

普通高等教育规划教材

材料力学

(II)

上海交通大学 金忠谋 主编



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育规划教材

材料力学(Ⅱ)

主编 金忠谋

参编 李红云 孙雁

陶昉敏 王国庆



机械工业出版社

《材料力学(Ⅰ)》和《材料力学(Ⅱ)》是根据教育部对材料力学课程的教学基本要求编写而成的。《材料力学(Ⅰ)》包括材料力学的基本部分,涉及杆件基本变形的强度和刚度问题以及压杆的稳定性问题;《材料力学(Ⅱ)》包括材料力学的加深与扩展部分,涉及杆件的组合变形、复杂应力应变分析、能量法等。

本书是《材料力学(Ⅱ)》,内容包括应力应变分析基础、强度理论、组合变形、能量法、超静定系统、动载荷、交变应力等九章。带有*号的内容供教师和读者根据需要决定取舍。

本书适用于高等理工科院校船舶及海洋工程、动力工程、机械工程、工程力学、土建工程等各专业作为教材使用,也可供高等专科学校、高等职业学院和成人教育学院师生及有关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

材料力学(Ⅱ)/金忠谋主编. —北京:机械工业出版社,2005.7
普通高等教育规划教材

ISBN 7-111-16724-4

I. 材... II. 金... III. 材料力学—高等学校—教材 IV. TB301

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第061215号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)

责任编辑:张祖凤 版式设计:霍永明 责任校对:刘志文

封面设计:姚毅 责任印制:石冉

北京中兴印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行

2005年8月第1版第1次印刷

1000mm×1400mm B5·7.625印张·294千字

定价:20.00元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

本社购书热线电话(010)68326294

封面无防伪标均为盗版

前 言

“材料力学”是理工科高等院校机械、土建、航空、造船、汽车、水利等工程专业必修的技术基础课程，也是固体力学专业中学习结构力学、弹性塑性力学的选修课程。“材料力学”初步为分析工程结构和构件强度方面提供了基本概念、基础理论和计算方法，使工程设计问题逐步迎刃而解。本书的编者们尽力体察领会工科力学课程应面向 21 世纪的改革精神，按照教育部对材料力学课程的教学基本要求，在原有教学基础上编写而成本教材，近几年来在上海交通大学等院校使用，取得了良好教学效果。

全书共十五章及附录，分《材料力学（I）》和《材料力学（II）》两册。《材料力学（I）》自第一章至第八章均为基本内容，包括绪论、拉伸（压缩）、剪切、扭转、弯曲四种基本变形，压杆稳定性，附录——截面图形的几何性质。《材料力学（II）》自第九章至第十五章，包括应力应变分析基础、强度理论、组合变形、能量法、超静定系统、动载荷、交变应力。基本内容部分，重视材料力学的基本概念、理论和方法，阐述论证力求清晰、简明扼要，并采用逐步加深、多次反复的叙述方法，在讲清基本理论的同时，注重联系实际。为便于学生练习和课后复习，书中配有大量的习题，并附有习题答案。

当前多数专业为材料力学课程安排的教学时数较为紧张，这就要求教师在巩固基础、有利教学、举一反三的原则下，注意精选教学内容，妥善简捷处理。某些扩大深度和广度的内容可供学生自学研读之用。至于教材的前后次序可按各自的教学经验作适当的更动。

限于编者们的水平，本书难免存在不少疏漏或欠妥之处，敬请广大教师和读者批评指正，以便今后修订时改进。

编 者
于上海交通大学

目 录

前言

第九章 应力和应变分析基础

第一节	应力状态的概念	1
第二节	平面应力状态下任意斜截面上的应力	4
第三节	平面应力状态分析的图解法——应力圆	7
第四节	空间应力状态分析	12
第五节	空间应力状态的应力圆	15
第六节	空间应力状态下的应力-应变关系 广义胡克定律	20
第七节	复杂应力状态下的弹性应变能	24
第八节	材料的三个弹性常数 E 、 G 、 μ 间的关系	26
第九节	平面应力状态下的应变分析	26
第十节	应变圆	28
第十一节	应变测量和应变丛	30
习题		32

第十章 强度理论

第一节	强度理论的概念	38
第二节	关于断裂的强度理论	39
第三节	关于屈服的强度理论	40
第四节	莫尔强度理论	42
第五节	强度理论的应用	45
习题		50

第十一章 组合变形时的强度计算

第一节	概述	53
-----	----	----

第二节	杆件受力的普遍情况	54
第三节	梁的斜弯曲	56
第四节	拉伸(压缩)与弯曲的组合	62
第五节	偏心拉伸(压缩)	65
第六节	扭转与弯曲的组合	71
第七节	曲轴的强度计算	77
习题		80

