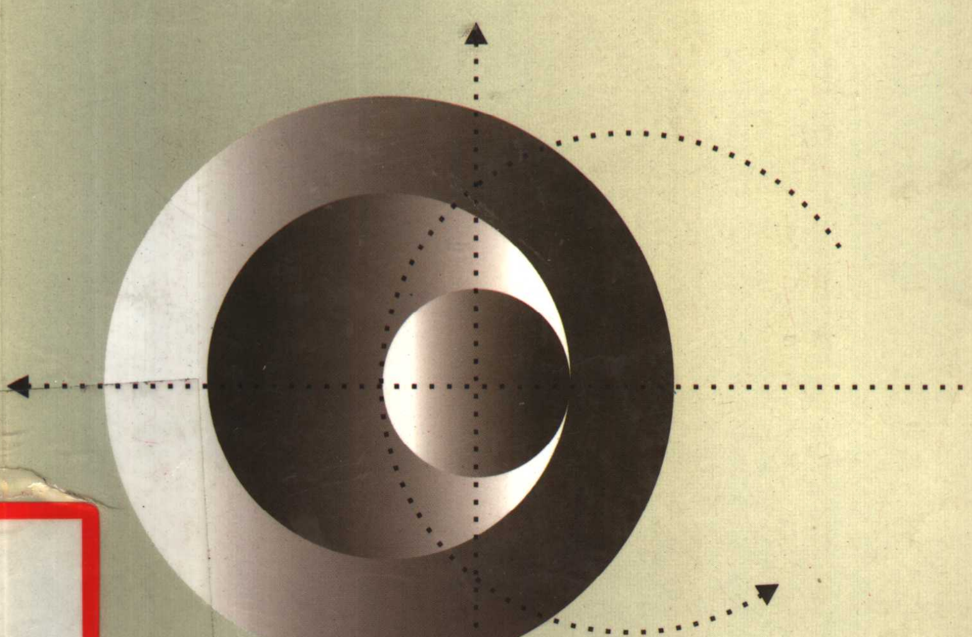
现代应用数学★

动力系统的稳定性

The Stability of Dynamical Systems

J.P.LaSalle 著



四川科学技术出版社

J.P.LaSalle 著
陆 征 一 译

本书由美国工业与应用数学协会
Society for Industrial and Applied Mathematics 授权翻译出版

The Stability of Dynamical Systems

动力系统的稳定性

四川科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

动力系统的稳定性/陈兰荪主编 . - 成都:四川科学技术出版社,2002.7

(现代应用数学丛书)

ISBN 7 - 5364 - 4842 - 2

Ⅰ.动… Ⅱ.陈… Ⅲ.动力系统(数学) - 稳定性 Ⅳ.019

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 051425 号

著作权合同登记章

图进字 21 - 2002 - 014 号

动力系统的稳定性

原　著　J.P.LaSalle(美)
主　编　陈兰荪
译　者　陆征一
责任编辑　康利华　杨晓黎
封面设计　韩健勇
版面设计　杨璐璐
责任出版　何明理
出版发行　四川科学技术出版社
成都盐道街 3 号　邮政编码 610012
开　本　1000mm × 1400mm　1/32
印张 3 5　字数 110 千
印　刷　郫县犀浦印刷厂
版　次　2002 年 7 月成都第一版
印　次　2002 年 7 月成都第一次印刷
印　数　1 - 500 册
定　价　12 00 元
ISBN 7-5364-4842 - 2/ O·56

《现代应用数学》

主编　陈兰荪

中国科学院数学研究所

主 编 的 话

数学在向着“纯粹”方向发展，即在最为抽象的领域中不断得到优美的定理的同时，又不断提供给应用科学和社会科学等方面解决问题的强有力的现代工具.

将最新的抽象结果应用于具有实际意义的模型而得到具有指导性意义的结果是现代应用数学的一大特征. 十分明显的是，数学已经在生命科学、材料科学以及信息技术方面发挥着越来越重要的作用，并且在社会科学方面不断地显示出威力.

