

(16) $3,5,3,5,\cdots$;

(17) $a,b,a,b,\cdots$;

摆动数列

(18) $1\times2,2\times3,3\times4,\cdots$;

(19) $\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{12},\cdots$;

(20) $\frac{2}{1},\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{3}{4},\cdots$.

分析 (1)小题是正整数数列,通项公式为 $a_n=n$;

(2)中数列的各项由(1)中的各项乘 2 得到,即 $a_n=2n$.事实上,它是正偶数数列;

(3)是正奇数数列,且首项为 3,所以 $a_n=2n+1$;

(4)中,数列可分解为 $1\times5,3\times5,5\times5,7\times5,\cdots$;

(5)、(6)是“调号摆动数列”.

其中(5)的通项公式可写成分段函数,$a_n=\begin{cases}-1\ (n\text{ 为偶数}),\\ 1\ (n\text{ 为奇数})\end{cases}$的形式,但注意到$(-1)$的整数次幂的值是 1 和 -1 相间排列的.因此(5)、(6)小题中通项公式分别为 $a_n=(-1)^n$,$a_n=(-1)^{n+1}$;(7)、(8)小题应重点考虑符号的调节;

(9)~(14)小题可归结为与 $10^n(n\in\mathbf{N}^*)$相关的数列;

(15)~(17)为摆动数列问题;

(18)、(19)小题为先讨论数的分解后归纳规律的数列;

(20)为调号数列与数的分解的综合数列,有一定深度和难度.

解 (1) $a_n=n\ (n\in\mathbf{N}^*)$;

(2) $a_n=2n\ (n\in\mathbf{N}^*)$;

(3) $a_n=2n+1\ (n\in\mathbf{N}^*)$;

(4) $a_n=5(2n-1)=10n-5\ (n\in\mathbf{N}^*)$;

(5) $a_n=(-1)^n(n\in\mathbf{N}^*)$;

(6) $a_n=(-1)^{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$;

(7) $a_n=(-1)^n(n+5)\ (n\in\mathbf{N}^*)$;

(8) $a_n=(-1)^{n+1}\dfrac{n+3}{n+6}\ (n\in\mathbf{N}^*)$;

(9) $a_n=10^n(n\in\mathbf{N}^*)$;

(10) $a_n=10^n-1\ (n\in\mathbf{N}^*)$;

(11) $a_n=\dfrac{1}{9}(10^n-1)\ (n\in\mathbf{N}^*)$;

(12) $a_n=\dfrac{7}{9}(10^n-1)\ (n\in\mathbf{N}^*)$;

(13) $a_n=\dfrac{7}{9}(10^n-1)\times\dfrac{1}{10^n}=\dfrac{7}{9}(1-10^{-n})\ (n\in\mathbf{N}^*)$;

(14) $a_n=1+10^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$;

(15) $a_n=\dfrac{1}{2}+(-1)^n\cdot\dfrac{1}{2}\ (n\in\mathbf{N}^*)$;

(16) $a_n=4+(-1)^n(n\in\mathbf{N}^*)$;

(17) $a_n=\dfrac{a+b}{2}+(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{a-b}{2}\ (n\in\mathbf{N}^*)$;

(18) $a_n=n(n+1)\ (n\in\mathbf{N}^*)$;

(19) $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}\ (n\in\mathbf{N}^*)$;

(20) $a_n=1+(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}\ (n\in\mathbf{N}^*)$.

点评

(1)数列的通项公式可能不唯一.如,(5)小题还可为

$$a_n=\begin{cases}-1 & (n\text{ 是奇数}),\\ 1 & (n\text{ 是偶数}).\end{cases}$$

(2)数列是一种特殊的函数.函数可以没有解析式,因此,数列可以没有通项公式.

【例 10】 写出下列数列的一个通项公式.

(1)$3,5,9,17,\cdots$;　　(2)$\frac{1}{2},2,\frac{9}{2},8,\frac{25}{2},\cdots$;

(3)$1,0,-1,0,1,0,\cdots$;　　(4)$1,0,-\frac{1}{3},0,\frac{1}{5},0,-\frac{1}{7},0,\cdots$;

(5)$\frac{5}{4},\frac{29}{9},\frac{83}{16},\frac{179}{25},\cdots$;　　(6)$\frac{\sqrt{5}}{3},-\frac{\sqrt{10}}{8},\frac{\sqrt{17}}{15},-\frac{\sqrt{26}}{24},\cdots$.

$$\left(\text{其中}\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0 & (n=4k),\\ 1 & (n=4k+1),\\ 0 & (n=4k+2),\\ -1 & (n=4k+3).\end{cases}\quad k\in\mathbf{N}\right)$$

解　(1)$a_n=1+2^n$;

(2)数列的项,有的是分数,有的是整数,可将数列的各项都统一成分数再观察.在数列$\frac{1}{2},\frac{4}{2},\frac{9}{2},\frac{16}{2},\frac{25}{2},\cdots$中,分母为2,分子为$n^2$,所以,数列的通项公式为

$$a_n=\frac{n^2}{2};$$

(3)根据三角函数值的特点可知,$a_n=\sin\frac{n\pi}{2}$;