第十二章 变形能法

第一节	概述	88
第二节	杆件在各种基本变形下变形能的计算	88
第三节	变形能的普遍表达式	90
第四节	卡氏定理	94
第五节	莫尔积分法	102
第六节	图形互乘法	107
第七节	功互等定理、位移互等定理	110
第八节	虚功原理(虚位移原理)	112
第九节	非线性弹性体的应变能和余能	120
第十节	克罗第-恩格塞定理	123
习题		125

第十三章 超静定系统

第一节	超静定系统的基本概念	132
第二节	简单超静定梁	133
第三节	简单超静定刚架	139
第四节	多余约束和静定基本系统的选择	144
第五节	力法 正则方程式	147

第六节	连续梁 三弯矩方程式·····	155	第二节	疲劳破坏·····	202
第七节	最小功原理·····	160	第三节	材料的疲劳极限及其测定·····	204
习题	·····	162	第四节	影响疲劳极限的因素·····	207
第十四章	动载荷		第五节	对称循环下构件的疲劳强度计算·····	214
第一节	概 述·····	170	第六节	疲劳极限曲线及其简化折线·····	215
第二节	等加速运动构件的应力计算——惯性力法·····	170	第七节	非对称循环下构件的疲劳强度计算·····	219
第三节	构件受冲击时应力和变形计算·····	176	第八节	弯扭组合交变应力下构件的疲劳强度计算·····	221
第四节	几个冲击实例的计算·····	179	第九节	提高构件疲劳强度的措施·····	225
第五节	考虑被冲击物质量时的冲击应力的计算·····	184	习题	·····	227
第六节	冲击韧度·····	188	附录	习题答案 ·····	231
第七节	振动应力 单自由度有阻尼强迫振动·····	189	参考文献 ·····		235
习题	·····	194			
第十五章	交变应力				
第一节	交变应力及其循环特性·····	200			

第九章 应力和应变分析基础

第一节 应力状态的概念

在分析杆件承受轴向拉伸（压缩）的应力时，通过杆内任意一点所作各个截面上的应力随着截面的方位而改变。杆件在一般受力情况下，同一截面上的各点有不同应力，如圆轴受扭转时，横截面上的切应力沿半径按线性规律分布。梁在横力弯曲时，横截面上正应力按线性规律分布，而切应力按抛物线规律分布。在《材料力学（I）》第四章第五节中，从受扭圆轴表面截取单元体，分析各斜截面上的应力，可知对受力物体同一点如果截面方向改变了，其应力也随同变化。解决杆件的强度问题，首先要对内力作分析，确定最大内力值及其所在截面（危险截面），再根据截面上应力的分布规律，确定最大应力值及所在点（危险点）的位置。为了全面考虑受力构件的强度问题，围绕危险点截取单元体，分析它在不同方向截面上的应力，找出其极值来。

一个任意物体在一般受力情况下（见图 9-1a），某一截面 $m-n$ 上各点的应力值不同，通常应力并非均布，体内任一点的应力随所取截面方向不同而变化。在分析受力物体某一点 K 的应力时，可围绕此点截

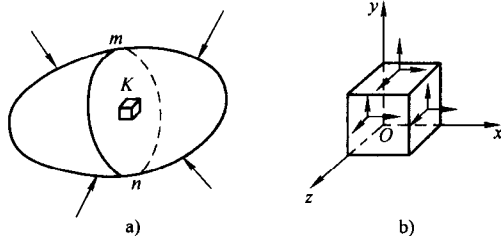


图 9-1

取一单元体如图 9-1b，由于单元体各面的面积很小，故各面上的应力可按均布看待。如单元体各棱边 (dx 、 dy 、 dz) 的尺寸趋近于零时，单元体各面上的应力便可作为 K 这点的应力。经过一点可取无穷多的截面，相应的应力值也有无穷多组的数值。因而受力物体某一点上的应力难以用矢量表示，进一步需用张量来表示（见第九章第四节）。

对于围绕受力物体某一点所截取的单元体，只要知道了某三个互相垂直面上的应力值，其他不同方向截面上的应力值可用静力平衡条件及几何关系推导出来。因此一点上的应力状态 (state of stresses) 就是指受力物体某一点的各个不同方向截面上的应力情况（正应力和切应力的数值）。研究一点的应力状态的目

的是找出在这一点上的最大正应力或最大切应力值及其所在截面的方向。构件断裂破坏时，裂缝通常垂直于最大正应力方向，屈服时滑移错动总是沿最大切应力方向。校核构件受载时的强度问题，必须对构件内某些点（危险点）的应力状态有充分的了解。