本专著的作者 J. P. LaSalle 为美国著名数学家，国际著名刊物 J. Diff. Eqns. 的创始主编. 他于 20 世纪 60 年代初根据 Liapunov 稳定性理论及 Birkhoff 极限集提出了现称为 LaSalle 不变性原理. 此原理不仅具有理论上的完美性，而且在大量稳定性问题的论证中是一个非常有效的方法，而其思想在这本专著中有充分的体现. 我们希望读者通过此书体会 LaSalle 不变性原理的思想，并从中得到帮助.

我们将不定期选择一些具有广泛应用背景的专著通过《现代应用数学》丛书陆续介绍给大家.

陈 兰 荪

于中关村

2001 年 10 月

译者前言

译者在 20 世纪 80 年代初进行研究生学习时接触到微分方程稳定性论证的强有力工具： LaSalle 不变性原理. 通过查阅 LaSalle 1960 年的著名原始文献，学习并将 LaSalle 原理应用于数学生物学中基本和重要的 Lotka-Volterra 系统. 对于一类微分方程和时滞方程得到了系统全局稳定的充要条件，从中体会到 LaSalle 原理确实是 Liapunov 稳定性方法与 Birkhoff 极限集完美结合的理论产物，同时也是高维以及无穷维动力系统稳定性论证的强有力工具.

最近又读到由美国工业与应用数学协会重印的 (1993 年版)LaSalle 专著《 The Stability of Dynamical Systems 》，书中 LaSalle 将其原理通过几类 (离散半动力，局部动力，局部半动力) 系统清晰地展现在我们面前.

将 LaSalle 的思想介绍给更广大的读者是翻译本书的动力，希望此书的中文版能够给读者的教学和科研提供帮助.

本书的翻译得到了罗勇，何碧以及陆云飞的帮助. 云飞帮助录入了除数学公式以外的所有内容，正是他的鼓励促使我在较短的时间内完成了译文. 罗勇，何碧分别帮助我整理了译文并校稿. 感谢他们三位在我完成本书翻译过程中所给予的鼓励和帮助.

感谢白宝刚教授在本书图形完成方面的帮助和指导.

最后，感谢陈兰荪先生将此译著列入由他主编的《现代应用数学》丛书.

陆 征 一

于温州市学院路

2001 年

前 言

某种程度上讲，西方世界确实在 20 世纪 50 年代中期重新发现了 Liapunov 直接方法. 至少在那个时候，其在非线性控制系统设计中的重要性得到了广泛的认识. 我从 1959 年开始了解并体会到 Liapunov 理论，当时 Solomon Lefschetz 和我正在写一本关于这方面的初等教材. 正是在写作过程中，我发现了 Liapunov 函数与 Birkhoff 极限集之间的简单关系. 这个简单关系的发现协调了 Liapunov 理论并且极大地推广了 Liapunov 直接方法. 在过去十多年中，此推广的方法已经不再局限于常微分方程领域，它也成为了其它领域的研究课题. 本书的主要目的就是介绍一些这方面的新进展.

第一章，我们考虑动力系统的最简单形成一由自治差分方程所决定的离散半动力系统. 在这个基本内容中给出主要的思想和一般理论的结构. 在第二章，我们介绍相关理论在自治常微分方程 (局部动力系统) 方面的进展. 第三章介绍滞后型泛函微分方程 (局部半动力系统) 的理论. 此时，状态空间为无穷维且非局部紧. 最新进展包括一大类非自治常微分方程解的极限集的不变性的发现. 这些不变性原理的讨论及其与稳定性的关系由 Zvi Artstein 写入了附录 A. 第四章为关于非自治差分方程的同样的理论，这些内容虽然是新的，但本质上更为基本.

首先，我感谢 John R. Graef 在密西西比州立大学组织了这次区域性会议. 由于他的邀请，激发了我准备这些讲稿. 这次组织得非常好的会议和热情的参与者使我感到十分愉快. 我感谢 Zvi Artstein 所做的讲座以及允许我把他的讲稿以附录的形式包含在本书中.