(4)把数列改写成$\frac{1}{1},\frac{0}{2},\frac{-1}{3},\frac{0}{4},\frac{1}{5},\frac{0}{6},\frac{-1}{7},\frac{0}{8},\cdots$.分母依次为1,2,…,而分子$1,0,-1,0,\cdots$周期性出现,因此,我们可以用$\sin\frac{n\pi}{2}$表示,

所以$a_n=\dfrac{\sin\frac{n}{2}\pi}{n}$;

(5)原数列化为$1\frac{1}{4},3\frac{2}{9},5\frac{3}{16},7\frac{4}{25},\cdots$,

整数、分数部分都呈现出了规律

所以$a_n=(2n-1)+\frac{n}{(n+1)^2}$;

(6)$a_n=(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{(n+1)^2+1}}{(n+1)^2-1}$.

【例11】　解答下列选择题.

(1)数列$3,7,13,21,31,\cdots$的一个通项公式是　　(　　)

A.$a_n=4n-1$　　B.$a_n=n^3-n^2+n+2$

C.$a_n=n^2+n+1$　　D.$a_n=n(n+1)(n-1)$

(2)数列$1,3,6,10,15,\cdots$的一个通项公式是　　(　　)

A. $a_n=n^2-n+1$　　B. $a_n=n^2-2n+2$

C. $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ D. $a_n=\dfrac{n(n-1)}{2}$

解 (1)$3=1\times(1+1)+1,7=2\times3+1,13=3\times4+1,21=4\times5+1,\cdots$

$\therefore$ $$a_n=n(n+1)+1=n^2+n+1.$$

选 C.

(2)$1=\dfrac{1\times2}{2},3=\dfrac{2\times3}{2},6=\dfrac{3\times4}{2},10=\dfrac{4\times5}{2},\cdots$

$\therefore$ $$a_n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

选 C.

(3)判断某数 m 是否是数列$\{a_n\}$中的项. 其中,数列的通项公式为 $a_n=f(n)$

方法 讨论关于 n 的方程 $f(n)=m$ 是否存在正整数解. 存在,m 是数列中的项;否则,m 不是数列中的项.

【例 12】 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\dfrac{n-1}{n+1}$. 请回答:

(1)$\dfrac{3}{5}$是否是这个数列中的一项?

(2)$\dfrac{5}{8}$是否是这个数列中的一项?

解 (1)由$\dfrac{3}{5}=\dfrac{n-1}{n+1}$,得

$$n=4,4\in\mathbf{N}^*,$$ 4∈$\mathbf{N}^*$不可丢掉

$\therefore$ $\dfrac{3}{5}$是数列$\{a_n\}$中的项;

(2)令$\dfrac{5}{8}=\dfrac{n-1}{n+1}$,则对 $n\in\mathbf{N}^*$,这个方程无解,

$\therefore$ $\dfrac{5}{8}$不是数列$\{a_n\}$中的项.

【例 13】 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\dfrac{2}{n^2+n}$,那么$\dfrac{1}{10}$是它的______.

A. 第 4 项 B. 第 5 项 C. 第 6 项 D. 第 7 项

解 若$\dfrac{1}{10}$是这个数列的某一项,则必存在正整数 n,使得

$$\frac{2}{n^2+n}=\frac{1}{10},$$

即此方程有正整数解.

解方程,得

$$n=4,\text{或 } n=-5(\text{舍去}),$$

所以,$\frac{1}{10}$是这个数列的第 4 项.

【例 14】 已知数列的通项公式为 $a_n=n^2+3n-1$,问 269 和 100 是不是这个数列的项? 若是,是第几项?

解 由 $n^2+3n-1=269$,得

$$(n-15)(n+18)=0,$$

$\therefore$ $n=15$,即 269 是该数列的第 15 项.

又当 $n^2+3n-1=100$ 时,

$$n(n+3)=101,$$ ← 没必要解方程

上式的左边是偶数,右边为奇数,

$\therefore$ 100 不是该数列中的项.

题型 3 数列的前 n 项的和 S_n

(1)数列的通项 a_n 与前 n 项的和 S_n 的关系

方法 a_n 与 S_n 的关系是

$$a_n=\begin{cases}S_1 & (n=1),\\ S_n-S_{n-1} & (n\in\mathbf{N}^*,\text{且 } n\geqslant 2).\end{cases}$$

当 a_1 适合 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant 2)$时,通项公式可合并成为一个式子;否则,通项公式应写成分段函数的形式.

【例 15】 数列$\{a_n\}$中,$S_n=n^2+n-2$,求通项公式 a_n.

分析 已知数列的前 n 项的和,求通项 a_n,可直接利用通项与前 n 项的和的关系$a_n=\begin{cases}S_1 & (n=1),\\ S_n-S_{n-1} & (n\geqslant 2)\end{cases}$去求.

解 当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=1+1-2=0$.

当 $n\geqslant 2$ 时,有

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=(n^2+n-2)-[(n-1)^2+(n-1)-2]=2n.\end{aligned}$$