通过受力物体内某一点所作无限多的截面中，可找到三个互相垂直的特殊截面，在这些面上没有切应力而只有正应力作用，见图 9-2。这些截面称为主平面，相应作用在面上的正应力称为主应力（principal stress）。主应力是通过受力物体内一点的各个不同截面上正应力值中的极值，是强度计算中的主要数据。

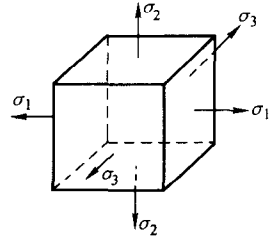


图 9-2

三个主应力可用 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 分别表示， σ_1 表示最大值， σ_2 次之， σ_3 表示最小值，次序按代数值排列，即 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ 。对受力物体内某点沿三主平面方向截取单元体，其应力情况如图 9-2 所示。

在简单拉伸杆件内用主平面截取单元体见图 9-3a、b，三个主应力中有两个主应力等于零，只有一个主应力不等于零，这种应力状态称为单向应力状态。圆轴扭转时在表层截取单元体，见图 9-4a，在 -45° 的斜截面上 $\sigma_{\max} = \tau$ ，在 45° 的斜截面上， $\sigma_{\min} = -\tau$ ，因此 $\sigma_1 = \tau$ ， $\sigma_2 = 0$ ， $\sigma_3 = -\tau$ ，其中有一个主应

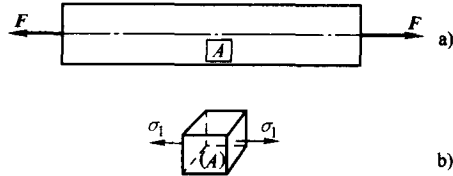


图 9-3

力等于零，这种应力状态称为二向应力状态或平面应力状态。钢轨的上部在与车轮的接触点上，见图 9-5a。该处的应力状态可作为三向应力状态，如围绕接触点 A 用横截面、与表面平行的面和铅垂纵截面截出一个单元体，此单元体三个

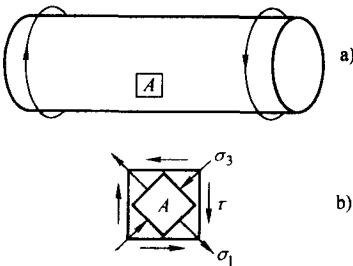


图 9-4

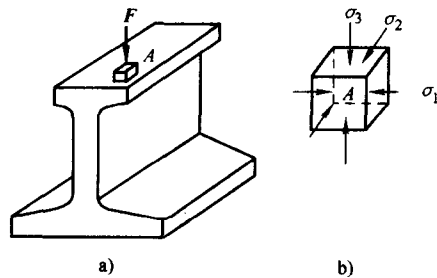


图 9-5

互相垂直的平面都是主平面：在表面上将有接触压应力 σ_3 ，而在横截面和纵截面上分别有压应力 σ_1 和 σ_2 ，如图 9-5b。

例 9-1 圆柱形薄壁容器的内直径为 d ，壁厚为 t ，承受内压强为 p (MPa)，见图 9-6a。试在筒壁的外表面用横截面与径向截面切出单元体及其所受应力，以图形表示之。

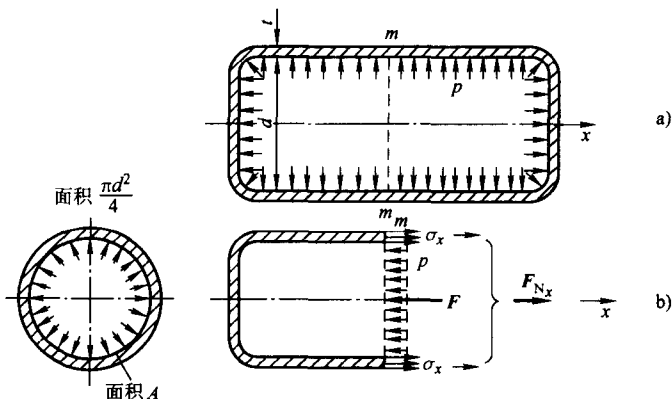


图 9-6

解 圆筒形薄壁容器内贮存压力气体时，气压有将容器胀开的趋势，于是在器壁的纵截面和横截面上存在着拉应力。由于壁厚 t 远小于直径 d ，故应力可假定沿 t 均布。

(1) 横截面上应力计算：如用 $m-m$ 截面将容器截开，保留左段，并把该段容器与气体作为一整体。令筒壁横截面上拉应力为 σ_x ，合力为 F_{N_x} ，如图 9-6b 所示，圆筒横截面面积 $A = \pi dt$ ，则