J. P. LaSalle

Little Compton, Rhode Island

January 1976

目　　录

第一章

差分方程 • 离散半动力系统

1. 引言

现在，对于差分方程进行系统性研究已经越来越必要，其本身具有相当重要的数学背景. 除了收敛性和连续性之外，解的存在性及定义域方面不存在困扰人的问题. 其研究又为微分方程、微分差分方程以及泛函微分方程稳定性的研究提供了一个良好的开端. 本章我们将会看到关于差分方程一般理论的基本描述和一些新的结果. 文献 [49] 是一本非常好的书，它主要是关于差分方程经典 Liapunov 稳定性理论及其在控制系统设计和分析方面的应用（还有文献 [81], [82], [32]）. 在文献 [46] 中， Hurt 拓广了经典理论并将其应用于数值分析. 我们将推广 Hurt 的结果. 在第四章中，我们考虑非自治差分方程.

1.0. 记号

J 为正整数集.

J_+ 为非负整数集.

R^m 为 m 维欧氏空间， $\|x\|$ 为欧氏范数.

用 x 表示向量或函数. 记 $x: J_+ \to R^m$, 则 x' 和 $\dot{x}$ (由 J_+ 到 R^m 的函数) 定义为

$$x'(n) = x(n+1),$$

$$\dot{x} = x' - x,$$

$$T: R^m \to R^m.$$

以差分方程

$$x' = Tx \tag{1.1}$$

代替

$$x(n+1)=T(x(n)),n\in J_+. \tag{1.2}$$

初值问题

$$x'=Tx,\quad x(0)=x^0 \tag{1.3}$$

的解为 $x(n)=T^n(x^0)$, 其中 T^n 为 $T:T^{n+1}=T(T^n)$ 的第 n 次迭代, $T^0=I$ 为恒等映射. 函数的乘法表示复合. 方程 (1.2) 可视为通过一种算法定义一个函数 x.

1.1. 练习 证明: m 阶差分方程 ($g:R^m\to R$)

$$u(n+1)=g(u(n),u(n-1),...,u(n-m+1)), \tag{1.4}$$

等价于一阶差分方程 (1.2) 构成的系统.

2. R^m 上的离散动力系统

以下假设 T 为连续的.

2.1. 定义 R^m 上的离散动力系统为一映射 $\pi:J_+\times R^m\to R^m$, 对 $n,k\in J_+$ 和 $x\in R^m$, 满足:

(i) $\pi(0,x)=x$,

(ii) $\pi(n,\pi(k,x))=\pi(n+k,x)$,

(iii) π连续.

每一个差分方程 (1.1) 定义了一个动力系统 $\pi:\pi(n,x^0)=T^nx^0$, 相反, 每一个离散动力系统对应于一个差分方程 $x'=Tx$, 其中 $T(x)=\pi(1,x)$. 由

于此原因，我们以下着重考虑差分方程 (1.1). 始于 x 点的运动 $T^n x$ 表示状态序列 $x, Tx, \cdots, T^n x, \cdots$. 条件 (ii) 为半群性质且表示正时间轨道的唯一性. π 称为“半流”或“半动力”系统. 将 J_+ 换成 J 后，π 称为动力系统 (此时，T 可逆).

3. 运动的极限集

我们感兴趣的是当 n 取大值时，$T^n x$ 的变化. 这种关于 $T^n x$ 的渐近性态正是稳定性理论所关心的. 进一步，稳定性还必须涉及动力学行为：x 和 T 在扰动下，运动变化如何？ Liapunov 稳定性定义只涉及 x 的扰动. 在第 11 节中，我们将考虑关于 T 的扰动.

$x = Tx$ 之解的逐次逼近方法主要基于：如果 $T^n x^0$ 收敛，其极限必为一解 (不动点或不变点). 我们现在要推广这个事实. 根据 Birkhoff[15] 的理论，我们引入 $T^n x$ 的极限集的概念. (我们仅对正 n 感兴趣，以后都省略“正”字.) 下一节我们要证明，对于有界的 $T^n x$, $\Omega(x)$ 为不变的 $(T(\Omega(x)) = \Omega(x))$. 第六节及以后，我们将说明如何利用 Liapunov 函数得到运动极限集的结构.

3.0. 记号

对于 $x \in R^m$ 和 R^m 中的任意集合 S

$$\rho(x, S) = \inf\{\|y - x\|; y \in S\}, \tag{3.1}$$

为 x 到 S 的距离；

$T^n x \to S (n \to \infty)$ 表示 $(T^n x, S) \to 0 \quad (n \to \infty)$;

$\bar{S} = \{x;\ (x, S) = 0\}$ 为 S 的闭包;

集合 S 称为是闭的，如果 $\bar{S} = S$; 称为是开的，如果其补集是闭.

$T(S) = \{T(x); x \in S\}$.

3.1. 定义 (Birkhoff)　y 称为 $T^n x$ 的极限点，如果存在整数列 n_i, 当 $i \to \infty$ 时，有 $T^{n_i} x \to y$ 及 $n_i \to \infty$. 始于 x 的运动 $T^n x$ 的极限集 $\Omega(x)$ 为所有 $T^n x$ 的极限点的集合.

3.2. 练习　$\Omega(x)$ 的一个等价定义是

$$\Omega(x) = \bigcap_{j=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=j}^{\infty} T^n x}. \tag{3.2}$$

3.3. 练习　对任意 $H \subset R^m$, 定义

$$\Omega(H) = \bigcap_{j=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=j}^{\infty} T^n (H)}. \tag{3.3}$$

证明：　$y \in \Omega(H)$ 当且仅当存在序列 $n_j \in J_+$ 及 $y_j \in H$, 当 $j \to \infty$ 时，有 $T^{n_j} y_j \to y$ 及 $n_j \to \infty$.

4. 不变性

4.1. 定义　对于 (1.1) 或 T, 集合 H 称为是正 (负) 不变的，如果 $T(H) \subset H$ ($H \subset T(H)$). H 称为是不变的，如果 $T(H) = H$.

我们马上要证明, 有界运动的极限集是闭和不变的. 与连续运动不同, 极限集不必连通. 然而，相对于不变性，它具有连通性.

4.2. 定义　一个闭不变集 H 称为是不变连通的，如果它不是两个非空不相交闭不变集之合.

4.3. 定义　运动 $T^n x$ 称为是周期的 (循环的), 如果对某个 $k > 0, T^k x = x$. 其中最小的 k 称为运动的周期或循环的阶. 如果 $k = 1$, x 为 T 的不动点，则 x 称为 (1.1) 的平衡状态.

4.4. 练习 证明：具有有限元素的不变集为不连通的当且仅当其为周期运动.

4.5. 练习 证明：

(a) 正不变集的闭包为正不变.

(b) 有界不变集的闭包是不变的.

4.6. 练习 举例说明不变集的闭包不是不变的.

4.7. 练习 $T^n x$ (关于所有 $n \in J$ 定义) 称为运动 $T^n x$ 的扩张，如果对所有的 $n \in J$ 有，$T_0 x = x$ 并且 $T(T_n x) = T_{n+1} x$.

注. $T_n x = T^n x$ 对 $n \in J_+$ 成立. 假如 x 属于不变集 H, 则运动 $T^n x$ 总可以扩张，但扩张可能不唯一.

4.8. 练习 集合 H 不变当且仅当每一个始于 H 的运动都有属于 H 的一个扩张.

4.9. 练习 举例说明：不变集 H 可以有不属于 H 的扩张.

4.10. 练习 给定 R^m 中集合 E, M 为 E 中最大不变集.

证明：

(a) M 为所有扩张后仍属于 E (对所有 $n \in J$) 的运动之合；

(b) $x \in M$ 当且仅当存在扩张运动 T_n 使 $T_n x \in E$ $(n \in J)$;

(c) E 紧，则 M 紧.

5. 极限集的基本性质

下一节中，我们将利用极限集的基本性质推广和统一处理 Liapunov 直接方法.

5.1. 定理 极限集 $\Omega(x)$ 为闭和正不变的.