$$F_{N_x} = \sigma_x A = \sigma_x \pi dt$$

$$\text{气体压力} \quad F = p \frac{\pi}{4} d^2$$

$$\text{考虑沿轴线 } x \text{ 向的平衡条件} \quad \sum F_x = 0$$

$$F = F_{N_x}$$

$$p \frac{\pi}{4} d^2 = \sigma_x \pi dt$$

所以

$$\sigma_x = \frac{pd}{4t} \quad (9-1)$$

σ_x 是圆筒形薄壁容器的轴向应力。

(2) 纵截面上应力计算：用两平行横截面截取长度为 l 的一段容器，再沿直

径平面将容器纵向剖开，如图 9-7a 所示。令纵截面上拉应力为 σ_t ，合力为 F_{N_z} ，考虑 z 轴向的平衡。

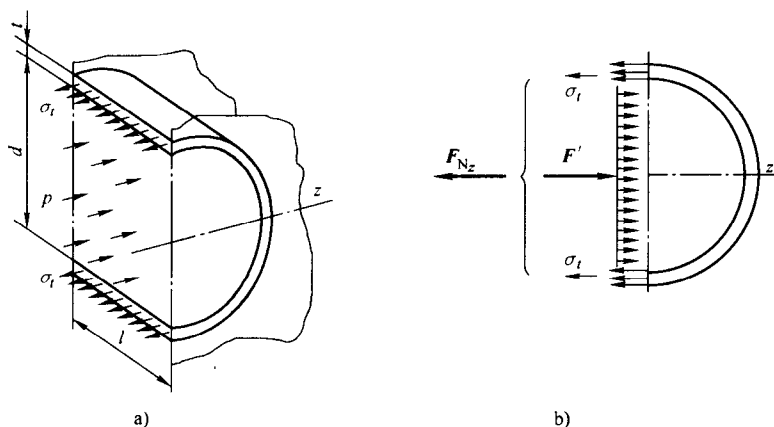


图 9-7

气体压力
筒壁拉力

$$F' = pld$$

$$F_{N_z} = 2\sigma_t lt$$

$$\sum F_z = 0, \quad pld = 2\sigma_t lt$$

$$\sigma_t = \frac{pd}{2t} \quad (9-2)$$

式中， σ_t 称为圆筒形薄壁容器的周向应力（或切向正应力）。

比较式 (9-1) 与式 (9-2)，可知圆筒形薄壁容器的周向应力 σ_t 比轴向应力 σ_x 大一倍。

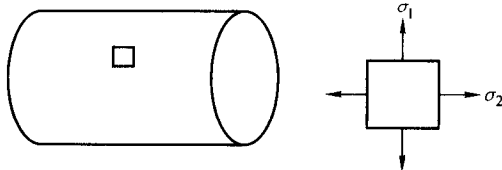


图 9-8

如用横截面与径向截面自圆筒外表面上切出单元体（见图 9-8）， $\sigma_1 = \sigma_t = \frac{pd}{2t}$ ， $\sigma_2 = \sigma_x = \frac{pd}{4t}$ ，它是处于平面应力状态下。

第二节 平面应力状态下任意斜截面上的应力

承受内压的薄壁圆筒，两端再作用扭转力矩，在圆筒外表面上用纵横截面切出单元体，如图 9-9a 所示，在它的上下左右 4 个侧面上均作用着正应力和切应力

力 ($\sigma_x = \frac{pd}{4t}$, $\sigma_y = \frac{pd}{2t}$, $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{2M_n}{\pi d^2 t}$)。切应力 τ 常用两个下标来表示，第

一个下标表示所在截面的法线，第二个下标表示应力所沿的方向。 τ_{yx} 表示在以 y 轴为法线的截面上，沿 x 轴向的切应力。 τ_{xy} 表示在以 x 轴为法线的截面上，沿 y 轴方向的切应力。

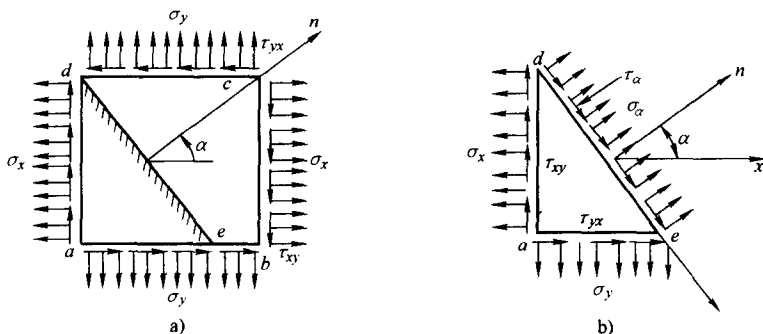


图 9-9

在工程上平面应力状态 (plane state of stress) 的情况较为普遍，单元体的前后两平面上无应力，可用平面单元体 $abcd$ 来表示，见图 9-9a。左右面作用有正应力 σ_x 和切应力 τ_{xy} ，上下面作用有正应力 σ_y 和切应力 τ_{yx} ，由切应力互等定理知 $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ 。由于单元体的尺寸极小，故各面上的应力可认为是均布的。现欲求一任意斜截面 de 上的正应力 σ_α 和切应力 τ_α ，此截面的外法线 n 与 x 轴向成 α 角 (α 角以逆时针转向为正)。以面 de 截取棱柱体 ade 作分离体，见图 9-9b，考虑它的平衡条件。

设截面 de 的面积 dA (棱柱体垂直于纸平面的厚度取一个单位)，则 ad 面的面积 $= dA \cos \alpha$ ， ae 面的面积 $= dA \sin \alpha$ 。以截面法线 n 及切线 t 作为参考轴，分别写出沿斜截面法线方向与切线方向的平衡方程式

$$\sum F_n = 0,$$

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha dA + (\tau_{xy} dA \cos \alpha) \sin \alpha - (\sigma_x dA \cos \alpha) \cos \alpha \\ + (\tau_{yx} dA \sin \alpha) \cos \alpha - (\sigma_y dA \sin \alpha) \sin \alpha = 0 \end{aligned}$$

上式中 $(\sigma_x dA \cos \alpha) \cos \alpha$ 是作用在 ad 面上总拉力 $\sigma_x dA \cos \alpha$ 在法线方向的投影，其他各项可类似地写出。应用切应力互等定理 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ，上式可简化为

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - 2 \tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha$$

或

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (9-3a)$$

同理应用 $\sum F_t = 0$,

$$\begin{aligned} \tau_\alpha dA - (\tau_{xy} dA \cos \alpha) \cos \alpha - (\sigma_x dA \cos \alpha) \sin \alpha \\ + (\tau_{yx} dA \sin \alpha) \sin \alpha + (\sigma_y dA \sin \alpha) \cos \alpha = 0 \end{aligned}$$

化简后得

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \quad (9-3b)$$

任意斜截面 (α) 上的正应力 σ_{α} 与切应力 τ_{α} 可以用式 (9-3a) 与式 (9-3b) 计算出, 当 α 改变时, 应力值也随同变化。

对单元体如截取两个互相垂直的截面如图 9-10, 截面法线 n 与 x 轴成 α 角, 另一截面法线 n_1 则与 x 轴成 $\alpha_1 = \alpha + 90^\circ$ 角, 欲求外法线为 n_1 的截面上的正应力 σ_{α_1} 与切应力 τ_{α_1} , 可把 $\alpha + 90^\circ$ 分别代入式 (9-3a) 与式 (9-3b) 即得

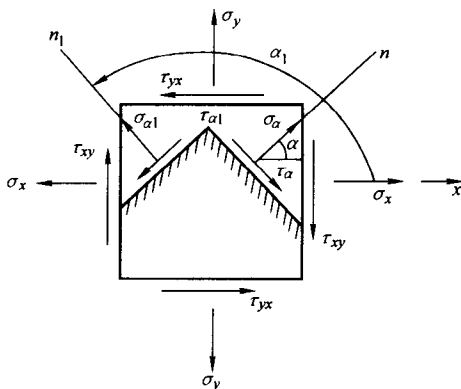


图 9-10

$$\sigma_{\alpha_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (9-4a)$$

$$\tau_{\alpha_1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_{xy} \cos 2\alpha \quad (9-4b)$$

将式 (9-3a) 与式 (9-4a) 相加得

$$\sigma_{\alpha} + \sigma_{\alpha_1} = \sigma_x + \sigma_y = \text{常量}$$

即通过单元体中互相垂直的两个截面上的正应力之和是常量。再比较式 (9-3b) 与式 (9-4b) 两式, 仍得到切应力互等关系, 即

$$\tau_{\alpha} = -\tau_{\alpha_1}$$

主应力、主平面及最大切应力的确定:

欲求 σ_{α} 的极值, 可将式 (9-3a) 对 α 求导数, 并令此导数等于零, 得到正应力达极值时的 α 值。

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} (-2\sin 2\alpha) - 2\tau_{xy} \cos 2\alpha = 0 \\ \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha &= 0 \end{aligned} \quad (9-5)$$