证明: 因为 $\Omega(x)$ 的补集是开的，所以 $\Omega(x)$ 是闭的. 设 $y \in \Omega(x)$，则存在整数列 n_i，当 $i \to \infty$ 时， $n_i \to \infty$ 且 $T^{n_i}x \to y$. 由 T 的连续性有，$T(T^{n_i}x) = T^{n_i+1}x \to Ty$ 且 $Ty \in \Omega(x)$. 从而 $T(\Omega(x)) \subset \Omega(x)$，即 $\Omega(x)$ 为正不变的.

我们最感兴趣的是有界运动的渐近性态. 如果运动 $T^n x$ 对所有 $n \in J_+$ 有界，则称为 (Lagrange 意义下) 是正向稳定的.

5.2. 定理 如果 $T^n x$ 对 $n \in J_+$ 有界，则 $\Omega(x)$ 非空、紧、不变、不变连通并且为 $T^n x$ $(n \to \infty)$ 趋于的最小闭集.

证明: $T^n x$ 的有界性蕴含了 $\Omega(x)$ 非空，有界，从而由定理 5.1, $\Omega(x)$ 紧. 设 $y \in \Omega(x)$，如定理 5.1 的证明取 n_i. 由 $T^n x$ 的有界性，可设 $T^{n_i}x$ 收敛 (否则，可选取子序列). 设 $T^{n_i-1} \to z$，则 $z \in \Omega(x)$，$T(T^{n_i-1}x) = T^{n_i}x \to Tz = y$. 因此， $\Omega(x) \subset T(\Omega(x))$，再由定理 5.1， 可得 $\Omega(x)$ 不变.

以下证明 $T^n x$ 有界时，$T^n x \to \Omega(x)$. 因为 $(T^n x, \Omega(x))$ 有界，如果 $T^n x$ 不趋于 $\Omega(x)$，则存在 $n_i \to \infty$ 使得 $T^{n_i}x$ 收敛，而 $(T^{n_i}x, \Omega(x))$ (当 $i \to \infty$ 时) 不趋于 0. 显然矛盾，因为 $T^{n_i}x$ 的极限属于 $\Omega(x)$，所以，当 $n \to \Omega$ 时，$T^n x \to \Omega(x)$. 设当 $n \to \infty$ 时， $T^n x \to E$ 且 E 闭，则 $\Omega(x) \subset E$. 所以 $\Omega(x)$ 为 $T^n x$ $(n \to \infty)$ 趋于的最小闭集.

$\Omega(x)$ 的不变连通性. 假设 $\Omega(x)$ 为两个不相交的非空闭不变集合 Ω_1 和 Ω_2 之和. 因此，存在不相交开集 U_1 和 U_2 使得 $\Omega_1 \subset U_1$ 及 $\Omega_2 \subset U_2$，因为 T 在 Ω_1 上连续，所以一致连续，即存在开集 V_1 使得 $\Omega_1 \subset V_1$ 并且 $T(V_1) \subset U_1$. 因为 $\Omega(x)$ 是 $T^n x$ 趋于的最小闭集， $T^n x$ 必定同时与 V_1 和 U_2 相交无穷多次. 而这蕴含着存在子列 $T^{n_i}x$ 既不属于 V_1 也不属于 U_2，这与 $\Omega(x)$ 含在 V_1 与 U_2 之合中相矛盾. 故 $\Omega(x)$ 不变连通.

5.3. 练习 举例说明，极限集 $\Omega(x)$ 非空，而 $T^n x$ 当 $n \to \infty$ 时不趋于 $\Omega(x)$.

5.4. 练习 如果定义 2.1 中 J_+ 换为 J，则以上结论如何？

5.5. 练习　(参考练习 3.3) 给出 $\Omega(H)$ 相应的基本性质.

5.6. 练习　证明：　如果 K 为紧，正不变，则 $\Omega(K)=\cap_{n=0}^{\infty}T^n(K)$ 非空，紧，不变，且为 K 中的最大不变集.　(此为练习 5.5 之特例)

6. Liapunov 函数

推广的 Liapunov 直接方法. 运动极限集的结构决定其渐近性态. 例如，一个运动趋于一个有限集合，则由定理 5.2 和练习 4.4 可知，此运动趋于一个周期运动. 现在我们要说明，适当的 Liapunov 函数可以给出极限集的结构. 这主要是利用极限集的不变性特征，此方法又称为 "不变性原理". 此原理包含基本和简单的思想，而在理论和运用中又极为有效，并且可以有进一步的推广 (第三章以及附录 A).

设 $V:R^m\to R$. 关于 (1.1)(或 T) 定义

$$\dot{V}(x)=V(Tx)-V(x). \tag{6.1}$$

如果 $x(n)$ 为 (1.1) 的解,

$$\dot{V}(x(n))=V(x(n+1))-V(x(n)).$$

以及 $\dot{V}(x)\le 0$ 表示沿解 V 单调不增. 计算 $\dot{V}(x)$ 不需要知道解的具体表达式，它利用 (1.1) 的右端直接计算，故此方法称为是 "直接的".

6.1. 定义　集合 G 属于 R^m. V 称为是 G 上关于 (1.1) 的 Liapunov 函数，如果 (i) V 连续，(ii) $\dot{V}(x)\le 0$ 对所有 $x\in G$ 成立.

注:　定义中的 (ii) 可换为 $\dot{V}$ 在 G 上不改变符号.

6.2. 记号　关于 G 上 (1.1) 的 Liapunov 函数 V, 定义

$$E=\{x;\dot{V}(x)=0,x\in\bar{G}\}. \tag{6.2}$$

以 M 表 E 中的最大不变集，而 $V^{-1}(c)=\{x;V(x)=c,x\in R^m\}$.

6.3. 定理 (不变性原理) 假如 (i) V 为 G 上 (1.1) 的 Liapunov 函数，(ii) $x(n)$ 为 (1.1) 的有界解且对所有 $n\geq 0$ 属于 G, 则存在 c, 当 $n\to\infty$ 时有 $x(n)\to M\cap V^{-1}(c)$.

证明： 记 $x^0=x(0)$, 则 $x(n)=T^n x^0$. 由定理的假设可知，$V(x(n))$ 关于 n 单调不增且下有界，故当 $n\to\infty$ 时，$V(x(n))\to c$. 取 $y\in\Omega(x^0)$, 则存在序列 n_i 使得 $n_i\to\infty$ 且 $x(n_i)\to y$. 因为 V 连续，$V(x(n_i))\to V(y)=c$, 故 $\Omega(x^0)\subset V^{-1}(c)$. 又因为 $\Omega(x^0)$ 不变，$V(Ty)=c$ 且 $\dot{V}(y)=0$. 因此 $\Omega(x^0)\subset E$, 即 $\Omega(x^0)\subset M$. 由 $x(n)\to\Omega(x^0)$ 可知 $x(n)\to M\cap V^{-1}(c)$.

先考查一个简单例子以说明如何应用以上定理. 然后给出一些特殊情况下的推论.

6.4. 例 考虑二维系统

$$x(n+1)=\frac{ay(n)}{1+x^2(n)},$$

$$y(n+1)=\frac{bx(n)}{1+y^2(n)}$$

或写成

$$x'=\frac{ay}{1+x^2},y'=\frac{bx}{1+y^2}. \tag{6.3}$$

取 $V(x,y)=x^2+y^2$, 则

$$\dot{V}(x,y)=(\frac{b^2}{(1+y^2)^2}-1)x^2+(\frac{a^2}{(1+x^2)^2}-1)y^2.$$

情形 1. $a^2<1,b^2<1$, 则

$$\dot{V}\leq(b^2-1)x^2+(a^2-1)y^2,$$

即 V 为 (6.3) 在 R^2 上的 Liapunov 函数. 此时 $M=E=\{(0,0)\}$. 因为每一个解均有界，由定理 6.3, 当 $n\to\infty$ 时，每个解趋于原点 (原点为整体吸引