比较式 (9-5) 与式 (9-3b) 可知, 极值正应力 σ' 和 σ'' 所在的平面就是切应力 τ 为零的面, 即是主平面 (principal plane)。主平面上的正应力称为主应力。由此可知, 在应力状态中主应力是正应力中的极大值或极小值, 故在平面应力状态下主应力的方向, 即 σ' 和 σ'' 与 x 轴的夹角 α_0 , 应满足式 (9-5)

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (9-6)$$

α_0 与 $\alpha_0 + 90^\circ$ 均能满足上式, 这样就确定了主应力的方向, 也即主平面的方向, 它们是相互垂直的两截面。为了计算主应力 σ' 和 σ'' 的大小, 从式 (9-6) 计算出 $\sin 2\alpha_0$ 和 $\cos 2\alpha_0$ [⊖], 然后代入式 (9-3a) 得

$$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (9-7a)$$

$$\sigma'' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (9-7b)$$

同理可把式 (9-3b) 对 α 求导数, 再令 $\frac{d\tau_\alpha}{d\alpha} = 0$, 从而确定最大切应力 $\tau_{\max}$ 所在的截面

$$\frac{d\tau_\alpha}{d\alpha} = (\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\alpha - 2\tau_{xy}\sin 2\alpha = 0$$

如令 α' 角满足上式, 则

$$\tan 2\alpha' = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \quad (9-8)$$

α' 与 $\alpha' + 90^\circ$ 均满足上式, 因此最大切应力与最小切应力所在截面是相互垂直的, 由式 (9-8) 计算 $\sin 2\alpha'$ 与 $\cos 2\alpha'$ 值然后代入式 (9-3b) 得

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\max} &= +\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \tau_{\min} &= -\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \end{aligned} \right\} \quad (9-9)$$

比较式 (9-6) 与式 (9-8), 可得

$$\begin{aligned} \tan 2\alpha' &= -\cot 2\alpha_0 = \tan(2\alpha_0 \pm 90^\circ) \\ \alpha' &= \alpha_0 \pm 45^\circ \end{aligned} \quad (9-10)$$

α_0 表示主平面的法线方向, α' 表示最大切应力或最小切应力所在截面的法线方向, 由上式可知最大切应力所在截面和主平面成 45° 角。

第三节 平面应力状态分析的图解法——应力圆

对于某一单元体如图 9-11a, 各面上的 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 均为已知定值, σ_α 与 τ_α 是变量。式 (9-3a) 与式 (9-3b) 是圆的参数方程式, α 是参数, 消去参数, 可

$$\ominus \quad \sin 2\alpha_0 = \frac{\pm \tau_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}, \quad \cos 2\alpha_0 = \frac{\mp \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

得

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad (9-11)$$

上式中等号右边是一常值。现以正应力 σ 为横坐标，切应力 τ 为纵坐标，式 (9-11) 所表示的轨迹是一个圆。这个圆是以 $\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right)$ 为圆心， $\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$ 为半径，称为应力圆或莫尔圆 (Mohr's circle)。代表单元体任意斜截面 (α) 上的正应力 σ_α 和切应力 τ_α 的点必位于此圆周上。

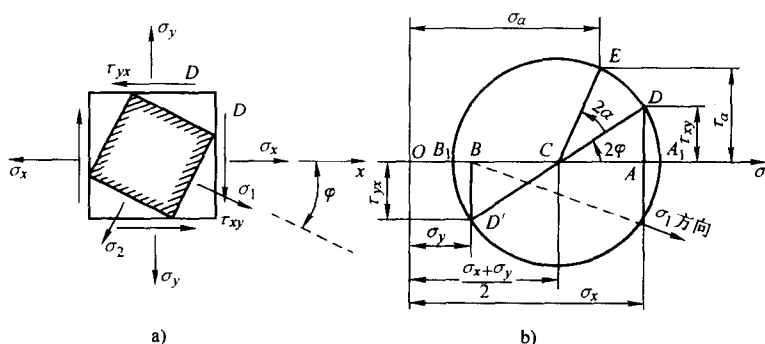


图 9-11

已知单元体左右两侧面上的应力值 σ_x 、 τ_{xy} 和上下两面上的应力值 σ_y 、 τ_{yx} ，也就是已知圆上的 $D(\sigma_x, \tau_{xy})$ 和 $D'(\sigma_y, \tau_{yx})$ 两点，如图 9-11b 所示。这表示这一单元体应力状态的应力圆即归结为几何学中已知两点 D 和 D' 作一圆的法则，其步骤如下：

- 1) 取 $OA = \sigma_x$ (以拉应力为正，压应力为负)， $AD = \tau_{xy}$ (切应力以顺时针转向为正)，得 D 点。
- 2) 取 $OB = \sigma_y$ ， $BD' = \tau_{yx}$ ，定出 D' 点。
- 3) 连接 D 与 D' 两点，与横坐标轴交于 C 点， C 点就是应力圆的圆心，再以 CD 为半径绘图即得。

证明： $\overline{OC} = \frac{\overline{OA} + \overline{OB}}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$

$$\overline{CA} = \frac{\overline{OA} - \overline{OB}}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$$

由于

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \triangle ADC \cong \triangle BD'C$$

半径 $\overline{CD} = \sqrt{\overline{CA}^2 + \overline{AD}^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

圆上各点代表单元体各个不同方向截面上的正应力 σ_α 和切应力 τ_α 值。圆与横坐标轴相交于 A_1 与 B_1 点, 此两点的切应力 τ 等于零, 其正应力 σ_1 与 σ_2 即是主应力, 可由下式证明之, 则

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 = \overline{OA_1} = \overline{OC} + \overline{CD} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_2 = \overline{OB_1} = \overline{OC} - \overline{CD} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \end{aligned} \right\} \quad (9-12)$$

在单元体上自 D 面 (右侧面) 至 D' 面 (顶面) 法线沿逆时针方向转过了 90° 角, 但在应力圆上自相应的 D 点至 D' 点沿圆周同转向转过了 180° 角, 故在单元体上确定所在截面的方向时应考虑这一关系; 在应力圆上点 A_1 在点 D 的顺时针方向, 转角为 2φ , 故在单元体上确定主平面的方向时应将 D 截面法线顺时针方向转过 φ 角。

在应力圆上哪两点代表最大切应力与最小切应力及其数值, 以及在单元体上所在截面的方位, 请读者试着自求之。

如欲求单元体任一斜截面 α 上的应力 σ_α 与 τ_α , 自应力圆上 D 点沿逆时针方向转过 2α 角得到 E 点 (如图 9-11b), E 点的横坐标代表 de 面上的正应力 σ_α , E 点的纵坐标代表它的切应力 τ_α , 则

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \overline{OC} + \overline{CE} \cos(2\varphi + 2\alpha) \\ &= \overline{OC} + (\overline{CD} \cos 2\varphi) \cos 2\alpha - (\overline{CD} \sin 2\varphi) \sin 2\alpha \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \tau_\alpha &= \overline{CE} \sin(2\varphi + 2\alpha) = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \end{aligned}$$

从应力圆推导得的结果与上节用分析法所导出的式 (9-3) 和式 (9-7) 完全相同。在图解法中应注意, 单元体中的截面对应于应力圆上的点, 两者的出发点应相符合, 转向也要一致, 在单元体上转过 α 角, 则在应力圆上应按同一转向转过 2α 角, 方可得到对应点的位置。

例 9-2 在受力构件上某点截割出单元体, 各面上的应力如图 9-12a: $\sigma_x = 60\text{MPa}$, $\tau_{xy} = 20.6\text{MPa}$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{yx} = -20.6\text{MPa}$ 。试求: (1) 主应力的数值及主平面方向; (2) 与 x 轴向成 -45° 截面上的应力 σ_α 与 τ_α 。

解 (1) 作应力圆

选比例尺: $0.8\text{cm} = 20\text{MPa}$, 作 σ - τ 坐标轴。按 $\sigma_x = 60\text{MPa}$, $\tau_{xy} = 20.6\text{MPa}$ 定出对应于 cd 截面 (或 ab 面) 的 D 点; 按 $\sigma_y = 0$, $\tau_{yx} = -20.6\text{MPa}$ 定出对应于 bc 面 (或 ad 面) 的 D' 点。连接 DD' 与 σ 轴交于 C 点, 以 C 为圆心、 CD 为半径, 画应力圆如图 9-12b 所示。

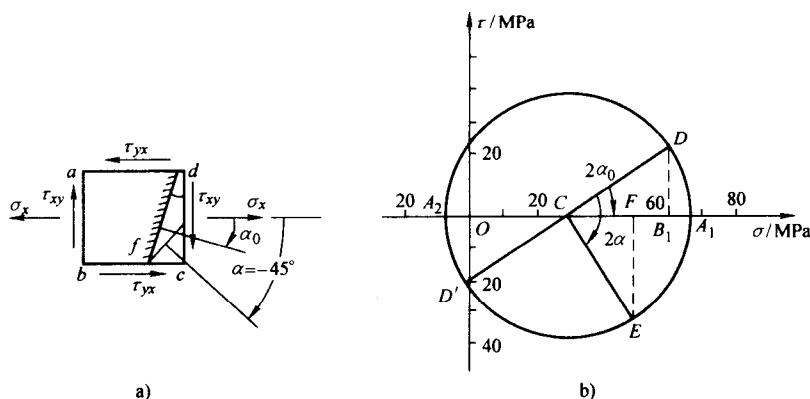


图 9-12

从图 9-12b 可看出 A_1 点 σ 坐标值最大, 代表 $\sigma_{\max}$, A_2 点值最小, 代表 $\sigma_{\min}$, 其大小分别为

$$\sigma_{\max} = \overline{OA_1} = \overline{OC} + \overline{CA_1} = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{\min} = \overline{OA_2} = \overline{OC} - \overline{CA_2} = \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

由图用比例尺量得,

$$\overline{OA_1} = \sigma_{\max} = \sigma_1 = 66.4 \text{ MPa}$$

$$\overline{OA_2} = \sigma_{\min} = \sigma_3 = -6.4 \text{ MPa}$$

主应力的方向也可由应力圆决定, D 点位置是已知的, A_1 点位置可由 D 与 A_1 两点间圆弧所夹的圆心角 $2\alpha_0$ 决定, 即对应在一单元体上主平面与 ab (或 cd) 面之间的夹角为 α_0 , 顺时针转向

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x} = -\frac{2 \times 20.6}{60} = -0.687$$

$$2\alpha_0 = -34.49^\circ$$

或在应力圆上可量得 $2\alpha_0 = -34.5^\circ$, $\alpha_0 = -17.3^\circ$ 。

(2) 找斜截面 ef ($\alpha = -45^\circ$) 对应的点

在单元体中斜截面 ef 与已知截面 cd 的夹角是从 cd 截面顺时针方向转 45° , 则在应力图上应从 D 点顺时针方向转 $2\alpha = 90^\circ$ 的圆心角而得 E 点, 即为 ef 面的对应点, 见图 9-12b。按比例尺量取该点的横坐标及纵坐标得

$$\sigma_a = \overline{OF} = 50.6 \text{ MPa}$$

$$\tau_a = \overline{EF} = -30.0 \text{ MPa}$$

例9-3 介绍几种简单受力情况下单元体的应力圆。

(1) 简单拉伸, 见图 9-13a。

- (2) 简单压缩, 见图 9-13b。
- (3) 双向拉伸, 见图 9-13c。
- (4) 双向等值拉伸, 见图 9-13d。
- (5) 双向等值拉压, 见图 9-13e。
- (6) 纯剪切, 见图 9-13f。

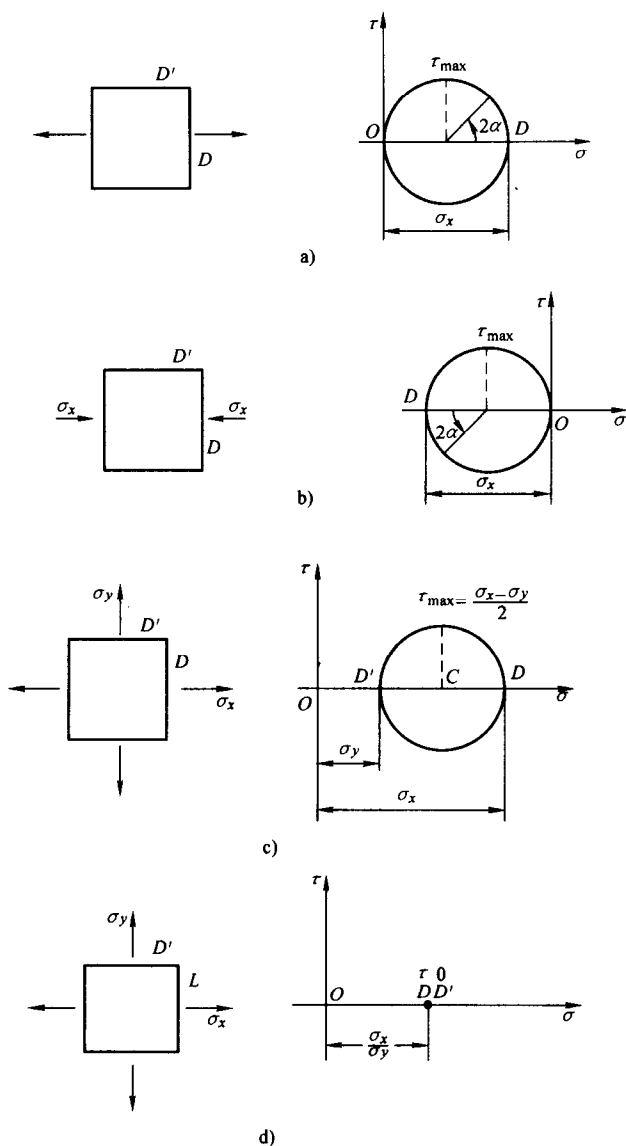


图 9-13